靜磁界를 加한 半導體를 갖는 導波管內의 電磁波攝動에 관한 硏究

楊 仁 應 교수
延世大學校

1. 序 論

近似解法인 攝動理論(perturbation theory)을 橫靜磁界를 가한 n형 silicon半導體로 충만된 矩形導波管內의 마이크로波의 傳播特性에 적용해서 電力의 式을 求했다. 이는 電磁波의 Maxwell方程式을 演算子에 의한 固有値問題로 다루워 展開했으며 特히 2個의 Magic Tee를 使用해서 TM에 의해서 變化하는 電力成分을 檢出한 9.61GHz의 TE_{10}波에 의한 實驗結果는 第1次近似値와 잘 一致했다.

2. 攝動理論

攝動理論의 基本原理는 媒質에 아주 적은 영향을 준다면 媒質의 存在는 빈 導波管의 攝動으로 간주할 수 있다는 것이다. field가 expj(wt-kx)의 函數인 경우 攝動論은 Maxwell方程式을 固有値問題(eigen value problem)로 公式化함으로서 統一된 方法으로 展開할 수 있게 했으며 이에 따라 波數(wave number)는 線型演算子(linear operator)의 固有値가 된다.

時間의 函數가 exp(jwt)이고, 同質, 定常狀態인 경우 電磁波의 Maxwell方程式은

$$\left.\begin{aligned} &W\langle\varepsilon\rangle E+V\times(jH)=0 \\ &V\times E+W\langle\mu\rangle\langle jH\rangle=0 \end{aligned}\right\} \qquad (2-1)$$

이므로 本論文은 第2번째의 特性을 갖는 電磁波를 다음과 같이 6個의 vector成分으로 特性化했다.

$$\phi\alpha=\begin{pmatrix} E\alpha \\ jH\alpha \end{pmatrix} \qquad (2-2)$$

여기서 $\overline{E}$와 $\overline{H}$는 定常狀態의 電界와 磁界이고 $\langle\mu\rangle$와 $\langle\varepsilon\rangle$는 導波管을 充滿하고 있는 媒質의 秀磁率과 誘電率 tensor이다.

×軸方向으로 均一한 導波管에 對한 固有値問題는 式 (2-1)의 解에 의해서 求할수 있다. 즉 式 (2-1)은 線型演算子 α과 $\overline{W}$에 의해서 다음과 같이 나타난다.

$$(\alpha-k\alpha\overline{W})\phi_2=0 \qquad (2-3)$$

여기서

$$\left.\begin{aligned} &L=L_0+L \\ &L_0=\begin{pmatrix} W\varepsilon_0 I & V_t\times I \\ V_t\times \mathrm{I} & W\mu_0 I \end{pmatrix} \\ &W=\begin{pmatrix} 0 & j\times xI \\ j\hat{x}\times I & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}\right\} \qquad (2-4)$$

演算子 L는 異方性을 나타내는 攝動演算子로서

다음과 같다.

$$L=\begin{pmatrix} W\varepsilon_0 X_e & 0 \\ 0 & w\mu_0 \chi m \end{pmatrix} \qquad (2-5)$$

여기서 X_e는 帶電率 tensor이고 Xm은 帶磁率 tensor이다.

半導體의 透磁率은 眞空의 것과 同一하다고 취급하므로 여기서 Xm은 零이다. 誘電率 ε_0은 複素數이고 導電電流는 勿論이고 變位電流까지 나타낸다.

半導體의 異方性은 磁界에 의해서 誘起되므로 磁界强度를 攝動定數로 使用하기 위해서 次元이 없는 變數 V_c로 表示하면

$V_c=0$을 中心으로 展開한 Taylor公式에 의한 攝動演算子 L는

$$L=\sum_{n=1}^{\infty} V_c^n L^{(n)} \qquad (2-6)$$

그런데 式 (2-3)은

$$(L_0+L)\phi_2=k\alpha W\phi_2 \qquad (2-3)'$$

이므로 $\phi\alpha$와 $k\alpha$도 Vc의 函數로 볼 수 있으므로

$$\phi_2=[\phi\alpha^{(0)}+\sum_{n=1}^{\infty} Vc^n\phi_2^{(n)}]e-jk_2x \qquad (2-7)$$

$$k_\alpha=k_{2o}+\sum_{n=1}^{\infty} V_c^n k\alpha_n \qquad (2-8)$$

다만 $\phi\alpha^{(1)}$, $\phi\alpha^{(2)}$, ……, $k\alpha_1$, $k\alpha_2$……등은 Vc에 의존치 않는다.

여기서 $k\alpha_0$와 $\phi\alpha^{(0)}$는 各各 磁界를 加하지 않는 경우의 α_0의 固有 Vector이고 $k\alpha_n$과 $\phi\alpha^{(n)}$는 第3次의 攝動을 나타낸다.

式(2-6), 式(2-7), 式(2-8)을 式(2-3)에 代入하면 다음과 같은 一連의 方程式을 얻을수 있다.

$$(L_0-k\alpha_0 W)\phi\alpha^{(0)}=0 \qquad (2-9)$$

$$(L_0-k_{20}W)\phi_2^{(1)}=-(L^{(1)}-k\alpha_1 W)\phi_2^{(0)} \qquad (2-10)$$

$$(L_0-k\alpha_0 W)\phi\alpha^{(2)}=-(L^{(1)}-k\alpha_1 W)\phi\alpha^{(0)}-(L^{(2)}-k\alpha_2 W)\phi_2^{(0)} \qquad (2-11)$$

지금 式(2-9)의 方程式에 대한 解 $\phi\alpha^{(0)}$, $k\alpha_0$는 알고 있으므로 式(3-10), (3-11)로부터 第1의 $\phi_2^{(1)}$와 $k\alpha_1$, 第2의 $\phi\alpha^{(2)}$와 $k\alpha_2$를 求할수 있다. 따라서 第2의 方程式의 解를 얻기 위하여 固有函數 $\phi\alpha^{(1)}$을 알려진 正規化 直交系 $\phi_1^{(0)}$, $\phi_2^{(0)}$, $\phi_3^{(0)}$, ……$\phi_2^{(0)}$……에 의해서 展開한다면 波動方程式의 一般解는 進行波와 反射波의 解를 갖이므로 第1次 攝動項은

$$\phi\alpha^{(1)}=\sum_{\beta}(\alpha_\beta\phi_\beta^{(0)}-\alpha\text{-}\beta\phi^{(0)}-\beta_{-\beta}^{(0)} \qquad (2-12)$$

이다.

여기서 $\phi_{-\beta}^{(0)}$는 $_\beta{}^{(0)}\phi$의 反射波이며 이는 Adjoint operator에 의해서 얻을수 있다.

式(2-12)을 式(2-10)인 波動方程式에 代入하고 다음과 같은 Bi=orthogonality條件

$$\phi_{-+\beta}^{(0)} W\phi\pm_\alpha d_\alpha=\langle\phi_{-+\beta}^{(0)} W\phi_{-+\alpha}^{(0)}\rangle=\delta_{\beta 2} \qquad (2-13)$$

을 적용하면

$$k\alpha_1=L^{(1)}-\alpha)\alpha \qquad (2-14)$$

$$\alpha\pm_{\beta 1}=\frac{L^{(1)}\pm\beta,\alpha}{k_{\alpha 0}\mp k_{\beta 0}} \qquad (2-15)$$

이다. 여기서

$\delta_{\beta\alpha}$는 Kroneker delta

da는 導波管의 斷面積素子

$$\langle\phi_\beta,\phi_\alpha\rangle=S(\overline{E_\beta}\cdot\overline{E_\alpha}+j\overline{H_\beta}\cdot j\overline{H_\alpha})d_\alpha$$

$$L^{(1)}{}_{\beta,\alpha}=\phi^{(0)}{}_\beta L^{(1)}\phi^{(0)}{}_\alpha da=\langle\phi_\beta^{(0)},\quad L^{(1)}\phi_\alpha^{(0)}\rangle$$

그러므로 式(2-7)과 式(2-8)에 式(2-12), 式(2-14), 式(2-15)을 代入하면 다음과 같은 第1次 近似解를 얻는다.

$$\phi_\alpha=[\phi^{(0)}{}_2+Vc\sum_{\substack{\beta \\ \beta\alpha}}\frac{\overset{(1)}{L}-\beta,\alpha}{k_{\alpha 0}-k_{\beta 0}}\phi_\beta{}^{(0)}-Vc\sum_{\beta}\frac{\overset{(1)}{L}\beta,\alpha}{k_{\alpha 0}+k_{\beta 0}}\phi_{-\beta}^{(0)}\;e^{-jk_\alpha X} \qquad (2-16)$$

$$k_\alpha=k_{\alpha 0}+VcL_{-\alpha,\alpha}^{(1)} \qquad (2-17)$$

3. 理論的 計算値

導電率 tensor를 使用해서 第1次 攝動項을 求하면 다음과 같다.

$$\phi_\alpha^{(1)}=-j\rho_{12}^{(1)}2\sum_\beta \frac{E_{\beta z}^{(0)}E\alpha y^{(0)}da}{k_{\alpha0}^2-k_{\beta0}^2} k_{\beta0} \begin{pmatrix} jk_{\alpha0}\frac{\partial\psi_\beta}{\partial\chi} \\ jk_{\alpha0}\frac{\partial\psi_\beta}{\partial y} \\ k_\beta^2\ \psi_\beta \\ -W\varepsilon_0\frac{\partial\psi_\beta}{\partial y} \\ w\varepsilon_0\frac{\partial\psi_\beta}{\partial\chi} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3\text{-}1)$$

여기서 ψ_β는 TM_β의 固有函數이다.

따라서 第1次 近似解인 α번째 mode $\phi\alpha$는 式(2—7)에 의해서 다음과 같다.

$$\phi_\alpha=[\phi_\alpha^{(0)}+Vc\phi_2^{(1)}]e\text{-}jk_{\alpha0}x \qquad (3\text{—}2)$$

本 論文에서 求하고자 하는 電力은 Eg와 $H\alpha$에 관계되는 電力만을 求하는 것이 目的이므로 TE_{10} mode에 磁界强度 $H_\alpha x$에 대한 攝動磁界는 $Vc\ H_\alpha x^{(0)}$임을 알 수 있다. 그런데

$$H_{\alpha x}^{(0)}=jk_{10}a_{10}\frac{\pi}{a}\sin\frac{\pi}{a}\chi$$

이고 TM_β의 固有函數는

$$\psi_\beta=\alpha_\beta\sin\frac{mn}{a}\sin\frac{nn}{b}y$$

여기서

$$\alpha_\beta=[-\frac{1}{2}w\varepsilon_0k_{\beta0}k_\beta^2ab]^{-\frac{1}{2}}$$

이므로 式(3—1)에 의해서

$$VcH_{\alpha x}^{(1)}=-2Vc\delta_{12}^{(1)}w\varepsilon_0\sum_\beta\frac{E_{\beta\chi}^{(0)}E_{\alpha y}^{(0)}da}{k_{\alpha0}^2-k_o^2}k_{\beta_o}\frac{\partial\psi_\beta}{\partial y} \qquad (3\text{—}3)$$

이다.

따라서 上式을 整理해서 管壁上下面($y=0.6$)의 攝動된 第1近似 χ方向磁界强度를 求하면

$$V_cH_{\alpha\alpha}^{(1)}=\mp\frac{1}{2}a_{10}jw\mu_0\sigma_{12}^{(1)}V_cb\frac{\pi}{a}\sin\frac{\pi}{a}\chi$$

이다.

여기서 $\sigma_{12}^{(1)}$의 값은

$$\sigma_{12}=\frac{\sigma_0}{1\text{-}jwz}\cdot\frac{\mu_{HB}}{1+\left(\frac{\mu_HB}{1-jwz}\right)^2}$$

이므로 $\mu_HB=Vc$로 놓으면 $\mu_HB<1$인 경우

$$\sigma_{12}^{(1)}=\frac{\sigma_0}{1\text{-}jwz}$$

이다. 여기서 $\sigma_0=\frac{\sigma_{dc}}{1\text{-}jwz}$이다.

지금 導波管의 單位斷面積을 흐르는 平均電力을 TE波와 TM波에 대해서 求해 보면

(1) TE mode인 경우

$$P_{TE}=\frac{Z_{TE}}{2}\left|Ht\right|^2 \qquad (3\text{—}4)$$

여기서 $Z_{TE}=\eta\frac{\lambda_g}{\lambda}$, $\eta=\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$, H_t는 橫磁界

(2) TM mode인 경우

$$P_{TM}=\frac{Z_{TM}}{2}\left|Ht\right|^2 \qquad (3\text{—}5)$$

여기서 $Z_{TM}=\eta\frac{\lambda}{\lambda g}$이다.

그러므로 磁界를 加하지 않는 경우의 Ey와 Hx에만 關係되는 電力 P_{TE}와 磁界를 加한 경우에 일어난 Ey와 Hx의 攝動電力 P_{TM}을 求해서 그 比를 計算한 理論式은 다음과 같다.

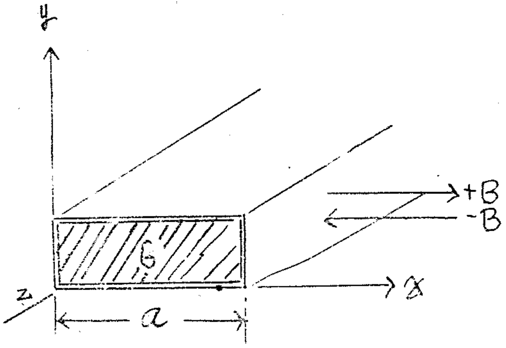
$$\frac{P_{TM}}{P_{TE}}=\frac{Z_{TM}}{Z_{TE}}\left|\frac{w\mu_o\sigma_{dc}b}{2k_{10}}\mu_HB\right|^2=0.3730243\times|B|^2 \qquad (3\text{—}6)$$

4. 實驗方法과 結果

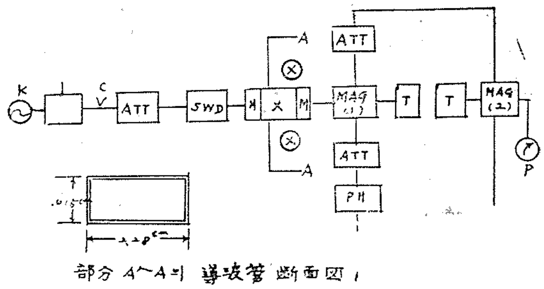
TE_{10} mode인 경우는 電界成分은 Ey뿐이므로 tensor媒質에 의해서 攝動된 Ey만을 檢出하기 위하여 Magic-Tee를 2개 使用했다. (實驗裝置의 構成圖 그림2 參考)

本 實驗에 使用한 半導體의 規格. 特性 및 條件은 다음과 같다.

(1) 型 및 種類; N型 Silicon
(2) 製造會社; JAPAN ELECTRONIC METALS CO. LTD, TOKYO JAPAN
(3) 規　格; 2.28cm×0.90cm×2.28cm
(폭)　(높이)　(길이)
(4) 導電率; 17mho-m
(5) 移動度; 0.15m²/Volt-Sec
(6) 室內溫度; 15°C



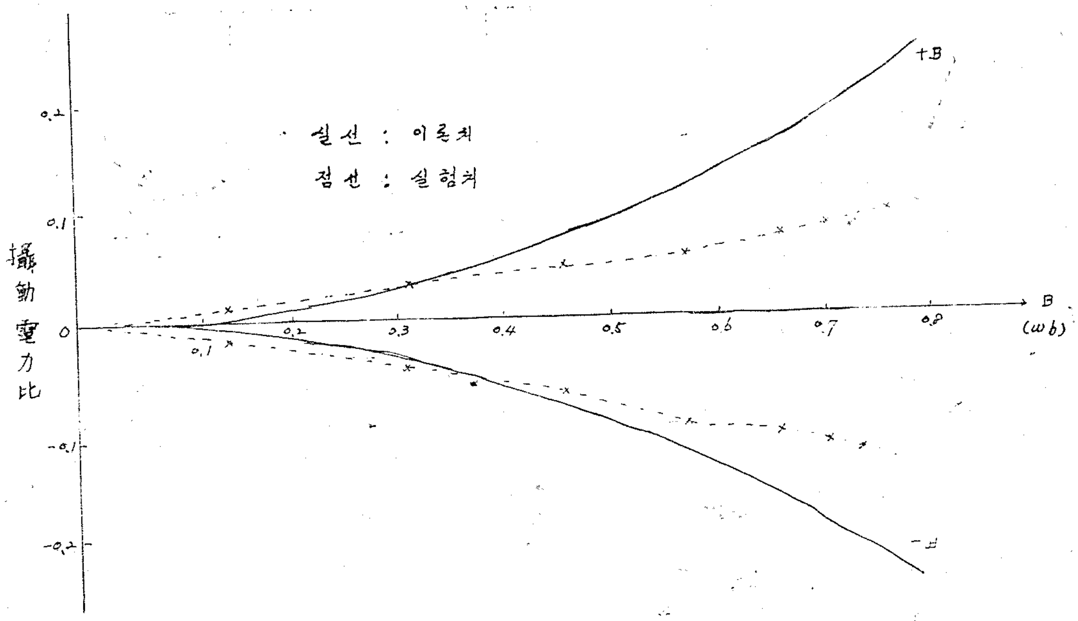
(그림1) 靜磁界下에 있는 性質을 갖는 導波管



(그림2) 實驗裝置의 構成圖

(범 례)

K : Klysfron
I : Isolafor
ATT : 減衰器
C : 空同周波計
M : Mafching slof
SWD : 定在波測定器
MAG : Magic Tee
T : 無反射終端
PH : 位相器
P : 電力計
X : 靜磁界裝置



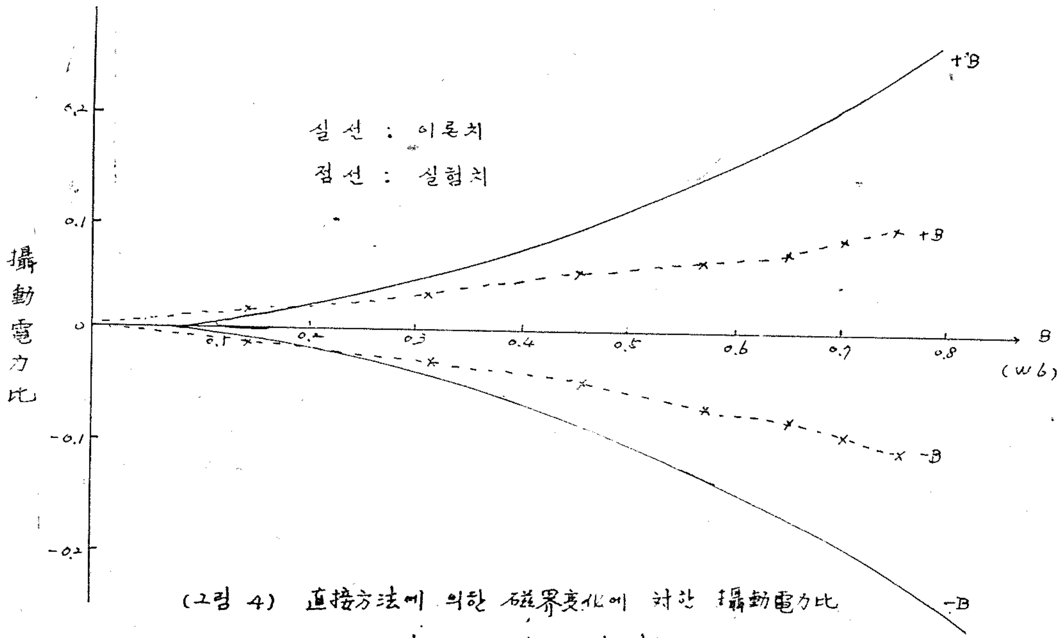
(그림3) Bridge方法에 의한 磁界變化에 対한 攝動電力比
(出力 0.006 mW 인 경우)

5. 結　　論

攝動理論을 電磁界에 應用해서 求한 第1次近似解가 約 400Gauss範圍內에서는 實驗値와 거의 一致함은 電磁界에 對해서 量子力學的인 近似解法의 적용의 가능성을 立證한 것이며 本 論文에 使用한 實驗은 媒質의 電氣的 性質을 研究하는데도 큰 도움이 될 것이다.

REFERENCES

1. G. Dresselilaus, A.F. Kip, and C. Kittel,



(그림 4) 直接方法에 의한 磁界変化에 대한 攝動電力比
(出力 0.006 mW 인 경우)

"Cyclotron resonance of clectrons and holes in silicon and Germañium Crystals"
Phy. Rev., Vol-98, pp. 368—375 Apr 15, 1955

2. R.R. RAU and M.E. Gaspari,
"Faraday effect in Germanium at room temperature", Phy. Rev., Vol-100, pp. 632—639,, Oct 15, 1955.
3. J.K. Furdyna and S. Broersma,
"Microwave faraday effect in silicon and Germanium," Phy. Rew., Vol-120, pp. 1995—2002, December 15, 1960
4. H.E.M. Barlow and R. Koike,
"Micro wave propagation in a waveguide containing a semiconductor to which is applied a steady transverse magnetic field."
Proc. IEEE, Vol-110, pp. 2177—2181, Dec 1963.
5. K.S. Champlin and D.B. Armstrong,
"Waaveguide perturbation techniques in microwave semiconductor diagnostics,"
IEEE Trans on Microwave Theory and Techniques, Vol-MTT-11, pp. 73—77, Jan 1963.
6. M. Toda,
"Propagation in a solid state plasma waveg uide in a transverse magnetic field,"
J.PHY. Soc. (Japan), Vol-19, pp. 1126—1130, Jur 1964.
7. M.H. Engineer and B.R. Nag,
"propagation of electromagneticwaves in rectatngular quides filled with a semiconductor in the presence of a tranceverse magnetic field,"
IEEE Trans, on Microwave Theory and Techniques, Vol-MTT-13 No. 5, pp. 641-646, Sep. 1965
8. G.J. Gubriel and M.E. Brodwin,
"The solution of quided waves in inhomogeneous anisotropic media by perturbation and variational methods,"
IEEE Trans on Microwave theory and Techniques, Vol. MTT-13, pp. 364—370, May 1965.
9. G.J. Gabriel and M.E. Brodwin,
"perturbation analysis of rectangular wavequide containing tranversely magnetized semiconductor."
IEEE Trans on Micro wave theory and techniques, Vol. MTT-14, No. 6, pp. 258—264 June 1966