非線形抵抗回路網의 解析

車　均　鉉 교수
崇田大學校

1 序　論

非線形連立方程式을 푸는 표준방법은 Newton-Raphson 反復방법이다 [1,2]. 이 방법은 2位로 빠르게 수렴하나 어떤 조건하에서는 발산하거나 解근처에서 진동한다. 그리고 連立方程式의 각 反復마다 Jacobian行列을 反轉해야 하므로 이것이 계산시 많은 노력을 요한다. Broyden은 Newton-Raphson 방법을 수정하여 발산을 방지하고 각 反復마다 Jacobian 行列을 反轉하지 않는 경제적인 방법을 창안했다[2]. 본 論文에서는 이 Broyden방법을 컷셋해석을 이용하여 이론을 전개하고 Jacobian 行列의 反轉을 구하는 과정의 일부로서 골든섹손탐색(Golden section search)을 택하였다.

2 컷셋해석을 이용한 非線形抵抗回路網의 理論展開

(a) Broyden방법을 이용한 컷셋해석

컷셋行列 D와 어드미턴스 行列 Y를 이용하여 回路網에 대한 컷셋方程式은 다음과 같이 쓸 수 있다[1],

$$D^t Y D l_T = D^t (I - YE) \qquad (1)$$

여기서 e_T는 나무의 가지電壓이고, I는 電流源벡터이고, E는 각가지의 電壓源 벡터이다. 그림 1과 같이 가지(branch)를 표시하면 素子양단의 電壓벡타 V는

$$V = E + e \qquad (2)$$

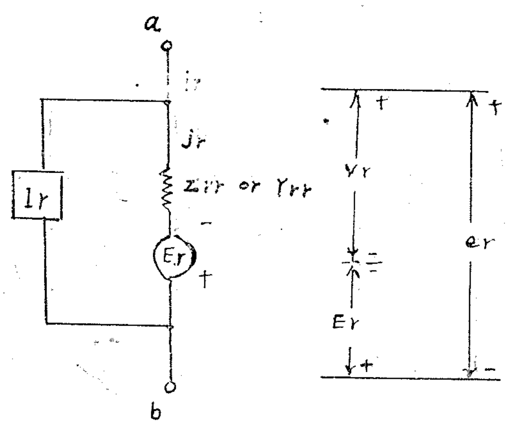

Fig 1. Component of the rth branch of an electrical network

이다. 여기서 e는 가지電壓벡타이며

$$e = De_T \quad (3)$$

이다[1].

(1) 식을 다시 쓰면

$$f(e_T) = D^t\{Y(De_T + E) - I\} = 0 \quad (4)$$

이 된다. (4)식에서 $f(e_T)$는 벡터변수 e_T에 대한 벡터함수이며 이것을 誤差벡터라 한다. 變分de_T에 대한 벡터 e_T는 df의 변화를 갖어올것이므로

$$df = \left(\frac{\partial f}{\partial e_T}\right) de_T \quad (5)$$

이 된다. 여기서 $\frac{\partial f}{\partial e_T}$는 Jacobian 行列이며 이 行列의 ij 번째 要素는

$$\frac{\partial f}{\partial e_T}{}_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial e_{Tj}}$$

이다. 여기서 f_i는 $f(e_T)$벡터의 i번째 要素이고 e_Tj는 e_T벡터의 j번째 要素이다. (4)식의 解를 反復法을 이용해서 푼다고 할 때 벡터解에 대한 k번째 근사 $e_T(k)$에 해당하는 벡터함수 $f(k) = f(e_T(k)$는 0이 아니다. (5)식에 의해$e_T(k)$의 변화에 따라 $f(k)$가 감소하여 0으로 되어야 한다. 그러므토 근사변화는

$$df(k) = -f(k) = \left(\frac{\partial f}{\partial e_T}\right)(k)\ de_T(k) \quad (7)$$

이 되고, $(k+1)$번째 근사에서는 解벡터 e_T는

$$e_T(k+1) = e_T(k) - \left(\frac{\partial f}{\partial e_T}\right)^{-1}_{(k)} f_{(k)} \quad (8)$$

이 된다. (8)식은 Newton-Raphson의 反復공식이다. (8)식에서 $\frac{\partial f}{\partial e_T} = D^t\bar{Y}D$가 됨을 증명할 수 있다. 여기서 $Yij = \frac{\partial Ji}{\partial Vj}$이다. 그러므토 (8)식은

$$e_T(k+1) = e_T(k) - (D^t\bar{Y}D)^{-1}_{(k)} f_{(k)} \quad (6)$$

이 된다. (9)식의 解를 구하기 위해서는 (4)식과 $\bar{Y}(V)$외에 각 $\bar{Y}(V)$를 反復마다 구해야 한다.

이러 번거로움을 피하기 위하여 Broyden의 非線形微分方程式을 푸는 방법을 도입한다. 즉 (8)식에서 수정벡터

$$P_k = -\left(\frac{\partial f}{\partial e_T}\right)^{-1}_{k} f_k \quad (10)$$

을 정의하여 이 수정벡터의 일부를 취하면

$$e_{T(k+1)} = e_{T(k)} + t_{(k)}\ P_{(k)} \quad (11)$$

이 된다. 여기서 誤差벡터 $f_{(k+1)}$의 길이를 최소화하기 위한 스카라양으로 이렇게 취하므로서 발산을 방지할 수 있다. 그러나 수렴이 보증되는 것은 아니다. t_k를 취하는 방법으로서 골든섹숀 탐색방법을 이용하였다. 골든섹숀탐색에서

$$t_k \triangleq \sum_{k=0}^{i} r^k \lambda_0 \quad i = 0.\ 1,\ 2,\ \cdots\cdots \quad (12)$$

이다. 여기서 $r = 1.618$이고 λ_0는 적당한 step-siez이다[1,5].

여기서 이 법에 대한 자세한 설명은 하지않겠으나 이 방법은 구간 [0, 1]을 연차적으로 미소구간으로 나누어 (4)식의 결과에 따라 t의 현재값의 좌우로 최적치를 축적해 나가는 것이다.

(11)식의 벡터 e_T가 스카라양 t에 대한 連續函數라 하면

$$e_T(t) = \partial_{T(k)} + tP_{(k)} \quad (13)$$

이 되며 (4)식과 함께 誤差벡터 $f(e_T)$가 역시 t의 함수임을 나타낸다. Jacobian행열이 존재한다고 가정하였으므로

$$\frac{df}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial e_T}\right)\frac{de_T}{dt} = \left(\frac{\partial f}{\partial e_T}\right) P_{(k)} \quad (14)$$

이 되고 (14)식은

$$P_{(k)} = \left(\frac{\partial f}{\partial e_T}\right)^{-1}_{k}\frac{df}{dt} = H_k\frac{df}{dt} \quad (15)$$

와 같이 쓸 수 있다. Broyden은 $\frac{df}{dt}$를 階差方程式으로 계산하였다. 즉 $f_{k+1} = f(t_k)$라 정하고 $f(t_{k-}s)$를 테일러 급수로 전개하여 첫항만을 취하면

$$\frac{df}{d_t} = \frac{f_{k+1} - f(t_k - s_k)}{s_k} = \frac{y_k}{s_k} \quad (16)$$

이 된다. 여기서 s_k는 스카라양 t의 미소증분을 취하고 y_k는 誤差벡터 f의 증분이다. (16)식에서

$$y_k = f_{k+1} - f_k \quad (17)$$

라 쓸 수 있고 (15)식과 (16)식을 결합하면

$$H_kY_k = -S_kP_k \quad (18)$$

가 된다. (18)식은 H_k가 만족해야할 條件式이나 H_k를 유일하게 정하지는 못한다. 그러므로 H_k를 유일하게 정하기위하여 Broyden은 다음 부대조건을 가정하였다.

즉 P_k와 다른 방향에서 ∂_T의 변화에 의한 誤

差벡터 f의 변화에 의한 誤差벡터 f의 변화에 대한 어떤 정보도 얻을 수 없으므로 P_k에 Orthogonal한 방향으로 e_T의 변화에 의한 f의 변화는 없다고 본다. 이러 가정에서 recursion 방정식은

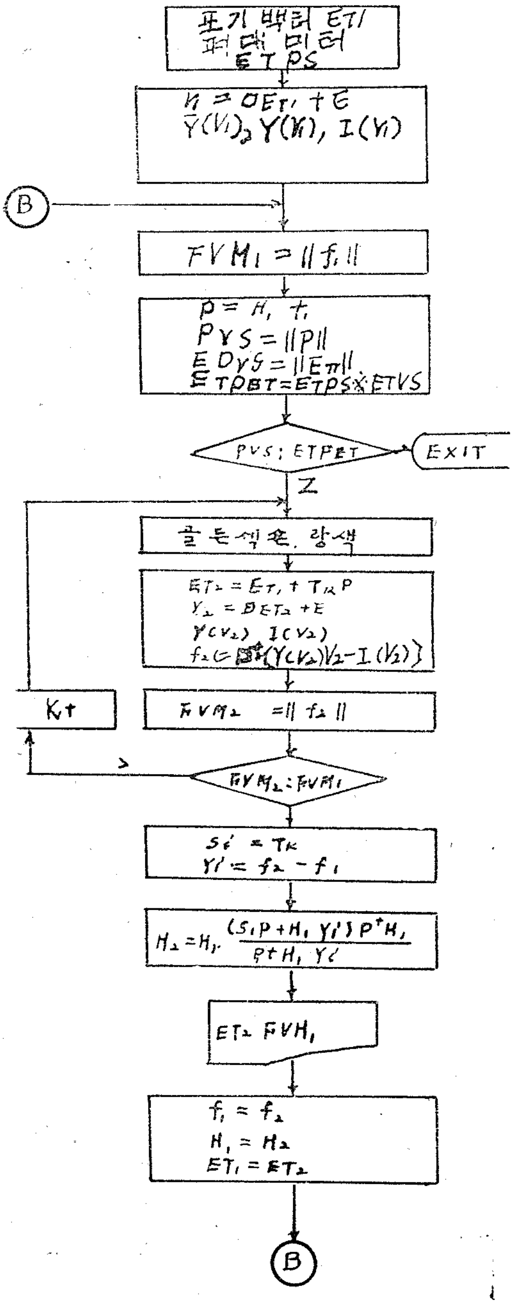

Fig. 2. Flow chart for solving nonlinear resistive network

$$H_{k+1}=H_k-\frac{(S_kP_k+H_kY_k)P_k^tH_k}{P_k^tH_kY_k} \qquad (19)$$

이 된다.

(19)식이 Jacobian 行列의 逆行列을 反轉하지 않고 직접구하는 방법이다. 이상의 算法을 이용하여 非線形抵抗回路網의 解를 구하는 콤퓨터 flow chart는 그림 2와 같다.

(b) Sparse 行列을 이용하여 푸는 방법

이상의 算法을 sparse行列[4]을 이용하여 푸는 방법은 다음과 같다.

① 최초의 解벡터 e_{T1}을 선정한다.

② $V=De_{T1}+E$

$\overline{Y}(V_1)$, $I_{DN}(V_1)$, $H_1=D^t\overline{Y}D$

$f_1=D^t[\overline{Y}(V_1)V_1-I-I_{DN}(V_1)]$계산

③ $\|f_1\|$ 계산

④ $(D^t\overline{Y}D)P=-f_1$을 sparse 行列방법을 이용하여 계산한다.

⑤ $\|P\|$, $\|e_{T1}\|$ 계산

⑥ $\|P\|<\varepsilon\|e_{T1}\|$ 이면 出口

⑦ ⑥이 아니면 골든섹숀 탐색으로 최적치 t_k를 구함

⑧ $e_{T2}=e_{T1}+t_kP$

$V_2=De_{T2}+E$

$Y(V_2)$, $Y(V_2)$, $I_{DN}(V_2)$

$f_2=D^t[Y(V_2)V_2-I-I_{DN}(V_2)]$ 계산

⑨ $\|f_2\|$ 계산

⑩ $\|f_2\|>\|f_2\|$ 이면 ⑦로 간다.

⑪ ⑩이 아니면 $e_{T1}=e_{T2}$, $f_1=f_2$토 놓고 ③으로 간다.

여기서 $I_{DN}(V)$는 그림 4에 표시한 종속 전류원이다. 회로해석 방법은 ① 閉路(mesh) 解析 ② 節點解析 ③ 基本閉路(fandamentalcricuit) 解析 ④ 컷셋解析 ⑤ 混合解析 ⑥ 狀態變數解析이 있는데 이중 나무(tree)를 이용하여 풀 수 있는 것이 ③④⑤⑥이다. 混合解析은 임피던스回路網에 대해서는 基本閉路解析法에 의해 어드미턴스 回路網에 대해서는 컷셋解析法에 의해 가지전류와 가지전압을 구하고 狀態變數에 의한 解析도 基本閉路와 컷셋해석을 이용하여 구하므로 節點解析보다 컷셋解析이 융통성이 있다.

3 프로그래밍

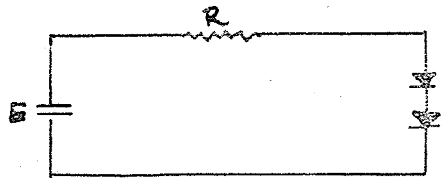

Fig. 3. Nonlinear resistive network with diodes.

이상의 算法을 그림 3과 같은 샘플回路網을

TABLE 1

Tree Branch Voltage		Error	ITN
−0.6484E 00	−0.4263E 00	0.7059E 00	1
−0.7713E 00	−0.4782E 00	0.1010E 00	1
−0.7940E 00	−0.4772E 00	0.2712E−01	1
−0.7938E 00	−0.4676E 00	0.1389E−01	1
−0.7900E 00	−0.3966E 00	0.1206E−01	1
−0.7936E 00	−0.3979E 00	0.2336E−02	1
−0.7937E 00	−0.3970E 00	0.2161E−03	1
−0.7938E 00	−0.3969E 00	0.4373E−04	1
−0.7938E 00	−0.3969E 00	0.4337E−06	1

TABLE 2

Tree Branch Voltage		Error	ITN
−0.7260E 00	−0.3950E 00	0.3085E 00	1
−0.7864E 00	−0.4139E 00	0.4060E 00	1
−0.7931E 00	−0.4101E 00	0.6376E−02	1
−0.7938E 00	−0.4058E 00	0.2345E−02	1
−0.7938E 00	−0.4028E 00	0.1405E−02	1
−0.7938E 00	−0.4008E 00	0.9127E−02	1
−0.7938E 00	−0.4008E 00	0.9127E−03	1
−0.7938E 00	−0.3994E 00	0.5998E−03	1

예를 들어 프로그래밍 한결과 표 1과 표 2와 같은 결과를 얻었다. 표 1은 Broyden 방법을 이용한 컷셋해석결과이고, 표 2는 sparse 行列을 이용한 컷셋해석결과이다.

4 결 론

(1) Broyden 방법에 의한 컷셋解析方法과 프로그래밍을 제공하고, 골든 섹숀 탐색의 프로 그래밍을 제공했다.

(2) 컷셋解析이 융통성이 있으므로 混合解析이나 狀態變數에 의한 解法에도 적용할 수 있다.

(3) 非線形素子의 線形모델의 프로그래밍을 논했다.

參 考 文 獻

1. koo & magnisson, computer orienteel circuit Design, prentice-Hall, June. 1969.
2. F. H. Branin, Jr, and H. H. Wang, A Fast Reliable Iteration method for dc Analysis of nonlinear networks, proc, of the IEEE. Vol. 55, No. 11, pp. 1819~1826, NOV. 1967. 3. W. J. McCalla, and D. O. pederson,