Bull. Korean Math. Soc.
Vol. 11, No. 2, 1974

시린다圈에 關하여

任 昌 求

1. 序 言

J.R. Isbell 教授는 圈 (category)의 正規完備化에 對한 理論을 硏究함에 있어서 雙(couple)圈과 시린다(cylinder)圈을 導入하고 그들에 對한 性質을 論하였다[2]. 著者는 雙圈과 시린다圈과의 關係를 [6]에서 論하였었다. 本篇의 目的은 시린다圈의 例를 들고 任意의 圈을 시린다圈으로 埋藏(embedding)시킬 수 있음을 論하는데 있다.

2. 定義와 例

$\boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}$를 任意의 圈이라 하고 $\boldsymbol{S}$를 集合圈이라 하자. 또 圈의 對象들의 類를 $|\boldsymbol{C}|, |\boldsymbol{D}|, |\boldsymbol{S}|$와 같이 表示한다.

定義 1. 한쌍의 隨伴函手(adjoint functor)
$F: \boldsymbol{C} \longrightarrow \boldsymbol{D}, G: \boldsymbol{D} \longrightarrow \boldsymbol{C}$에 對하여
작$(X, Y, m=('m, m'))$을 (F, G)雙이라 한다. (但 $X \in |\boldsymbol{C}|$, $Y \in |\boldsymbol{D}|$, $'m: X \longrightarrow G(Y)$, $m': F(X) \longrightarrow Y$).

두개의 (F, G)—雙 (X, Y, m)과 (X_1, Y_1, m_1)에 對하여 $'\alpha: X \longrightarrow X_1$, $\alpha': Y \longrightarrow Y_1$이라 할 때 다음의 關係式

$$'m_1 \cdot '\alpha = G(\alpha') \cdot 'm \text{ 또는 } m_1' \cdot F('\alpha) = \alpha' \cdot m'$$

를 마족하면 작 $('\alpha, \alpha')$를 (F, G)—雙의 連接(conjoint) 變換이라 하고

$$('\alpha, \alpha'): (X, Y, m) \longrightarrow (X_1, Y_1, m_1)$$

으로 表示한다.

(F, G)雙을 對象으로 하고 그들 사이의 連接變換을 射(morphism)로 하는 圈을 (F, G)의 시린다圈이라 하고 $\boldsymbol{Cyl}\ (F, G)$로 表示한다. [2], [6].

例 1. Λ와 Γ를 單位元을 가진 環이라 하자 B를 左 Γ 加群이고 同時에 右 Λ 加群이라 하고 또 ${}_\Lambda\boldsymbol{C}, {}_\Gamma\boldsymbol{C}$를 各各 左 Λ 加群의 圈, 左 Γ 加群의 圈이라 하자. $|{}_\Lambda\boldsymbol{C}|$의 任意의 對象 A와 右 Λ 加群B와의 텐서 $A \otimes B$를 다음과 같이 左 Γ 加群의 構造를 갖도록 할 수 있다. 즉

$\gamma \in \Gamma$, $a \otimes b \in A \otimes B$에 對하여

$$\gamma(a \otimes b) = a \otimes rb.$$

이리하여 다음 函手를 얻는다.

$$\begin{array}{rcl} F: {}_\Lambda\boldsymbol{C} & \longrightarrow & {}_\Gamma\boldsymbol{C} \\ \Cup & & \Cup \\ A & \longrightarrow & A\underset{\Lambda}{\otimes}B. \end{array}$$

한편 $|{}_\Gamma\boldsymbol{C}|$의 任意의 對象 C와 B에 對하여 可換群 Hom ${}_\Gamma(B,C)$를 다음과 같이 左 Λ 加群의 構造를 갖게할 수 있다. 즉 $f\in \mathrm{Hom}_\Gamma(B,C)$와 $\lambda\in\Lambda$, $x\in B$에 對하여 $(\lambda f)(x)=f(x\lambda)$.

$$\text{函手}\quad \begin{array}{rcl} G: {}_\Gamma\boldsymbol{C} & \longrightarrow & {}_\Lambda\boldsymbol{C} \\ \Cup & & \Cup \\ C & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_\Gamma(B,C) \end{array}$$

를 얻는다. [3]

그런데,

$$\begin{array}{rcl} \eta: \mathrm{Hom}_\Gamma(A\otimes B,C) & \cong & \mathrm{Hom}(A,\mathrm{Hom}_\Gamma(B,C)) \\ \Cup & & \Cup \\ 't & \longrightarrow & \eta('t)=t', \end{array}$$

但 $[t'(a)](b)='t(a\otimes b)$, $a\in A$, $b\in B$. [4] 따라서 F,G는 隨伴函手이다.

이 隨伴函手 F,G에 對한 (F,G) 雙은 $(A,C,t=('t,t'))$, $A\in|{}_\Lambda\boldsymbol{C}|$, $C\in|{}_\Gamma\boldsymbol{C}|$이고 ${}_\Lambda\boldsymbol{C}$에서의 射 $m:A\longrightarrow A_1$과 ${}_\Gamma\boldsymbol{C}$에서의 射 $n:C\longrightarrow C_1$에 대한 連接變換은

$$(m,n):(A,C,t=('t,t')) \longrightarrow (A_1,C_1,t_1=('t_1,t_1')),$$

但 $A\xrightarrow{m}A_1\xrightarrow{t_1'}\mathrm{Hom}_\Gamma(B,C_1)=A\xrightarrow{t'}\mathrm{Hom}_\Gamma(B,C)\longrightarrow\mathrm{Hom}_\Gamma(B,C_1)$.

이 (F,G) 雙을 對象으로 하고 이連接變換 (m,n)을 射로 하면 $\boldsymbol{Cyl}(F,G)$를 얻는다.

例 2. B를 $|\boldsymbol{S}|$의 一定한 對象이라 하고 다음과 같이 두개의 共變函手

$$\begin{array}{rcl} F: \boldsymbol{S} & \longrightarrow & \boldsymbol{S} \\ \Cup & & \Cup \\ A & \longrightarrow & A\times B, \end{array} \qquad \begin{array}{rcl} G: \boldsymbol{S} & \longrightarrow & \boldsymbol{S} \\ \Cup & & \Cup \\ C & \longrightarrow & \mathrm{Hom}_S(B,C) \end{array}$$

를 定한다. 이때

$$\begin{array}{rcl} \phi: \mathrm{Hom}_S(A\times B,C) & \cong & \mathrm{Hom}_S(A,\ \mathrm{Hom}_S(B,C)) \\ \Cup & & \Cup \\ f & \longrightarrow & \phi(f), \end{array}$$

但 $[\phi(f)(a)](b)=f(a,b)$, $a\in A$, $b\in B$, 이고 $\boldsymbol{S}$는 集合圈.

따라서 F와 G는 한쌍의 隨伴函手이고 이때 $\boldsymbol{Cyl}(F,G)$의 對象 (F,G) 雙은 $(A,C,t=('t,t'))$, $'t:A\longrightarrow\mathrm{Hom}_S(B,C)$, $t':A\times B\longrightarrow C$이고 射 $m:A\longrightarrow A_1$, $n:C\longrightarrow C_1$에 대한 連接變換 $(m,n):(A,C,t=('t,t'))\longrightarrow(A_1,C_1,t_1=('t_1,t_1'))$,

但 $A\xrightarrow{m}A_1\xrightarrow{t_1'}\mathrm{Hom}_S(B,C_1)=A\longrightarrow\mathrm{Hom}_S(B,C)\longrightarrow\mathrm{Hom}_S(B,C_1)$이다.

3. 시린다圈

圈 $\boldsymbol{C}$를 有限個의 對象들의 集合이 항상 積을 갖는다고 하자. 이때 (A, m)을 $\boldsymbol{C}$의 M-對象 (M-object)이라고 한다. 但 $m: A\times A\longrightarrow A$, $(C\in|\boldsymbol{C}|)$. $\boldsymbol{C}$에서 射 $g: A\longrightarrow A'$에 대하여 $m'(g\times g)=gm: A\times A\longrightarrow A'$, 즉

$$\begin{tikzcd} A\times A \arrow[r, "m"] \arrow[d, "g\times g"'] & A \arrow[d, "g"] \\ A'\times A' \arrow[r, "'m"] & A' \end{tikzcd} \qquad (\text{可換})$$

일 때 $(g, m, m'): (A, m)\longrightarrow(A', m')$를 m과 m'에 대한 原始寫像(primitive map)이라고 한다. $\boldsymbol{C}$의 M-對象을 對象으로 하고 原始寫像을 射로하는 圈을 $\boldsymbol{C}$의 原始圈이라 한다. [5]

定義 2. 圈 $\boldsymbol{C}$가 모든 圈의 原始圈에 充滿埋藏(fully embedding)되면 $\boldsymbol{C}$을 有界圈 (boundable category)일라 한다. [2]

定義 3. 圈 $\boldsymbol{C}$의 部分圈 $\boldsymbol{B}$는 $\boldsymbol{C}$에서 相異한 한쌍의 射 $f, g: X\longrightarrow Y$에 對하여 $hf\neq hg$와 같이되는 $h: Y\longrightarrow Z$가 존재하고 Z가 $\boldsymbol{B}$에 存在할 때 $\boldsymbol{B}$를 分離(seperating)部分圈이라 한다. 雙對的으로 餘分離(coseperating)部分圈이 定義된다. [1].

시린다圈에 對하여 다음 事實이 알려져 있다. 즉 $F: \boldsymbol{A}\longrightarrow\boldsymbol{B}$, $G: \boldsymbol{B}\longrightarrow\boldsymbol{A}$를 有界圈사이의 隨伴函手이고 $\boldsymbol{A}$가 小餘分離部分圈을 가질 때 $\boldsymbol{Cyl}(F, G)$는 有界이다. [2]

圈 $\boldsymbol{C}$에서 $\boldsymbol{D}$로의 共變函手를 H라 하고 K를 $\boldsymbol{D}$에서 $\boldsymbol{C}$로의 共變函手라 한다. 但 $G\cdot H=I$(恒等函手).

이때 $X\in|\boldsymbol{C}|$에 대하여

Hom $(F(X),\ F(X))\cong$Hom $(X, G\cdot F(X))=$Hom(X, X)이므로

$(X, F(X), m=(F(\xi), \xi))\in\boldsymbol{Cyl}(F, G)$, $\xi\in$Hom(X, X). X에 $(X, F(X), m=(F(\xi), \xi))$를 對應시키는 것을 ϕ라하면 ϕ는 埋藏函手가 된다. 이라하여 다음 結果를 얻는다.

定理: 任意의 圈 $\boldsymbol{C}$는 시린다圈 $\boldsymbol{Cyl}(F, G)$로 充滿埋藏된다. 但 $:\boldsymbol{C}\longrightarrow\boldsymbol{D}$, $G: \boldsymbol{D}\longrightarrow\boldsymbol{C}$, $G\cdot F=I$.

References

[1] J. R. Isbell, *Structure of categories*, Bull. Amer. Math Soc. **72**(1960), 619-655.

[2] ______, *Normal completions*, Lecture note **47**, Springer (1967).

[3] I. Bucur and A. Deleanu. *Categories and functors*, Wiley New York (1968).

[4] S. MacLane and G. Birkoff, *Âlgebra*, Macmillan New York (1968).

[5] B. Eckmann and P. J. Hilton, *Grou-like structure in general categories* Ⅲ, (1963), 165-187.

[6] 任昌求, *Couple category*에 關하여, Bull. Korean Math. Soc., **9** (1972), 101-109.

仁荷大學校