韓國數學敎育學會誌〈數學敎育〉
1974. 6. Vol. XII No. 2

Journal of the Korea Society of Mathematical Education
June 1974. Vol. XII No. 2

Matroid와 Graph에 대하여

金 年 植

1. 먼저 사용할 용어를 정의하고 digraph Γ(N)과 N위에서의 matroid M(N)이 주어졌을 때 여기에서 유도되는 새로운 matroid에 대하여 생각하기로 한다. 용어 사용은 F. Harary [1]에 따라 사용했고 Brualdi[4], F. Harary [5]를 참고로 사용했다.

Graph G는 pair (V(G), E(G))로 정의한다。 여기에서 V(G)는 element (vertex라고 부른다.)들의 공아닌 유한집합이고 E(G)는 V(G)의 element들의 순서없는 짝(edge라고 부른다.)으로된 유한 family이다.

Graph의 모든 circuit가 짝수개의 edge로 되어 있을 경우 그 graph를 bipartite graph라고 부른다. circuit를 포함하고 있지 않는 graph를 forest라고 부르고 그 forest가 graph G의 모든 vertex를 포함하고 있을 때에는 G의 spanning forest라고 부른다.

digraph Γ(N)은 (V(Γ), A(Γ))로 정의된다. 여기에서 V(Γ)=N는 vertex로 된 공아닌 유한집합이고 A(Γ)는 arc라고 하는 N의 원소로 된 순서쌍의 유한집합족이다. N와 A(Γ)를 각각 vertex set, arc-family라고 부르기로 한다. Γ가 digraph일 때 arc들의 순서를 제외하고 만들어진 graph를 Γ의 underlying graph라고 한다. digraph Γ의 두 vertex v,w가 adjacent라는 것은 A(Γ)안에 arc (v,w)나 (w,v)가 존재할 때이고 이때 vertex v와 w는 그와 같은 arc들과 incident가 된다고 한다.

digraph Γ에서의 arc-sequence란 순서쌍(v_0, v_1), (v_1, v_2), ……, (v_{m-1}, v_m)의 arc들로 된 유한 sequence를 말한다. 이러한 sequence를 $v_0 \to v_1 \to \cdots \to v_m$와 같이 표시하기로 한다. 특히 이때 모든 vertex가 다르다면 path라고 부르고 $P=(v_0, v_1, \cdots\cdots, v_m)$로 나타내기로 한다. 특히 P=(v)는 퇴화한 path로 생각한다. 위의 path $P=(v_0, v_1, \cdots\cdots, v_m)$의 initial vertex는 v_0이고 InP로나타나며 path P의 terminal vertex는 v_m이고 TerP로 나타낸다. path P의 모든 vertex의 집합을 $V(P)=\{v_0, v_1, \cdots\cdots, v_m\}$로 나타낸다. **P**가 diagraph D에서의 path들의 family이면 In**P**= {InP|P∈**P**}, Ter**P**= {TerP|P∈**P**}, V(**P**) = {V(P)|P∈**P**}라고 표시한다. 공통인 vertex v를 가진 두 path P, Q가 주어졌을 때 P.v.Q로 표시된 path는 v까지는 P와 공통이고 v부터는 Q와 공통인 path를 나타낸다. path Q가 path P의 subpath라는 것은 어떤 path P′, P″에 대하여 P=P′.v.Q.w.P″로 표시될 때를 말한다. 여기에서 v=InQ ω=TerQ이다. path들의 family **P**가 pairwise-vertex-disjoint(p.v.d.)라 함은 **P**안에 있는 모든 path $P_i \neq P_j$에 대하여 $V(P_i) \cap V(P_j) = \phi$일 때이다. vertex의 set A가 vertex의 set B와 digraph D안에서 linked가 된다는 것은 In**P**=A, Ter **P**=B인 path들의 pairwise-vertex-disjoint family **P**가 존재할 때를 말한다.

2. 먼저 base에 의한 Matroid의 정의부터 시작하자.

E가 non-empty finite set이고 β가 E의 subset들의 non-empty family(이 때의 원소를 base라고 부른다.)일 때 matroid M이란 다음 성질(βi), (βii)를 만족하는 쌍(E,β)를 말한다.

(βi) 어떠한 base도 다른 base를 proper subset로 갖지 않는다.

(βii) B_1, B_2가 base이고 e가 B_1의 원소일 때 $(B_1-\{e\})\cup\{f\}$가 base가 되는 B_2의 원소 f가 존재한다.

(exchange property 라고한다.)

위의 성질 (βii)를 계속 사용하면 matroid M의 임의의 두 base는 같은 갯수의 원소를 갖임을 알 수 있다. 이 때의 수를 matroid M의 rank라고 한다.

graph G가 주어졌을 때 G에 대한 Matroid를 생각할 수 있다. 곧 graph G의 모든 edge들의 집합을 E라 하고, G의 spanning forest의 edge들의 집합을 base로 하는 모든 집합족을 β로 한 Matroid $M=(E,\beta)$를 graph G의 circuit matroid 라고 부르고 M(G)로 나타낸다. matroid $M=(E,\beta)$에서 E의 부분집합을 independent라고 부르는 것은 그 부분집합이 M의 어떤 base속에 속할 때를 말한다. 결국 M의 base는 바로 maximal independent set가 된다. 따라서 임의의 matroid는 그 matroid의 independent set를 밝힘으로서 일의적으로 결정될 수 있다. graph인 경우에는 graphG에 대한 circuit matroid M(G)의 independent set는 어떠한 circuit도 포함하지 않는 G의 edge들의 집합은 뜻한다. matroid가 그 independent set를 모두 밝혀 놓으면 완전히 결정되므로 independent set로 정의되는 matroid를 생각할 수 있다.

E가 non-empty finite set이고 I가 E의 부분집합들의 non-empty collection (이 때의 원소를 independent set 라고 부른다.)일 때 matroid M이란 다음 성질을 만족하는 쌍(E,I)을 말한다.

(Ii) independent set의 부분집합은 independent set이다.

(Iii) I가 k개의 원소를 J가 k+1개의 원소를 가진 두 independent set가 주어졌을 때 $I\cup\{e\}$가 independent set가 되는 I에 속하지 않는 J안의 원소 e가 존재한다.

지금 정의한 independent에 의한 matroid와 위에서 정의한 base에 의한 matroid는 동치임을 밝힐 수 있다. 이때의 base는 maximal independent set가 된다. 따라서 혼동이 없을 때에는 base나 independent set를 나타내지 않는 M(E)를 사용하여 matroid를 나타낸다.

$M=(E,I)$가 independent set에 의하여 정의된 matroid일 때 E의 subset을 dependent라고 하는 것은 그 subset가 independent가 아닐때를 말한다. 특히 minimal dependent set를 M의 circuit 라고 한다.

A가 E의 subset일 때 A에 포함된 최대의 independent set의 크기를 A의 rank 라고 부르고 r(A)로 나타낸다. E위에서의 matroid independent set가 E의 모든 부분집합으로 되어있을 때 free matroid라고 한다.

3. 다음의 보조정리를 증명없이 사용한다. 자세한 증명은 Perfect의 (3)을 보기로 한다.

보조정리 1

$\Gamma(N)$을 digraph라 하자. 단, $N=X\cup Y$, $X\cap Y=\phi$, $E(\Gamma)\subseteq X\times Y$이다.

M(Y)가 Y에 관한 matroid일 때 Y의 부분집합과 Γ에서 linked가 되는 X의 부분집합 전체의 집합족은 X위의 어떤 matroid M(X)의 independent set의 전체와 같다.

이 보조정리를 사용하면 다음 보조정리를 얻는다.

보조정리 2

$\Gamma(N)$는 모든 vertex들인 N위에서의 digraph이고 $\mathbf{P}$와 $\mathbf{Q}$는 Γ에서의 pairwise-vertex-disjoint path 들의 family이다. 단, Ter$\mathbf{P}$와 Ter$\mathbf{Q}$는 Ter$\mathbf{P}\cup$Ter$\mathbf{Q}$위의 어떤 matroid에서의 independent set 이다. 이때 다음을 만족하는 Γ에서의 pairwise-vertex-disjoint path 들의 family $\mathbf{R}$이 존재한다.

(a) $\mathrm{In}\mathbf{P} \subseteq \mathrm{In}\mathbf{R} \subseteq \mathrm{In}\mathbf{P} \cup \mathrm{In}\mathbf{Q}$

(b) $\mathrm{Ter}\mathbf{R} \subseteq \mathrm{Ter}\mathbf{P} \cup \mathrm{Ter}\mathbf{Q}$

(c) $r(\mathrm{Ter}\mathbf{Q}) \leq r(\mathrm{Ter}\mathbf{R})$이고 $\mathrm{Ter}\mathbf{R}$은 $\mathrm{Ter}\mathbf{P} \cup \mathrm{Ter}\mathbf{Q}$에서 independent 이다.

이 정리의 증명은 $\mathbf{P}$와 $\mathbf{Q}$에서 bipartite graph를 만든 후에 보조정리 1를 사용하여 $\mathbf{R}$을 만든다.

증명.

C를 $\mathbf{P}$와 $\mathbf{Q}$에 공통인 Γ의 모든 vertex 들의 집합이라고 하자. 일반성을 잃지 않고 $\mathbf{P} \cup \mathbf{Q}$ 안에 있는 모든 path는 적어도 두 vertex를 가지며 $C \cap (\mathrm{In}\mathbf{P} \cup \mathrm{In}\mathbf{Q}) = \phi = C \cap (\mathrm{Ter}\mathbf{P} \cup \mathrm{Ter}\mathbf{Q})$임을 가정할 수 있다. 왜냐하면 이것은 Γ대신 새로운 vertex와 arc를 첨부해서 Γ'을 만든면 되기 때문이다. 곧 $\mathrm{In}\mathbf{P} \cup \mathrm{In}\mathbf{Q}$ 안에 있는 모든 vertex v에 $(v', v) \in E(\Gamma')$가 되는 새로운 vertex v'과 arc (v', v)를 Γ에 더한다. 같은 방법을 $\mathrm{Ter}\mathbf{P} \cup \mathrm{Ter}\mathbf{Q}$에도 적용한다. 이렇게 하여 Γ에 새로운 vertex와 arc 들을 모두 더한 digraph Γ'이 만들어지게 된다. 이러한 새로운 vertex 들이 $\mathbf{P}$와 $\mathbf{Q}$의 각각 initial vertex와 terminal vertex가 되도록 할 수 있고 정리의 내용에 변화를 주지 않기 때문에 위의 가정은 타당하다.

이제 bipartite graph를 만들기 위하여 Γ 안의 path P의 subpath 들을 보자. 단 이 subpath 들의 initial vertex와 terminal vertex는 $C \cup \mathrm{In}\mathbf{P} \cup \mathrm{Ter}\mathbf{Q}$ 안에 있어야 하고 그 외의 다른 vertex 들은 $C \cup \mathrm{In}\mathbf{P} \cup \mathrm{Ter}\mathbf{Q}$ 안에 없는 것들을 생각하자. 이러한 모든 subpath 들의 집합을 $\sum(\mathbf{P})$로 나타내기로 하자. 다시 말하면 $\sum(\mathbf{P})$는 initial vertex와 terminal vertex를 더 붙쳐서 만들어진 subpath 들의 family가 된다. 이와 같은 방법을 $\mathbf{Q}$에 대하여 적용하여 $\sum(\mathbf{Q})$를 만들자. (Brualdi [4]를 참조)이것을 사용하여 bipartite graph G를 다음과 같이 만든다.

$\mathrm{In}\mathbf{P}$와 $\mathrm{In}\mathbf{Q}$에 각각 대등인 집합 I'_p과 I'_q을 가진, $\mathrm{In}\mathbf{P} \cup \mathrm{In}\mathbf{Q}$에 대등인 집합을 $I' = I'_p \cup I'_q$라고 하자. 또 $\mathrm{Ter}\mathbf{P}$와 $\mathrm{Ter}\mathbf{Q}$에 각각 대등인 집합 T''_p와 T''_q을 가진, $\mathrm{Ter}\mathbf{P} \cup \mathrm{Ter}\mathbf{Q}$에 대등인 집합을 $T'' = T''_p \cup T''_q$라고 하자. C', C''는 C에 대등인 disjoint set들 이라고 하자. 이때 graph G의 vertex 들의 전체집합을 $V(G) = I' \cup C' \cup T'' \cup C''$라고 하여 G의 edge 들의 집합 $E(G)$는 $E_p = \{((\mathrm{In}\sigma)', (\mathrm{Ter}\sigma)'') \mid \sigma \in \sum(\mathbf{P})\}$, $E_q = \{((\mathrm{In}\sigma)', (\mathrm{Ter}\sigma)'') \mid \sigma \in \sum\mathbf{Q})\}$로서 주어진 $E_p \cup E_q$로 정의하면 이 G가 구하려고 했던 bipartite graph 이다. 여기에서 E_p는 $\mathrm{In}E_p = I_p' \cup C'$이고 $\mathrm{Ter}E_p = T_p'' \cup C''$인 G 안에서의 pairwise-vertex-disjoint path 들의 family 임을 알 수 있다. E_q에 대해서도 같다.

이제 $T'' \cup C''$ 위에서의 matroid를, C'' 위에서의 free matroid와 $\mathrm{Ter}\mathbf{P} \cup \mathrm{Ter}\mathbf{Q}$와 T'' 사이에서 이루워진 bijection ('')에 따라 $\mathrm{Ter}\mathbf{P} \cup \mathrm{Ter}\mathbf{Q}$ 위에서의 matroid에서 유도된 T'' 위에서의 matroid의 합으로 정의해 두자. 그러면 $I_p' \cup C'$과 $I'_q \cup C'$은 $I' \cup C'$ 위에 G로서 유도된 matroid에서의 independent set 이므로 보조정리 1에 따라 $T'' \cup C''$ 위의 matroid에서의 independent set이 된다. 따라서 $I_p' \cup C'$을 G 안에서의 pairwise-vertex-disjoint path 들의 family인 S_G로서 independent set $T_0'' \cup C''$에 linked한 basis $I'_0 \cup C'$까지 확장할 수 있다.

Γ 안의 path 들의 family$\mathbf{R}$을 S_G의 전체 member 들의 집합이라고 하자. S는 $\sigma \in S \leftrightarrow ((\mathrm{In}\sigma)', (\mathrm{Ter}\sigma)') \in S_G$로서 정의된 $\sum(\mathbf{P}) \cup \sum(\mathbf{Q})$의 부분집합이라고 하자.

σ_1, σ_2를 S 안의 서로 다른 path 들이고 v가 공통인 vertex라고 가정하자. $\sum(\mathbf{P})$, $\sum(\mathbf{Q})$의 선택에 따라 v는 σ_1이나 σ_2의 initial vertex나 terminal vertex로 정할 수 있다.

S_G가 G 안에서의 linking 이므로 v'과 v''이 $V(S_G)$ 안에 기껏해서 한번 정도 나타날 수 있다. 따라서 v는 기껏해서 σ_1이나 σ_2의 한 쪽의 initial vertex가 될 수가 있고 다른 한쪽의 terminal vertex가 될 수가 있다.

결국 path 들의 집합 S를 subpath로 하고 S의 모든 member를 포함한 Γ 안에서의 pairwise-vertex-disjoint 의 family로 바꿀 수 있음을 알 수 있다. 이러한 **R**은 (a), (b), (c)를 만족한다.

(a) $\mathrm{In}\mathbf{P}\cap C=\phi$ 이고 G 안에서의 S_G의 선택 때문에 $\mathrm{In}\mathbf{P}\subset\mathrm{In}\mathbf{R}$. 또 $v\in\mathrm{In}\mathbf{P}\cup\mathrm{In}\mathbf{Q}$ 이면 $v'\in C'$ 이고 $v''\in C''$ 이므로 $x\in\mathrm{In}\mathbf{R}$

$\therefore \mathrm{In}\mathbf{R}\subseteq\mathrm{In}\mathbf{P}\cup\mathrm{In}\mathbf{Q}$

(b) (a)와 같은 이유로 $\mathrm{Ter}\mathbf{R}\subseteq\mathrm{Ter}\mathbf{P}\cup\mathrm{Ter}\mathbf{Q}$.

(c) $I_0'\cup C'$ 은 $I'\cup C'$ 위의 induced matroid 의 basis 이고 그의 rank는 적어도 $|T''_q\cap C''|$와 같기 때문에 $r(\mathrm{Ter}\mathbf{R})=|I_0'|\geqq|T''_q|=r(\mathrm{Ter}\mathbf{Q})$ $\therefore$ $r(\mathrm{Ter}\mathbf{R})\geq r(\mathrm{Ter}\mathbf{Q})$ 또 $(\mathrm{Ter}\mathbf{R})''$ 이 T'' 위의 matroid 에서의 independent set 이므로 $\mathrm{Ter}\mathbf{R}$ 도 $\mathrm{Ter}\mathbf{P}\cup\mathrm{Ter}\mathbf{Q}$ 에서의 independent set 이다.

주정리

$M_0(N)$가 N 위의 matroid 이고 $\Gamma(N)$이 N에서의 digraph 이다. 이때 다음과 같이 N위에 유도된 새로운 matroid $M(N)$을 만들 수 있다. 곧 A가 $M(N)$에서 independent 라고 하는 것은 P 안에서의 pairwise-vertex-disjoint path 들의 어떤 family 의 terminal vertex 들이 $M_0(N)$에서의 independent set 가 되고 initial vertex 들이 A가 되는 경우이다.

증명

Independent set 들에 대하여 exchange property 가 성립함을 밝히면 된다. $|B|>|A|$인 $M(N)$에서의 independent set을 A, B 라고 하자. 이때 $\mathrm{In}\mathbf{P}=A$, $\mathrm{Ter}\mathbf{P}=T_a$:independent in $M_0(N)$,

$\mathrm{In}\mathbf{Q}=B$, $\mathrm{Ter}\mathbf{Q}=T_b$:independent in $M_0(N)$

인 pairwise- vertex-disjoint path 들의 family 인 **P, Q**가 존재한다. 보조정리 2에 따라 다음 조건을 만족하는 Γ 안에 pairwise-vertex-disjoint path 들의 family **R**이 존재한다. 곧

(a) $A\subseteq\mathrm{In}\mathbf{R}\subseteq A\cup B$

(b) $\mathrm{Ter}\mathbf{R}\subseteq T_a\cup T_b$

(c) $|T_b|=r(T_b)\leq r(\mathrm{Ter}\mathbf{R})=|\mathrm{Ter}\mathbf{R}|$

($\because$ $\mathrm{Ter}\mathbf{R}$ 은 $M_0(N)$에서 independent 이다.)

따라서 $|\mathrm{In}\mathbf{R}|=|\mathrm{Ter}\mathbf{R}|\geqq|T_b|=|B|>|A|$

그러므로 $A\cup\{b\}$가 $M(N)$에서 independent 가 되는 $b\in B-A$가 존재한다.

(Q. E. D.)

Reference

1. F. Harary, 'Graph theory' Addison-Wesley 1969
2. H. Whitney, 'On the abstract properties of linear dependence' Amer. J. Math. 57, pp. 509—533.
3. H. Perfect, 'Independence spaces and Combinational Problems', Proc.London Math.Soc. (3) 19, 1969, 17—30
4. B.A. Brualdi, 'Induced matroids' Proc. Amer.Math.Soc. 29, 2, 1971, 213—221
5. F. Harary, 'Matroids versus graphs' Springer-Verlay no. 110, 155—170

Abstract

Matroid theory, which was first introduced in 1935 by Whitney[2], is a branch of combinational mathematics which has some very much to the fore in the last few years. H. Whitney had just spent several years working in the field of graph theory, and had noticed several similarities between the ideas of independence and rank in graph theory and those of linear independence and dimension in the study of vector spaces. A matroid is essentially a set with some kind of 'independence structure' defined on it.

There are several known results concerning how matroids can be induced from given matroid by a digraph. The purpose of this note is to show that, given a matroid $M_0(N)$ and a digraph $\Gamma(N)$, then a new matroid $M(N)$ is induced, where $A\subseteq N$ is independent in $M(N)$ if and only if A is the set of initial vertices of a family of pairwise-vertex-disjoint paths with terminal vertices independent in $M_0(N)$.