韓國數學數育學會誌〈數學敎育〉
1974. 8. Vol. XIII No. 1

Journal of Korea Society of Mathematical Education
August 1974. Vol. XIII No. 1

有限單純群의 位數에 關해서

崔 德 熙

1. 槪 要

有限單純群의 特性을 硏究하는데 있어 그의 位數에 關한 問題는 매우 重要한 位置를 차지하고 있으며, 이에 對한 많은 論文이 發表되었다. 이제 有限單純群의 位數는 서로 다른 세 素數로 整除됨을 證明하고자 한다.

2. 豫備定理

〔豫備定理 1〕 G 는 Non-Cyclic Finite Simple Group 이라고 하자. p, r 은 서로 素이고,

$$s<p^a-1,\ (s, pr)=1,\ o(G)=p^a r^b s$$

라고 하고, G 의 Sylow $p-$SubGroup P 가 Cyclic 이라고 假定하면, $a\geqq 2$ 일 때 다음 條件을 滿足한다.

(a) $[N_G(P):C_G(P)]\neq p-1$,

(b) $p=3$,

(c) $p-1\nmid s$.

또 이 때 다음 條件을 滿足한다.

(i) $a=1$, $r=2$, G 는 $p=2^m\pm 1$, $p>3$ 인 PSL$(2, p)$, $p=2^m+1>3$ 인 PSL$(2, 2^m)$와 同型이다.

(ii) $a=2$, $p=3$, $r=2$, $G\cong$PSL$(2, 8)$.

〔豫備定理 2〕 $q=p^n>3$, P 는 素數에 對해서 $G\cong$PSL$(2, q)$라고 하자. $o(G)$는 세 素數로 整除된다면 G 는 다음 한 群과 同型이다.

(i) $p=2$, PSL$(2, 4)$, PSL$(2, 8)$,

(ii) $p>2$, PSL$(2, 5)$, PSL$(2, 7)$, PSL$(2, 9)$, PSL$(2, 17)$.

위 豫備定理들은 近來 Gorenstein, Walter, Thompson 等에 依해서 證明되였다. 여기서 使用한 標準記號 $C_G(T)$, $N_G(T)$, $o(T)$는 G 의 部分集合 T 에 對해서 各各 Centralizer, Normalizer, T 의 要素의 數를 表示하고, a, b 는 整數, (a, b)는 a, b 의 GCD 를 意味한다.

3. 基本定理

〔定理 1〕 G 를 Non-Cyclic Finite Simple Group 이라고 하자.

p, r, u 는 서로 다른 素數, $p^a>r^b>u^c$ 에 對해서

$$o(G)=p^a r^b u^c$$

이면 다음이 成立한다.

(A) G 의 Sylow 2-Subgroup 이 Abelian 이면 G 는 PSL$(2, 5)$, PSL$(2, 8)$과 同型이다.

(B) G 의 Sylow 2-Subgroup 이 Dihedral 이면 G 는 PSL$(2, 5)$, PSL$(2, 7)$, PSL$(2, 9)$, PSL$(2, 17)$의 하나와 同型이다.

(C) G 가 Minimal Simple Group 이면 G 는 PSL$(2, 5)$, PSL$(2, 7)$, PSL$(2, 8)$, PSL$(2, 17)$, PSL$(3, 3)$의 하나와 同型이다. 特히 $o(G)$는 3 으로 整除된다.

〔證 明〕 (A) G 의 Sylow 2-Subgroup은

Abelian 이므로 G는 PSL(2,4)와 同型이거나, Ree型의 Group과 同型이다.

G가 PSL(2,4)와 同型인 境遇는 〔豫備定理 1〕에 依해서 G는 PSL(2,5), PSL(2,8)과 同型이다.

이제 Ree型의 Group과 同型인 境遇는, 素數 3의 倍數인 Ree型의 Group이 存在치 않음을 밝히므로써 證明을 마치고자 한다.

그런데 Ree型의 Group의 位數는

$$3^{3n}(3^{3n}+1)(3^n-1),\quad n=2m+1,\quad m\geqq 1$$

의 形態이다. $(3^{3n}+1,\ 3^n-1)=2$이므로 方程式

$$3^{3n}+1=2^x,\quad 3^n-1=2^y$$

는 x, y의 整數解가 存在치 않음을 밝히므로써 解決된다. 그런데 이제 方程式

$$3^a-2^b=\varepsilon,\quad \varepsilon=\pm 1$$

은 $a\geqq 3$인 解가 存在치 않다. 따라서 證明完了되였다.

(B) G의 Sylow 2-Subgroup이 Dihedral Group이므로 G는 PSL$(2,q)$와 同型이다. q는 奇數이다.

따라서 〔豫備定理 2〕에 依해서 證明이 完了된다.

(C) G는 Minimal Simple Group이므로 G는 다음 한 群과 同型이다.

(a) PSL$(2,p)$, $p>3$이고 素數, $p^2\equiv 1 \pmod 5$,

(b) PSL$(2,3^q)$, q는 素數,

(c) PSL$(2,3^q)$, q는 素數,

(d) PSL(3,3),

(e) $S_z(q)$, $q=2^r$, r는 素數

그러므로 〔豫備定理 2〕에 依해서 Suzuki Group들은 세 素數로 整除되는 것이 없음을 밝히면 된다. Suzuki Group의 位數는

$$2^{2(2m+1)}(2^{2(2m+1)}+1)(2^{2m+1}-1);\quad m\geqq 1$$

인 形態이다. $(2^{2(2m+1}+1,\ 2^{2m+1}-1)=1$이므로 方程式

$$2^{2(2m+1)}+1=p^x$$

은 整數 x와 素數 p의 解가 없음을 밝히면 된다. 그런데 $x\geqq 2$이라면 $2(2m+1)=3$, 이것은 條件에 맞지 않는다. 또 $x=1$이라면 $2^{2(2m+1)}+1\equiv 0 \pmod 5$이므로 $p=5$. 亦是 모순이다.

그러므로 證明完了되였다.

〔定理 2〕 G를 Non-Cyclic Finite Simple Group이라고 하자. 서로 다른 素數 p, r, u; $p^a>r^b>u^c$에 對해서

$$o(G)=p^a r^b u^c$$

이라고 假定하면 다음이 成立한다.

(D) G의 Sylow p-SubGroup이 Cyclic이면 G는 PSL(2,5), PSL(2,8), PSL(2,17)의 하나와 同型이다.

(E) G의 Sylow r-SubGroup이 Cyclic이면 G는 PSL(2,8)과 同型이다.

그의 位數가 세 素數로 整除되는 다른 네 單純群은 PSL(2,9), PSL(3,3), $U_3(3)$, $U_4(2)$이다.

〔證明〕 (C) G의 Sylow p-SubGroup이 Cyclic이고, $p\fallingdotseq 2$, 또 r^b, u^c 中의 한 數가 奇數이다.

萬一 u^c가 奇數이면

$$u^c<p^a-1,\quad p-1\nmid u^c$$

〔豫備定理 1〕에 依해서 어떤 q에 對해서 $G\cong$ PSL$(2,q)$.

〔豫備定理 2〕에 依해서 G는 PSL(2,5), PSL(2,8), PSL(2,17)의 하나와 同型이다.

萬一 r^b이 奇數이면

〔豫備定理 1〕과 〔豫備定理 2〕에 依해서 그러한 群이 存在치 않다.

(D) G의 Sylow r-SubGroup이 Cyclic이라고 假定하자.

G는 單純하므로 $r\fallingdotseq 2$.

$u\fallingdotseq 2$라면 $u^c<r^b-1,\quad r-1\nmid u^c$

〔豫備定理 1〕과 〔豫備定理 2〕에 依해서

$G\cong$ PSL(2,7).

이제 $u=2$ 일 때는 $2^c<r^b-1$ 이라고 생각하고, $r=3$, $r-1\nmid 2^c$ 이라면,〔豫備定理 1〕과〔豫備定理 2〕에 依해서 그러한 群은 存在치 않다.

$r\neq 3$, $r-1|2^c$ 이라면, 〔定理 1〕-(C)에 依해서 $p=3$, $r=5$ 또는 $r=17$; $b\neq 1$.

이제 R을 G의 Sylow r-SubGroup, $q=[N_G(R):C_G(R)]$라고 하자.

$q\neq r-1$ 이라면 〔豫備定理 1〕과 〔豫備定理 2〕에 依해서 亦是 그러한 群은 存在치 않다。

그러므로 $q=r-1=2^\omega$, $\omega>0$ 라고하자.

이제 G의 Principal r-Block B는 $t=(r^b-1)/q$ Exceptional Characters $X_\lambda, \lambda=1, \cdots\cdots, t$ 와 q Non-Exceptional Characters $X_i, i=1, \cdots\cdots, q$ 를 품는다.

萬一 $x_i=X_i(1)$, $x_\lambda=X_\lambda(1)$ 이라면, 모든 λ 와 $x_i=v_ir^b+\varepsilon_i$; $i=1, \cdots\cdots, q$ 에 對해서

$x_\lambda=x_0=v_0r^b-\varepsilon_0q$, 여기서 $\varepsilon_i=\pm 1$, v_i 는 모든 j에 대해서 陰이 아닌 整數이다. 따라서

$$\sum_{i=0}^{q}\varepsilon_ix_i=0 \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

B는 G의 Principal Character를 包含하므로 적어도 한 x_j에 對해서 $p+x_j$ 또 한 $r+x_j$, 그러므로

$x_j|2^c$, $x_j<r^b-1$. 따라서 $x_j=x_0$, $x_0=r^b-q$ 또는 $x_0=q$.

그런데 $q=2^\omega\geqq 2$, $x_0\neq r^b-q$, 故로,

$$x_0=r-1=\begin{cases} 4, & r=5 \\ 16, & r=17. \end{cases}$$

이제 $X_1=1_G$ 라면

$$\varepsilon_0x_0+\varepsilon_1x_1=-(r-1)+1=-(r-2).$$

그러므로 (1)에 依해서 $i\neq 0$, 1인 x_i, 즉 $9\nmid x_2$ 를 萬足하는 $x_i=x_2$ 가 存在한다.

$x_2>r^b-1$, $2^c<r^b-1$ 이므로

$$x_2=3-2^d,\ c-1\leqq d\leqq c.$$

그런데 $x_2=v_2r\rightarrow r^b+\varepsilon_2$, v_2 는 奇數, $3\cdot 2^d<3\cdot r^b-1$ 에서

$$x_2=3\cdot 2^d=r^b+\varepsilon_2.$$

$\varepsilon_2=1$ 이면 $r=3k-1$, k는 偶數,

그러므로 b는 奇數, 그런데 어떤 陰이 아닌 整數 d에 對해서

$$r^b+1=3k(kd+b).$$

따라서 $kd+b=1$, $b=1$.

故로 假定에 모순된다.

이제 $\varepsilon_2=-1$ 이라면 b는 偶數, $b=2z$,

$$3\cdot 2^d=(r^z-1)(r^z+1),$$

$d=1$ 이면 $r^z-1=1$, $r^z+1=6$.

故로 모순이다.

$d>1$, $r^z\equiv -1 \pmod 4$ 이면

$$r^z-1=6,\ r^z=7$$

故로 모순이다.

$r^z\equiv 1 \pmod 4$ 이면

$$r^z+1=6,\ r^z=5,\ x_0=4.$$

따라서 (1)에 依해서 G는 群 PSL(2,5), PSL(2,7), PSL(2,9), $SP_4(3)$의 하나와 同型이다.

그런데 이들 群의 位數는 25의 倍數도 아니고, 假定에 모순된다。

$$2^c=r^b-1 \cdots\cdots\cdots\cdots (2)$$

인 境遇를 생각해 보자.

먼저 $b>1$ 이라면 (2)의 解는

$$r=3,\ b=2 \text{ 또 } o(G)=p^a\cdot 9\cdot 8.$$

그러므로 G의 Sylow 2-SubGroup은 Dihedral Group 이거나 Abelian Group 이다.

어느 境遇나 〔定理 1〕에 依해서 위 假定을 滿足하는 單純群은 없다.

마지막으로 $b=1$, $r=2^c+1$ 이라고 하자。

G는 Minimal Simple Group을 포함하므로 〔定理 1〕-(C)에 依해서

$$r=5 \text{ 또는 } r=17.$$

$r=5$ 이면 $o(G)=4\cdot 5\cdot p^a$.

〔定理 1〕-(B)에 依해서 이를 滿足하는 單純群은 存在치 않는다.

$r=17$ 이면 $o(G)=16\cdot 17\cdot p^a$.

G는 PSL(2,17)을 포함하므로 그의 Sylow 2-SubGroup은 Dihedral Group 이다. 亦是 이를 滿足하는 單純群은 存在치 않다. 그러므로 定理는 證明되였다.

参 考 文 獻

(1) M. Hall, The theory of groups, Macmillan, New York, 1959.

(2) 伊藤昇, 吉岡昭子, バーンサイド有限群論, 共立社, 東京, 1970.

(3) Gorenstein, D. and Walter, J. H., The characterization of finite groups with dihedral Sylow 2-subgroup, I, II, III, Journal of algebra 2(1965) p.85—151, p.218—270, p.334—393.

(4) M. Suzuki, On finite groups with cyclic Sylow subgroups for all odd primes, Journal of algebra 77(1955) p.657—691.

(5) Thompson, J. G., Non-solvable finite groups all of whose local subgroups are solvable, Bulletin of A. M. S., 74 (1968) p.383—437.

(6) Walter, J. H., The characterization of finite groups with abelian Sylow 2-subgroup, Annals of Math., 89(1969) p.405—514.

Dongguk university