韓國數學敎育學會誌<數學敎育>
1974. 8 Vol. XIII No. 1

Journal of the Korea Society of Mathematical Education
August 1974 Vol XIII. No. 1

數學的 槪念 形成에 必要한 槪念에 關하여

吳 炳 承

과거의 산수, 수학교육이 대개의 경우 수학적 발견의 최종산물만이 주어지고 있었기 때문에, 학습자에게 수학적 발견의 과정을 보여줄 수 없었다. 그렇기 때문에 수학적 사상은 가르칠 수 있었으나, 수학적 사고는 키울 수는 없었다. 학습에는 보통 습관학습 혹은 기계적 암기라고 불리우는 것과, 이해를 필요로 하는 학습 즉 지적학습이라고 불리우는 두 가지로 크게 나누어 볼 수 있겠다.

수학적 발견의 소산만을 제시하는 수학교육은 학습방법으로서는 일반적으로는 전자의 것일 수 밖에 없었다. 그러나 수학적 발견의 과정을 제시하는 즉, 수학적사고를 키운다는 목적하에서의 수학교육은, 전자의 것만이 아니고 후자의 학습방법이 주축을 이루어야 할 것이다. 이 후자의 학습방법에서는 개념구조의 형성에 관심을 가지지 않을 수가 없다. 그렇기 때문에 여기서는 수학적 개념형성에 대해서 살피되, 그 개념형성에 필요한 개념에 대해서 살펴 보려고 하는 것이다.

수학적 개념의 형성이라고 해서 여느 개념의 형성과 원칙적으로 다를 것이 없다. 그러므로 이 글에서는 일반적인 개념형성에 관한 심리학적 이론을 배경으로 논의를 절개하기로 한다.

결론적으로 말해서 수학적 개념형성에 필요한 개념이란 동치관계(同値關係)라는 것이다. 이 개념은 집합개념과 같이 근원적인 것이므로 수학교육에서 결코 소홀히 할 수 없는 것이다.

1. 유 별(類別)

(1) 동치(同値)

이것은 일상적 지능 활동과 수학 사이의 다리 구실을 하는 개념중의 하나이다. 동치라는 것을 수학적으로 정의하기 전에 일상적인 실례를 들어 보기로 한다. 「동치」라는 말은 「동일한 가치를 갖는다」 즉 특정한 목적에서 혹은 특정한 측면에서 같다라는 것을 의미하고 있다. 임의의 대상의 집합이 주어져 있을 때, 우리는 어떤 측면에서 그들을 동일시할 수 있는 것들로 구성된 부분집합으로 그 집합을 다시 분류할 수가 있다.

이를테면 {어떤 도료상의 페인트통}은 같은 색의 페인트통이라는 입장에서 부분집함으로 분류된다. 또 {국립도서관의 소설}은 작가별 소설의 부분집합으로 분류된다. 전체집합 속에 어떤 부분집합에도 속하지 않는 원소가 있다면, 그 분류법은 불안전한 것이 되고, 또 2개 이상의 부분집합에 함께 속하게 되는 원소가 있게 되면, 그 분류법은 애매하게 된다. 따라서 전체집합의 어떤 원소도 반드시 어느 한 부분집합만에 속하게 하지 않으면 안된다. 이것이 분류법이 완전한 것이 되기 위한 조건이다.

전체집합을 앞의 조건을 만족시키도록 부분 집합으로 나누는 일을, 그 전체집합의 **분할** 혹은 **유별**이라 하고 그들 개개의 부분집합을 **유**(類)라고 한다. 전체집합을 유로 분할하는 데는 2가지 방법이 있다.

하나는 **유**를 특징지우는 속성으로부터 출발하여 그에 따라 **유**를 구성하는 것이다.

집 합	유를 특징지우는 속성
{주머니 안에 있는 동전}	1원, 5원, 10원, 50원 100원
{페인트 통}	적, 청, 녹, 황…
{도서관의 소설}	이광수, 김동인, 오영수, …

여기서 이들 속성 그 자체도 어떤 공통성을 가지고 있다는데 주목하면, 그들 속에도 또 하나의 집합을 구성하게 되어 그들 속성을 특징지을 수 있는 속성을 또 발견할 수 있게 된다. 제1의 범례(範例)에서 각류의 속성은 화폐가치이고, 제2의 범례는 색이고, 제3의 범례는 작가이다.

그러나 항상 그렇게 되지는 않는다. 가령 종로 네거리에서 서울역으로 급히 가려고 할 때는 {통과하는 물체} 는 {택시} 와 {택시 아닌 것} 과 같이 동떨어진 두개의 유로 나누게 된다. 이 경우에는 각 유의 속성을 쉽게 발견할 수가 없다. 우리에게는 앞의 예와 같이 각유의 속성이 또 하나의 공통성을 갖고 있는 범례에 흥미가 있다.

또 하나의 방법은 특별한 대조규칙을 정하여 놓고, 그에 의해서 모든 대상을 같은 유에 속하게 함으로써 유별하는 것이다.

한 예로 어느 곤충학자가 {어떤 나라에서 잡은 나비}를 날개의 색이나 형태에 따라, 그들의 표본과 대조하여 분류하는 것이 이 두번째 방법이다. 나비의 그와 같은 각 **유**를 곤충학자는 각각 다른 종류로 보고 거기에 서로 다른 이름을 붙이게 된다. 이와 같은 방법은 새로운 사물에 접하게 되었을 때 자주 이용된다. 이러한 대조규칙이 만약 정확한 것이라면 그것은 **동치관계**라고 불리우는 것이 된다.

여기서 말하는 정확성이란 수학적 대상의 범위에서 달성되어지나 현실의 영역에서는 수학에서 처럼 쉽게 이루어질 수는 없는 것이다. 가령, 나무 막대의 길이를 직접 비교라는 대조를 통해서 분류하려고 한다고 하자. 이 경우 막대 A와 B가 5*mm* 이내의 차이 밖에 없을 때는 「같은 정도의 길이를 갖는다」라고 볼 수도 있을 것이다. 마찬가지로 B와 C, C와 D, ……가 같은 정도의 길이라고 볼 수 있다고 하자. 그러면 A와 J라는 두 막대는 45*mm*라는 차이를 갖게 될 수도 있을 것이다. 즉 「같은 정도의 길이를 갖는다」라는 관계는 추이적이 아니다.

이번에는 두 집합이 「1대 1 대응한다」라는 관계를 보자. 이 관계는 정확성을 가지고 있어서 하나의 동치관계이다.

앞의 나무 막대의 예로 되돌아가보자. 두 막대를 직접비교하는 것이 아니고 막대의 길이를 오차 5*mm* 이내로 측정하여, 그 측정치에 의해서 분류한다고 하면 그것은 분명히 추이성을 갖는다. 그러므로 이 경우도 동치관계가 된다。

동치관계는 추이성 이외에 반사성, 대칭 성이라는 두 속성을 더 갖고 있다. 그러나 그들에 관해서 여기서는 상세하게 논할 필요가 이 글의 목적하에서는 없다고 보겠다.

추이성의 중요성은 분류하여 얻어진 같은 유에 속하는 원소가 모두 동치관계에 의해서 맺어져 있다는데 있다. 더구나 그것은 제일의 방법으로 분할하든 제2의 방법에 의해서 분할 하든 관계 없이 그 중요성을 말할 수 있는 것이다. 분류를 제2의 방법에 의한다면 그 분류는 추이성으로부터 직접 할 수가 있다. 제1의 방법에 의한 것이라도 같은 유에 속하는 임의의 두 원소 사이에는 동치관계를 반드시 발견할 수가 있다。

집 합	분 활	동치관계
{주머니 속의 동전}	같은 액면의 동전의 유	「같은 액면이다」
{페인트 통}	같은 색의 페인트 통의 유	「같은 색이다」
{도서관의 소설}	동일 작가의 소설류	「같은 작가의 작품」
임의의 집합	임의의 분할	「같은 유에 속한다」

이와 같은 분할은 동치관계와 밀접한 관계를 갖는 것이므로 그에 속하는 유를 **동치류**라고도 부른다.

이상의 이야기를 정리하면 다음과 같다.

주어진 집합의 모든 원소 사이에 동치관계가 있으면, 그에 의하여 동치류로 분할된다.

역으로 집합의 분할이 있으면「같은 유에 속한다」고 하는 하나의 동치관계가 정의된다.

(2) 대체가능성의 원리

동치성이라는 아이데아 속에는 특정한 목적하에서 상호 대체가능하다는 아이데아가 잠겨져 있다. 가령, 아이스크림의 대금을 지불할 때는 50원짜리 동전중 어느 동전으로도 대체할 수 있다. 어느 도서관에 가서「이광수가 쓴 소설」을 희망하였다면, 그것은 이광수의 저작중 어느 것이라도 좋다는 의미일 것이다. 이 추이성은 물론 특정한 속성 즉 동치류를 특징지우는 속성에 관해서만 말할 수 있는 것이다.

이 대체 가능성의 원리의 또 하나의 귀결은 대체가능에 의해서 동치류를 지정하는 또 하나의 방법이 주어진다는 것이다.

앞에서 말한 유별의 제1의 방법은 동치류를 특징지우는 속성(가령 청색)에 의한 것이었다. 이 보다 더 구체적인 방법은 그 유 속의 임의의 원소를 대표로서(가령, 어느 한 청색 페인트 통) 사용하는 것이다. 이 방법은 때로는 매우 편리하다. 그러나 이 경우는 그 대표로 지정된 것이 그 특정한 원소 자체를 의미하고 있는것인지, 혹 그가 대표로하는 유를 의미하고 있는지가 명확하지 않다.

물론 대표를 선정한 것 만으로는 유를 정의한 것이 되지는 않는다. 그러기 위해서는 어떤 관계가 쓰이고 있는가도 알고 있어야 한다. (물론 동치관계만으로 유는 정의되지 않는다. 전체집합이 명확하여야 한다)

예를 들어보자. "이광수가 쓴 소설"이라는 것은 단지 현재 지적하고 있는 소설 한편을 의미할 수도 있고, 때로는 그의 대표작을 의미할 수도 있다. 따라서 대표에 의해서 유를 지정하는 방법은 이미 확립된 문맥 속에서 그 유를 명확히 정의할 수 있는 조건(전체집합과 동치관계)이 명시되어 있을 때만이 유효한 것이다.

2. 개념의 형성

(1) 유별과 개념

앞에서는 동치관계와 유별에 관해서 살펴 보았다. 그리고 대체가능성의 원리로부터 대표원에 의해서 유를 지정할 수 있다는 것도 살펴 보았다. 여기서는 그러한 유별행위가 개념형성과 어떤 관계가 있는가를 살피려고 한다.

개념이라는 말은 너무나도 널리 사용되고 있기 때문에, 그것을 정의하기란 그리 쉬운 일이 아니다. 그렇기 때문에 여기서는 몇개 예를 통해서 그 개념을 해명하여 보려고 한다.

우선 두개의 전언어적(前言語的) 예시를 보자. 생후 12개월 된 어느 유아가 포유병에 있는 우유를 모두 마신 뒤, 2개의 빈 술병이 놓에 있는 방에 들어가서 그 빈병 옆에 자기의 포유병을 놓았다. 또 어느 2살짜리 어린이는 방바닥을 기어다니는 갓난아이를 보고, 언제나 강아지에게 하였던 것 처럼 머리를 쓰다듬기도 하고 또 등을 쓰다듬어 주었다. 이 어린이는 많은 강아지는 보았지만 갓난 아이가 기어 다니는 것은 한번도 본 일이 없다고 한다.

이 두 예시에서 보여주는 어린이의 행동은 다음과 같은 것을 의미한다. 하나는 선행경험의 어떤 유별이고 또 하나는 현재의 경험을 그 유별된 유중의 어느 하나에 적합시키는 것이다.

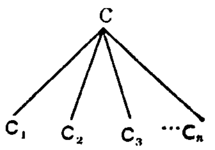
우리들은 항상 그와 같은 행위를 함으로써 과거의 경험을 현재의 상황에 가져오게 하고 있다. 이 활동은 끊임 없이 유지되고 있으며 또 거의는 자동적으로 이루어지고 있다.

보다 자동적인 단계에서는, 우리들은 언제나 사상을 과거에 경험하였던 것으로서 유별하고 있다.

어느 한 특정한 대상에 대해서 우리는 늘 서로 다른 거리, 각도, 조명하에서 바라다 보게 되므로, 우리들에게 들어오게 되는 감각 여건은 언제나 동일하다고는 할 수 없게 될 것이다. 이와 같은 변동하는 입력으로부터 우리들은 어떤 종류의 다변한 특성을 추출하게 된다. 그리고 그 특성의 기억은 개별 기회에서의 대상의 기억보다는 오래동안 유지된다.

이러한 활동의 예시를 하여 보기로 한다.

옆 그림의 C_1, C_2…는 어떤 특정한 책이라는 대상에 대해서 여러 기회에 하게 된 경험을 나타내고 있다. 이 개별 기회에 하게 된 경험들로 부터우리들은 C라고 표현되는 어떤 종류의 공통성을 추상한다. 한번 그러한 추상이 이루어지면 다음 기회에 하게 되는 경험 Cn은 C를 상기시키고 그 책은 재인된다. 즉 새로운 경험은 경험 C_1, C_2와 그 밖의 것과 함께 유별된다. 그리고 그 유로부터 그 책을 보았었다고 하는 선행경험에 대한 Cn속의 C의 유사성뿐 아니라 Cn이라는 기회에서의 대상의 특이성까지도 경험하게 되는 것이다. 그래서 C_1, C_2…와 Cn의 공통성과 함께 C_1, C_2,…와 Cn의 차이까지도 의식하게 된다.



동일 대상에 대한 여러 경험에 대해서 이러한 추상이 이루어지면, 다음 단계에 가서 보다 고차의 추상이 쉽게 이루어진다.

C, C′, C″, …라는 특정한 책들로부터 우리들은 보다 고차적인 불변속성을 추출한다. 그렇게 함으로써 우리들은 Cn(가령, 서점에서 처음 본 책)을 이들 유 {C, C′, C″…} 의 원소로서 인지하게 되는 것이다. 이것은 집합 {C, C″, C″,…}로부터 하게 되는 제 2 의 추상이다. 그 추상에 대해서 우리는 "책"이라는 명명을 하게 된다. 즉 C, C′, C″, …의 공통속성, 다시 말하면 책을 특징지을 수 있는 불변한 속성에 명명하게 되는 것이다.

이 불변속성은 이미 지각적인 것이 아니고 보다 기능적인 것이 된다. 즉 책의 물리적 속성으로부터 결별되여 가는 것이다. 이 말은 최근에 등장한 마이크로 필름에 의한 책이 우리들이 지금까지 보아 온 책과는 어느 면으로나 물리적으로 닮은데가 없는데도 우리는 그것을 분명히 책이라고 인식하고 있다는 것에 주목하여 보면 이해할 수가 있다.

「책」이라는 추상과 함께 「연필」, 「지우개」, 「컴파스」, 「노우트」 등의 추상으로부터 우리는 또 한 단계 높은 추상으로서 「학용품」이 만들어진다. 이와 같이하여 추상의 계열이 만들어진다.

그와 같은 행위는 모두 유열행위이다. 그리고 그러한 유별 행위는 결코 고정적인 것이아니다.

어린이들은 책을 발판, 소굽 장난할 때의 밥상, 때로는 인형의 의자, 책상등으로 구분한다. 그와 같은 유별의 가소성은 상황의 요청에 의한 것이긴 하나 적응성과 밀접히 관련되어 있는 것이다.

이제 개념이란 것이 무엇인가를 명확히 정의할 수는 없으나, 그 것이 무엇인가를 해명할 수 있을 것 같다.

추상행위란 우리들의 경험들 사이에 존재하는 유사성에 주목하는 활동이라고 할 수 있다

(동치관계의 발견) 그리고 유별이란 그 유사성(동치관계)를 근거로 하여 여러 경험을 통합 정리하는 것을 의미한다고 할 수 있다. 또 추상이란 추상행위의 소산물로서 유별을 가능케 하도록 학습되어진 것 즉 유를 정의할 수 있는 속성이라고 할 수 있다.

추상행위를 활동으로서, 그리고 추상을 그의 산물로서 구별하였다. 이 후자의 것 즉 추상행위의 소산물인 유를 정의할 수 있는 속성이 바로 개념이라는 것이다.

그러므로 개념을 형성시키기 위해서는 어떤 공통성을 찾는 많은 경험을 필요로 하게 된다. 그리고 그 공통성에 의해서 경험을 유별하고 그 유별에서 얻어진 유의 속성으로서 새로운 경험을 유별할 수 있어야 한다. 즉 동치류의 구성에 의해서 개념은 형성되는 것이다.

이상과 같은 이유로 해서, 개념형성에 필요한 것은 동치라는 개념인 것이다.

일상적인 개념은 외계의 직접 경험으로부터 얻어지는 것이므로 앞에서 이야기한 개념형성의 경로를 거치지 않고 형성되어 질 수도 있다. 그러나 수학적인 개념들은 일상적인 것보다 훨씬 추상적일뿐만아니라, 학습은 거의 보다 추상적인 방향으로 진행하게 된다.

그러므로 수학적 개념 형성에 있어서는 앞에서 이야기한 개념 형성의 경로를 거치지 않을 수가 없는 것이다.

(2) 수학적 개념 형성의 예

수학적 개념이 동치류의 구성에 의해서 형성된다는 예로서 수개념을 들어 보기로 한다.

자연수의 개념은 1차적으로 집합의 유별에서 얻어진 개념이다.

집합의 집합을 전체집합으로 하고 「대등하다」를 동치관계로 택하면, 그 전체집합은 동치류로 분활된다. 이 때, 이 동치류를 특징지우는 속성이 곧 자연수(기수)인 것이다.

정수, 유리수, 실수, 복소수라고 하는 수개념은 모두 자연수 개념으로부터 도출된 것이다.

자연수의 집합을 N이라 하고N×N을 만들어 그것을 전체집합이라고 하자.

이제 N×N에 속하는 순서적(a, b), (c, d)에 대해서 상등관계(∼)를

$$(a,\ b,)\sim(c,\ d)\Longleftrightarrow a+d=b+c$$

라고 정의하면 이 상등관계는 동치율을 만족시키므로 동치관계가 된다.

전체집합N×N은 이 동치관계에 의해서 다음과 같이 유별된다.

{(1, 1), (2, 2), (3, 3)……}

{(1, 2), (2, 3), (3, 4)……}

……………

{(2, 1), (3, 2), (4, 3)……}

……………

이렇게 해서 얻어진 각 동치류를 수학에서는 정수라고 부르는 것이다. 즉 정수란 N×N이 동치관계∼에 의해서 유별된 동치류를 특징지우는 속성인 것이다.

유리수의 개념도 같은 경로를 거쳐서 형성된다. 정수의 집합을 I라고 할 때 I×I를 전체집합, I×I의 원소들 사이에

$$(a, b)\sim(c, d)\Longleftrightarrow ad=bc$$

와 같이 상등관계를 정의하면, 이 상등관계 또한 동치율을 만족시킴으로 동치관계가 된다. 그리고 이 동치관계는 I×I를 동치류로 유별한다. 이 때 이 각 유를 특징지우는 속성이 유리수인 것이다.

실수는 기본구간열의 크래스 또는 기본열의 크래스로서 그 개념은 형성된 것이다. 그리고 복소수는 실수의 순서쌍의 집합을 유별함으로써 얻어진 개념인 것이다.

이상의 예로서 알 수 있는 것 같이 수학적 개념 형성에서 동치라는 아이데아는 결여될 수 없는 것이다.

(3) 개념에의 명명

대상에의 명명은 그 대상을 분류한다는 것

과 통한다고 앞에서 말하였다. 언어는 개념이나 개념형성에 밀접하게 관련되어 있다. 개념에 대한 이름은 그 개념과 연합되어진 음이며 혹은 종이 위에 쓰여진 기호인 것이다. 그리고는 개념에의 명명은 그 개념이 일단 형성된 연후에, 혹은 개념이 형성되어지는 과정에서 이루어지는 것이다.

만약 개념의 범례와 접하게 될 때마다 같은 이름을 듣던가 혹은 본다고 한다면, 개념이 형성되는 동안 그 이름은 개념과 긴밀하게 맺어져 있기 때문에, 이름과 개념 그 자체와 혼동되어지는 것이다. 사실 수와 수사(수개념에 붙여진 이름)는 자주 혼동되어지고 있음을 많은 사람들에게서 볼 수가 있다.

이러한 혼동은 마치 어느한 대상을 그가 속해 있는 유의 대표원으로 택할 때, 그것이 유를 지정하고 있는 것인지, 아니면 그 대상 자체를 지정하고 있는지가 자주 혼동되어지는경우와 같다.

이름이 개념과 맺어진 연후에는, 사물의 명칭은 그 사물의 유별을 돕게 된다. 그것은 기존의 유에 속하는 것으로 재인하는 행위가 되는 것이다.

「이것은 무엇일까」, 「그것은 잉크를 넣지 않아도 되는 새로운 만년필이다」와 같은 일로서 우리들은 지각적 속성만으로는 유별할 수 없는 것까지도 유별하게 된다. 그러한 유별은 새로운 경험과 동시에 만년필이라는 개념을 상기시키게 되는 것이다.

명명은 새로운 개념을 형성시킴에 있어서 극히 유효하고 또 때로는 본질적 역할마저도 하게 되는 것이다.

개념이 동치류의 속성이고 이름이 개념에 부여된 것이라면, 결국 이름은 동치류에 부여된 것이라고 할 수 있다.

3. 개념의 학습

개념이 전체집합을 동치관계에 의해서 유별된 동치류의 공통속성으로서 형성된다는 것을 말하였다. 그리고 언어는 그 개념을 표상하기 위하여 부여된 이름이라는 것도 말하였다.

여기서는 이 글의 결론으로서 개념이란 어떻게 전달되는 것이며, 또 수학적 개념의 학습은 어떻게 하여야 하는 가를 말하여 보기로 한다.

(1) 개념의 전달

언어란 범례가 될 수 있는 것들을 모으고, 또 범례가 되지 못하는 것들을 배제시킴으로써 개념의 형성을 촉진시키는 역할을 한다. 그렇다고 하면 개념이란 단순히 언어적으로 정의함으로써 그 개념의 형성 과정을 단축시킬 수 있을까?

수학교육에서는 자주 정의에 의해서 개념을 형성시키려고 노력하고 있다. 그러한 노력은 과연 소기의 목적을 달성시킬 수 있는가, 또 그 방법은 옳은가를 살펴 보기로 한다.

지극히 단순하고 또 주지의 개념, 가령 「빨강」에 대해서 생각하여 보자.

지금 극히 최근에 각막의식에 의해서 시력을 회복한 선천성 맹인이 「빨강」이란 무엇이냐고 질문 받았다고 하자. 어떤 말의 의미란 그 말과 연합되어진 개념이다. 그러므로 우리는 그에게 「빨강」이라는 개념을 형성시키고나서 그 개념에 「빨강」이라는 말을 연합시켜 주어야 한다.

만약 이 사람에게 「빨강이란 파장 0.6 미크론의 범위에 있는 빛에 의해서 체험할 수 있는 색이다」라고 하였다 하자. 이것으로 시력을 회복한 그 선천성 맹인은 「빨강」이라는 개념을 이해할 수는 없을 것이다.

왜냐 하면, 이 정의 중에 있는 색이라든가 빛이라는 개념은 「빨강」이라는 개념보다 고차적인 것이기 때문이다.

사실, 색이라는 개념은 빨강, 파랑, 노랑.… 등의 개념이 형성된 연후에 형성되어지는 개념이다. 즉 색이란 개념은 {빨강, 파랑, 노랑

…} 이라는 동치류에서 추출된 공통속성인 것이다. 빛이란 색보다 보다 고차적인 개념인 것이다.

다시 말하면 색은 빛이라는 개념의 범례로서 존재할 수 있는 것이라는 말이다.

앞의 정의에 의해서 그 선천성 맹인이 「빨강」이라는 개념을 이해할 수 있기 위해서는 그에게 이미 색이라든가 빛이라는 개념이 형성되어 있어야 한다. 그렇지 못한 상태에서는 「빨강」이라는 개념을 이해한다는 것은 불가능한 일이다. 다시 말하면 그에게 그 정의는 무의미한 것이다.

그렇다고 하면 그에게 「빨강」이라는 개념을 어떻게 전달시킬 수 있을까?

차라리 직관적으로 여러 사물을 제시하면서 「이것은 빨간 책입니다. 이것은 빨간 넥타이입니다. 이것은 빨간 잠바입니다…」와 같이 가르치는 것이 훨씬 좋을 것이다. 그렇게 하여 공통속성으로서 「빨강」을 추출할 수 있도록 여러 경험을 단시간에 집적할 수 있는 상황을 구성하여 주는 일이 바람직한 것이다.

여기서 명명이란 그 개념형성을 위해서 보조적으로 사용될 뿐인 것이다.

이 예를 통해서 우리는 개념의 전달이 원칙적으로 정의에 의존한다는 것이 부적절하다는 것을 볼 수 있었다.

우리들이 일상생활에서 필요로 하는 새로운 개념의 대부분은 극히 저차원의 것이므로 정의에 의해서 그 새로운 개념을 전달 할수 있다. 왜냐하면 정의에 의해서 전달을 가능케하고 유효하고도 적절한 고차적인 개년이 형성되어 있기 때문이다.

그러나 수학에서 필요로하는 개념들은 일상생활에서 필요로 하는 개념보다 훨씬 추상적일뿐 아니라, 학습은 거의 보다 추상적인 방향에로 진행하고 있다. 그러므로 수학적 개념의 전달은 정의에 의해서만은 불가능하다. (물론 이것은 개념 전달에 필요한 고차원의 개념을 가지고 있지 않을 때의 이야기다)

따라서 수학적 개념의 전달은 그 개념 형성에 필요한 범례를 구성하여, 개념의 전수자 스스로가 공통속성을 추출할 수 있도록 경험시키는 일부터 하여야 한다.

즉 스스로 대상(전체집합)을 인식하고 그 전체집합을 유별함으로써 개념은 형성되는 것이다. 물론 이 경우 전수자는 언어를 구사함으로써 개념형성을 촉진시켜야 할 것이다.

(2) 수학적 개념의 학습

우리들 일상생활의 경험은 대부분 환경으로부터 직접 얻어지며, 또 거기에 포함되어 있는 개념은 추상도가 별로 높지 않은 것 들이다. 그러나 수학은 고도의 일반성과 추상성을 가지고 있는 것이다. 이 일반성과 추상성은 지적인 사람들이 세대에서 세대에로 거치면서 일반화와 추상화에의 노력이 거듭 쌓임으로써 이룩된 것이다.

현재 수학을 학습하는 사람들은 수학의 생경한 데이터가 아니고 현존하는 수학의 데이터 처리의 체계를 대하게 된다. 그렇기 때문에 대개의 경우 수학적 발견의 소산물만을 학습하게 된다. 이것은 이글의 첫머리에서 지적 하였듯이 수학적 사고의 육성이라는 중요한 수학 교육의 목표를 결여시키는 원인이 되는 것이다.

수학은 환경으로부터 직접 배울 수는 없다. 그러므로 수학자(수학 교사)를 통해서 간접적으로 학습되어 질 뿐이다. 그렇기 때문에 학습자는 수학 교사에게 크게 의존하게 된다.

이상의 논의에서 수학적 개념의 학습의 원리로서 다음 두가지를 제시할 수 있겠다.

(i) 어떤 학습자가 이미 가지고 있는 개념보다 고차인 개념은 정의만으로는 이해할 수 없다. 유일한 방법은 적절한 범례의 집합을 경험하지 않으면 안된다.

두번째는 첫번째 것에서 직접 파생하는 것이다.

(ii) 수학에 있어서, 한 개념의 범례란 거의 언제나 다른 개념(개념 계열상에서)이므로 그

들 개념이 이미 학습자에게 형성되어 있어야 한다.

(i) 의 원리는 대개의 경우 잘 지켜지지 않고 있었다. 도처에서 새로운 제목이 실례에의하지 않고 정의에 의해서 도입되고 있다. 이것은 교사에게는 매우 편하며 또 확실한 방법일 수 있다.

그러나 학습자에게는 난해한 일이다. 물론 학습자가 이해하고 있지 않은 새로운 개념을 정의만으로 공부하여 본다는 것은 유용할런지 모른다. 그러나 이런 학습자에게는 바로 그것이 좌절의 원인이 되는 것이다.

우수한 교사는 직관적으로 여러 실례를 들므로써 정의의 이해를 도모하려 하고 있다. 그러나 적절한 범례를 모은다는 것은 그리 쉬운 일이 아니다. 범례는 추상되어질 것에 대해서는 공통성을 가져야 하고, 사상되어질 속성들에 대해서는 충분히 차이점을 가지고 있어야 한다.

범례란 개념이 형성되어 있을 때만 구성할 수 있는 것이다. 그러므로 수학 교사는 전달하려는 개념에 대해서 충분히 이해하고 있어야 하는 것이다.

(ii)의 원리는 개념 계열에 관한 것이다. 단계적인 추상의 구조를 만들어 냄에 있어서, 어느 특정한 수준이 불완전하게 이해되고 있다면, 그로부터 이룩되는 다음 단계는 파멸의 위험에 직면하게 될 것이다. 이 개념 상호간의 의존성은 어떤 학문보다도 수학이 두드러지게 가지고 있는 특성이라고 할 수 있다.

한국 지리가 이해되지 않더라도 유럽의 지리는 이해할 수도 있다. 또 신라의 역사를 모르고도 이조의 역사를 이해할 수도 있을 것이다. 물리학에서 「음」을 이해하지 않고도 「열과 온도」에 대해서 이해할 수는 있다.

그러나 산수를 충분히 이해하지 못하고 대수를 이해한다는 것은 불가능하다. 왜냐 하면 학교에서 배우는 대수의 대부분은 산수의 일반화이기 때문이다.

산수에 관해서 불완전한 이해 밖에 가지고 있지 않은 학습자가 수학 학습에 성공한다는 것은 대개의 경우 불가능한 일이다.

(ii)의 원리에서 얻을 수 있는 또 하나의 결론은 새로운 추상의 단계에서 필요로 하는 개념이 충분히 활용되지않으면 안된다는 것이다. 한 번 학습되어졌다고 해서 그것으로 충분하지는 않다. 언제나 필요하다면 활용될 수 있도록 또 참조할 수 있도록 하여 두지 않으면 안된다.

이것은 복습이라는 문제에 직결되는 것이다. 교사는 적절히 복습의 계획을 세워둠으로써 초학자에게 도움을 주어야 한다. 그러나 학습단계가 높은 학생은 자기의 학습을 진행시키는데 적극적이어야 한다.

외부로부터 가르침을 받기 보다는 스스로의 필요성을 느끼고, 이전의 과제를 스스로 돌이켜 본다는 것이 보다 효과적일 것이다. 왜냐하면 답은 최초의 의문자에게 보다 의미가 있기때문이다.

여기서 설정된 수학적 개념의 학습원리가 기본적으로는 동치와 유별 및 개념계열이라는 아이데아에 의해서 이룩된 것임은 앞의 논의를 통해서 충분히 이해할 수 있다.

결론적으로 말해서 동치라는 개념은 수학적 개념 형성에 필요한 근원적 개념인 것이다.

따라서 이 사항은 수학교육에서 간과할 수 없는 것이다.

(서울교육대학)

<본 논문은 1974년 8월 3, 4, 5일 전북 전주 풍남국민학교에서 개최된 전국 초등 수학교육 세미나에서 발표된 논문임>