韓國數學教育學會誌〈數學教育〉
1974. 8. Vol. XIII No. 1

Journal of Korea Society of Mathematical Education
August 1974. Vol. XIII No. 1

有限ϕ_1-群과 ϕ_2-群에 對해서

崔 德 熙

1. 概 要

有限群 G 의 部分群 $\phi_1(G)$와 $\phi_2(G)$를 定義하고, $\phi_1(G)$와 $\phi_2(G)$의 基本性質을 論한다. 나아가서 Frattini 群 $\phi(G)$의 巾零性이 보다 넓은 $\phi_1(G)$에서 保存됨을 밝히고자한다.

2. $\phi_1(G)$, $\phi_2(G)$와 $\phi(G)$의 定義

有限群 G 에 있어서는 恒常 極大部分群이 存在한다. 그 모든 極大部分群을 G_1^*, G_2^*, $\cdots, G_m^*$ 라고 한다. $G_i^*(1\leqq i\leqq m)$中에서 正規인 것이 存在할 때, 그것을 $G_1^*, G_2^*, \cdots, G_s^*$ 라고 하자.

$s\leqq m-1$ 일 때

$$\phi_1(G)=\bigcap_{j=s+1}^{m}G_j^*,\quad \phi_2(G)=\bigcap_{j=1}^{s}G_j^*$$

라고 하고, $s=m$ 일 때

$$\phi_1(G)=G,\quad \phi_2(G)=\bigcap_{j=1}^{m}G_j^*$$

라고 한다. 또 $G_i^*(1\leqq i\leqq m)$中에서 正規인 것이 存在치 않을 때

$$\phi_1(G)=\bigcap_{j=1}^{m}G_j^*,\quad \phi_2(G)=G$$

으로 $\phi_1(G)$와 $\phi_2(G)$를 定義한다. 이에 依해서

$$\phi_1(G)\cap\phi_2(G)=\phi(G)\text{이다.}$$

3. 基本性質

이제 $\phi_1(G)$와 $\phi_2(G)$에 關한 基本性質을 論하자. 말할 것도 없이 $\phi_1(G)$와 $G_2(G)$는 G 의 特性部分群이다.

1. 群 G 에서 $\phi_1(G)\geq Z(G)$이다.

(여기서 $Z(G)$는 G 의 中心이다).

〔證明〕 G 가 巾零群이면 $\phi_1(G)=G$ 이므로 自明하다. 또 G 가 非巾零群이고, $\phi_1(G)\supsetneqq Z(G)$이라면, $G_i^*\supsetneqq Z(G)$인 非正規이고 極大部分 G_i^* 가 定義에서 存在한다. 따라서 $G=G_i^*\cdot Z(G)$가 成立한다. 그런데 이는 G_i^* 가 正規임을 말한다. 따라서 모순이다.

2. N 이 G 의 正規部分群이라고 하자. $N\subseteq\phi_1(G)$이면 $\phi_1(G/N)=\phi_1(G)/N$ 이다.

〔證明〕 G 의 極大部分群이 모두 正規일때, G/N 의 極大部分群도 또한 모두 正規이다. 따라서 $\phi_1(G)$의 定義에서 自明하다. 이제 G 의 極大部分群에서 正規가 아닌 것이 存在할 때 그것을 G_i^* 라고 하자. $G_i^*\supseteq N$ 이므로 G_i^*/N 는 G/N 에서 極大이고, 또 非正規部分群이다. 故로

$\phi_1(G)/N\subseteq G_i^*/N$ 에서

$$\phi_1(G)/N\subseteq\cap(G_i^*/N)=\phi_1(G/N)$$

이다. 逆으로 $H/N=\phi_1(G/N)$이라면 $H/N \subseteq G_i^*/N$ (G_i^* 는 非正規인 極大部分群)이 成立한다. 故로 $H \subseteq G_i^*$. 그러므로

$$H \subseteq \bigcap G_i^* = \phi_1(G).$$

따라서 $\phi_1(G/N)=\phi_1(G)/N$ 이다.

3. N을 G의 正規部分群이라 하고, H를 G의 部分群이라고 하자.

$N \subseteq \phi_2(H)$이면 $N \subseteq \phi_2(G)$이다.

〔證明〕 $N \subsetneq \phi_2(G)$라고 하면 $\phi_2(G) \neq G$ 이다.

따라서 $\phi_2(G)$의 定義에서 $G=N \cdot G^*$ 이고, $H \subsetneq G^*$ 가 成立하는 正規이고 極大인 部分群 G^*가 存在한다.

$G=N \cdot G^*$ 에서 $H \ni h = xy (x \in N,\ y \in G^*)$. 故로 $y \in G^* \cap H$ 가 成立한다. 따라서 $H=N(G^* \cap H)$이다. G^* 가 正規이므로 $G^* \cap H$ 는 H의 眞部分群이며, 正規이고, 極大인 部分群이다. 따라서 $G^* \cap H \supseteq \phi_2(H) \supseteq H$ 이므로 $H=G^* \cap H$ 이다. 즉 $G^* \supseteq H$ 이다.

$G=N \cdot G^*$ 에서 $G^*=G$ 따라서 모순이다.

4. $G=H \times K$ 이면 $\phi_2(G)=\phi_2(H) \times \phi_2(K)$이다.

〔證明〕 (i) $\phi_2(H) \neq H$, $\phi_2(K) \neq K$ 일 때, H의 極大部分群이고, H에서 正規인 H^*가 存在한다. $H^* \times K$는 G에서 極大이고, 正規인 部分群이다. K에 對해서도 같은 性質이 있다 이 때 다음 式이 成立한다.

$$\phi_2(G) \subseteq \bigcap (H^* \times K) = \phi_2(H) \times K,$$

$$\phi_2(G) \subseteq \bigcap (H \times K_j^*) = H \times \phi_2(K).$$

따라서 $\phi_2(G) \subseteq \phi_2(H) \times \phi_2(K)$

$\phi_2(H)$와 $\phi_2(K)$는 G에서 正規이므로 3에 依해서 $\phi_2(G)$ 에 포함된다. 따라서

$$\phi_2(G)=\phi_2(H) \times \phi_2(K) \text{ 이다.}$$

(ii) $\phi_2(H) \neq H$, $\phi_2(K)=K$ 일 때, G의 正規이고 極大인 部分群 G^*는 K를 품는다. 왜그렇냐하면 $G^* \cap K$는 K의 正規이고 極大인 部分群이므로 $G^*=H^* \times K$ 라고 表示할 수 있고 H^*는 H의 正規이고 極大인 部分群이다. 따라서 (i)과 같은 方法으로

$$\phi_2(G) \subseteq \phi_2(H) \times K = \phi_2(H) \times \phi_2(K).$$

여기서 $\phi_2(G)=\phi_2(H) \times \phi_2(K)$ 가 成立한다.

(iii) $\phi_2(H)=H$, $\phi_2(K)=K$ 일 때 G의 極大部分群은 모두 正規가 아니므로

$$\phi_1(G)=G=H \times K=\phi_2(H) \times \phi_2(K)$$

5. 群 G의 $\phi_2(G)$ 가 可解群이면 G는 可解群이다.

6. $\phi_1(G) \neq G$ 이면 $\phi_2(G) \supsetneq \phi(G)$ 이다. 만일 $\phi_2(G)=\phi(G)$라면 $\phi_2(G) \supseteq D(G)$ (여기서 D(G)는 G의 交換子群이다.)이다. 故로 $\phi_1(G) \supseteq D(G)$가 成立한다. 따라서 $\phi_1(G)=\bigcap G_i^*$ 의 G_i^*는 正規이고, 假定에 모순이다.

〔定理 1〕 有限群 G의 $\phi_1(G)$ 는 巾零群이다

〔證明〕 $\phi_1(G)$의 任意의 p-Sylow 群을 p라고 하고, G에 있어서의 正規化群을 N(p) 라고 한다. 따라서 p의 $\phi_1(G)$에 있어서의 正規化群은 $\phi_1(G) \cap N(p)$ 이다. g를 G의 任意의 要素라면 $\phi_1(G)$ 는 正規이므로 $g^{-1}pg \subseteq \phi_1(G)$, 故로 $x^{-1}px=g^{-1}pg$ 인 要素 $x \in \phi_1(G)$ 가 存在한다. 故로

$$(gx^{-1})p(gx^{-1})=p.$$

따라서 $N(p)\phi_1(G)=G$ 이다.

$N(p)=G$ 이면 옳으므로, $N(p) \neq G$ 일 때 모순임을 밝히면된다.

$N(p) \neq G$ 이면 N(p)를 품는 G에 있어서의 極大部分群 G^*가 存在한다.

a) G^*가 正規가 아닐 때, $G^* \supseteq N(p)$, $\phi_1(G)$, 따라서 $G^*=G$ 가 되여 모순이다.

b) G^*가 正規일 때, $p \subseteq G^* \cap \phi_1(G)$, $x \in \phi_1(G)$ 에 對해서 $x^{-1}px \subseteq x^{-1}(G^* \cap \phi_1(G)x=G^* \cap \phi_1(G)$.

故로 $u^{-1}(x^{-1}px=p \quad (u \in G^* \cap \phi_1(G)$.

따라서 $xu \in N(P) \cap \phi_1(G) \subseteq G^* \cap \phi_1(G)$.

그러므로 $x \in G^* \cap \phi_1(G)$, 즉 $\phi_1(G) \subseteq G^* \cap \phi_1(G)$.

故로 $\phi_1(G) \subseteq G^*$가 되여 a)와 같은 方法으

로 亦是 모순이다.

〔定理 2〕 指數가 位數의 最小素因數인 極大部分群 G^*가 可解群이면, 群 G도 또한 可解群이다.

〔證明〕 G의 位數 n의 最小素因數를 q라고 하자. G^*가 p-群일 때는 Burnside의 定理에서 이 定理는 옳다. 따라서 位數의 歸納法에 依한다. G^*의 最大素因數를 p라 하고, G의 p-Sylow 群을 p라고 한다. 또 $p \subseteq G^*$라고 해도 좋다.

$g^{-1}pg \cdot G^*$에 포함되는 要素의 數는

$$\frac{n}{q} p^{\alpha}/p^{\beta} = \frac{n}{q} p^{\alpha-\beta}.$$

$q<p$이므로 $(n/q)p^{\alpha-\beta} \leqq n$에서 $\alpha=\beta$에 限한다. 즉 $g^{-1}pg \cap G^* = g^{-1}pg$, 따라서 $N = \bigcap_{g \in G} gG g^{-1}$라고 하면, N은 正規이고 $\neq \{e\}$이다. G^*가 可解群이므로 N와 G^*/N도 可解群이다.

$[G/N : G^*/N] = [G : G^*]$이므로 歸納法의 假定에서 G/N은 可解이고, 따라서 G는 可解群이다.

〔系 1〕 G의 極大部分群 G^*의 指數가 $G/\phi_1(G)$에 있어서의 位數의 最小素因數이고, G^*가 可解群이면 G는 可解群이다.

〔證明〕 $G^* \supseteq \phi_1(G)$이면 $G/\phi_1(G)$와 $G^*/\phi_1(G)$에 對해서 〔定理 2〕를 適用하면 $G/\phi_1(G)$는 可解群이다. 또 $\phi_1(G)$는 巾零이고, 따라서 可解이므로 G는 可解群이다.

$G^* \not\supseteq \phi_1(G)$이면 G^*는 正規部分群이다. 따라서 G는 可解群이다.

〔定理 3〕 極大部分群 G^*의 指數가 素數이고, $G^* \cap D(G) \subseteq \phi_1(G)$이면, G는 超可解群이다.

〔證明〕 G^*이 正規일 때 $G^* \supseteq D(G)$에 依해서 $D(G) \subseteq \phi_1(G)$가 되고, 이에 依해서 $G=\phi_1(G)$에 限함으로 G는 巾零群이 되여 옳다. G^*이 非正規이면 $G^*D(G)=G$가 成立한다.

假定에 依해서

$$[G^*D(G) : G^*] = [D(G) : D(G) \cap G^*]$$

는 素數이다. G^{**}를 G의 任意의 極大部分群이라고 할 때, $G^{**}D(G)=G$일 때만 알아 보면 된다. 이 때

$$[G^{**}D(G) : G^{**}] = [D(G) : G^{**} \cap D(G)]$$

이다. 假定에 依해서 $G^* \cap D(G) \subseteq \phi_1(G)$이므로 $G^* \cap D(G) \subseteq G^{**} \cap D(G)$가 成立한다. 따라서 $[G : G^{**}]$는 素數가 되여 Huppert의 定理에서 本定理는 옳다.

$\phi(G)$는 G의 p-Sylow 群 p를 품는 境遇는 없으나, $\phi_1(G)$는 반드시는 그렇치 않다. 다음 定理를 말하기 前에 留意할 點은 任意의 p-Sylow 補群이 正規일 때, G는 巾零群이다. 實際로 $H_1, \cdots, H_m$을 p_i-Sylow 補群이라고 하면, $p_k = \bigcap_{i \neq k} H_i$에서 p_k는 G에서 正規이고, 따라서 G는 巾零群이다.

〔定理 4〕 群 G의 位數는 $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}p_3^{\alpha_3}$($p$는 素數)이고, 모든 p-Sylow 群이 巡回群일 때, $\phi_1(G)$는 唯一한 p-Sylow 群을 품거나, $\phi_1(G)=\phi(G)$이다. 단, G는 非巾零群이라고 생각한다.

〔證明〕 G의 任意의 p-Sylow 群 p에 對해서 $\phi_1(G) \supsetneq p$가 成立하면, $\phi_1(G)$가 正規이므로 $\phi_1(G)$의 p-Sylow 群은 $\phi_1(G) \cap p$이다.

G의 正規인 極大部分群 G_i^*는 G가 可解이므로 存在한다. p가 巡回群이므로 $p \cap \phi_1(G) \subseteq G_i^*$가 成立한다. 故로 $\phi_1(G) \subseteq \phi(G)$, 또 $\phi_1(G) \supseteq \phi(G)$이므로 $\phi_1(G)=\phi(G)$이다.

따라서 $\phi_1(G) \supseteq p_1, p_2$ 또는 $\phi_1(G) \supseteq p_1$이다. 그런데 $\phi_1(G) \supseteq p_1, p_2$는 成立하지 않는다. 만일 $\phi_1(G) \supseteq p_1, p_2$이면 $\phi_1(G) = p_1p_2p_3'$과 p_i-Sylow 群의 곱으로 分解된다. 이 때 $\phi(G)=p_1^*p_2^*p_3'$이 成立한다. 여기서 p_i^*은 p_i의 極大部分群이다. 따라서 $G/\phi(G)$의 位數는 $p_1p_2p_3^{\alpha'}$

이다. 또 $\phi_1(G) \supseteq \phi(G)$에서

$$\phi_1(G/\phi(G)) = \phi_1(G)/\phi(G) \qquad (1)$$

이 成立한다. 또 $\phi_1(G)$ 는 正規이므로 $\phi_1(G)/\phi(G)$ 도 $G/\phi(G)$ 의 正規部分群이다.

(1)과 $\phi_1(G)/\phi(G)$ 의 位數가 p_1p_2 인 것과 關係해서 $G/\phi(G)$ 의 p_i-Sylow 補群 $(i=1,2)$은 極大이고, ϕ_1 의 定義에서 正規이여야 한다.

또 p_3-Sylow 補群 $\phi_1(G)/\phi(G)$ 도 正規이다. 따라서 $G/\phi(G)$ 는 巾零群이다.

故로 $D(G/\phi(G)) \subseteq \phi(G/\phi(G))$ 에서 $G/\phi(G$ 는 Abel 群이고, $D(G) \subseteq \phi(G)$ 이다. 따라서 G 는 巾零群이 되고 假定의 모순된다.

위 〔證明〕에서 알 수 있는 바와 같이 metacyclic 한群으로 $\phi_1(G)$ 가 G 의 p-Sylow 群을 포함하지 않으면, $\phi_1(G) = \phi(G)$ 가 成立한다.

〔定理 5〕 群 G 의 位數 $n = p_1 p_2^{\alpha 2} \cdots p_m^{\alpha}{}_m$ (p_i 는 素數)이고, $\phi_1(G) \supseteq p_1$ 이면 $p_1 \subseteq Z(G)$ 이다. 여기서 p_1 은 p_1-Sylow 群이다.

〔證明〕 $\phi_1(G)$ 가 正規이고, 巾零群이므로 G 에서 p_1 은 正規이다. p_1 의 位數와 指數가 서로 素이므로 Schur 의 定理에 依해서 p_1-Sylow 補群 H 가 存在한다. 또 $[G:H]$ 가 素數이므로 H 는 極大部分群이다. $\phi_1(G) \supseteq p_1$ 이므로 H 는 正規이여야 한다. 따라서 $p_1 \cap H = \{e\}$ 이므로 p_1 의 要素와 H 의 要素는 可換이다. 또 p_1 은 巡回群이므로 $p_1 \subseteq Z(G)$ 이다.

參考 文獻

(1) 伊藤昇, 吉岡昭子, バンサイト 有限群論 共五社, 東京, 1970.

(2) M.Hall, The theory of Groups, Macmillan, NewYork, 1959.

(3) 大島勝, 群論, 共立社, 1956.

Dongguk university