

CHAN-MAI GRAPH에 의한 機械-電氣系の 解析

朴 正 后*

ANALYSIS OF MECHANICAL AND ELECTRICAL SYSTEM
USING GRAPH

Chung Hu PARK

Abstract

This paper is to study on the analysis of mechanical and electrical system using CHAN-MAI flow graph. This graph is considerably different from the existing one's in appearance and easier to construct.

By applying this graph to the mechanical and electrical system, the gain of any variables is easily obtained without any equations between input and output nodes.

緒 言

Flow graph에 의한 解析은 이미 Mason과 Coates에 의해 位相數學的으로 확립되어 自動制御, 回路解析분야에 있어 signal 혹은 變數사이의 관계를 圖式的으로 관찰하며 系統的으로 구할 수 있어 현재까지 널리 사용되고 있다.

그러나 복잡한 系の 解析에서는 利得公式을 誘導하기 어렵고 또 모든 系를 數式化시켜야 하는 결점을 갖고 있어 사용하기 어렵다.

本 論文에서는 새로운 flow graph로 등장된 CHAN-MAI graph를 導入하여 機械-電氣系에 적용시켜 새로운 方法에 의해 利得을 機械的으로 구할 수 있는 解析法을 소개하며 任意變數에 대한 利得을 어리운 절차를 거치지 않고 구할 수 있는 방법을 얻고자 한다.

定 義

(1) Flow graph G

System S를 나타내는 有向 graph G는 同次線型方程式

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_i, \quad i=1, 2, \dots, n \quad [1]$$

으로 주어지며 여기서 S에서의 各 常數 b_i 는 flow graph G에서 常數마디(constant nodes) b_i 로 주어지고 S에서 各 變數 x_j 는 G에서 變數마디 x_j 로써 표시된다. 그리고 S에서 $a_{ij} \neq 0$ 이면 마디 x_j 에서 마디 b_i 로 向한 有向分岐(directed branch)가 존재한다.

또한 G에서의 마디는 다음과 같이 배열된다. 즉

* 釜山水壺大學. National Fisheries University of Busan.

CHAN-MAI GRAPH에 의한 機械-電氣系의 解析

모든 常數마디 b_1, b_2, \dots, b_n 은 上端에 배열하고 (이때 b_i 가 零이면 $b_i=0$ 인 마디를 명백히 표시 하여야 한다) 모든 變數마디 x_1, x_2, \dots, x_n 은 下端에 배열되게 하며 같은 접자를 가진 마디는 수직이 되도록 배열시킨다.

(2) graph G_i

Graph G_i 는 flow graph G 에서 마디 x_j 의 모든 外向分岐를 소거하고 마디 x_j 에서 마디 b_i (여기서 $i=1, \dots, n$)로 향한 利得 b_i (단, $b_i \neq 0$)를 가진 有向分岐를 부가함으로써 얻어지는 한 graph이다.

(3) G 혹은 G_i 의 분리(Separation) S

G 혹은 G_i 의 분리 S 는 한 副 graph(sub-graph)로써 다음 條件을 만족한다.

- (a) G 혹은 G_i 의 모든 마디를 가진다.
- (b) 各 變數마디 x_j 는 정확히 한개의 外向分岐를 가진다.
- (c) 各 常數마디 b_i 는 정확히 한개의 內向分岐를 갖는다. (Fig. 1)

(4) 分離積 S_p

分離積 S_p 는 S 에서 모든 分岐의 利得의 積이다. 여기서 $S_p(G)$ 는 G 의 分離積이고 $S_p(G_i)$ 는 G_i 의 分離積을 表示한다.

(5) 대칭쌍(symmetric pair)

대칭쌍은 分離 S 에서 分岐의 한쌍으로써 하나는 마디 x_i 에서 b_j 에 이르는 分岐이고 다른 하나는 마디 x_j 에서 b_i 에 이르는 分岐이다. 이때 임의 i 와 j 에 대해 成立한다. (Fig. 1)

(6) 비대칭 分岐(asymmetric branch)

비대칭 分岐는 分離 S 에서 임의 대칭 分岐에도 속하지 아니한 한 分岐이다. (Fig. 1)

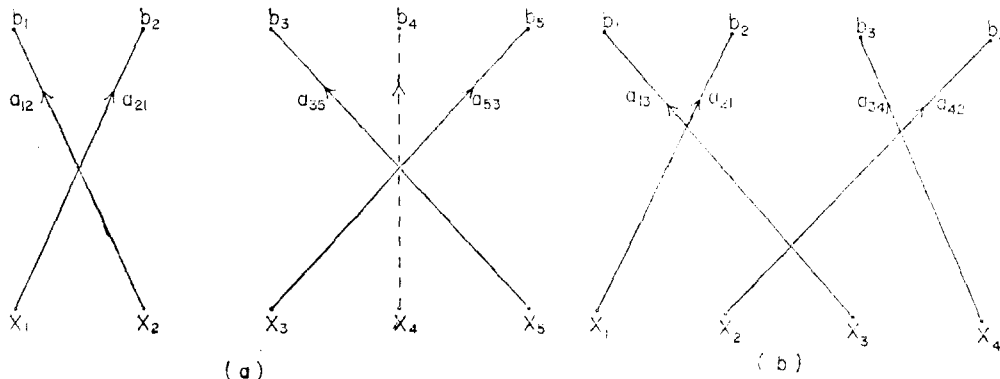


Fig. 1. (a) Symmetric pairs in a separation.
(b) Asymmetric branch in a separation.

여기서 式 [1]을 行列로 表示하면

$$[a_{ij}][x] = [b]$$

여기서 $[a_{ij}]$ 는 係數行列

$[x]$ 는 未知數의 行列列

$[b]$ 는 常數의 行列列이다.

變數 x 의 解는 cramer의 법칙에 의해

$$x_j = \frac{D_j}{D} \dots\dots\dots [3]$$

단, $D \neq 0$ 이고

D 는 係數行列 $[a_{ij}]$ 의 行列式

D_j 는 D 에서 j 번째 列을 常數 列行列과 代치시키므로 得어지는 行列式이다.

또한 CHAN-MAI graph에 의해 다음과 같은 3개의 定理이 成立한다.

(7) 定理 1

線型系에서 n 개의 獨立된 同次線型方程式의 $[a_{ij}]$ 의 D 의 전개에서 모든 積의 項의 集合은 對應하는 flow graph G 의 모든 分離積의 集合과 같다.

(8) 定理 2

G 의 分離 S_j 의 分離積 S_{pj} 의 부호는

$(-1)^{D_s + D_a - 1}$; 단, $D_a \neq 0$ 에 대한 부호

$(-1)^{D_s}$; 단, $D_a = 0$ 에 대한 부호

여기서 D_a 는 S_j 의 비대칭分岐의 數이고 D_s 는 S_j 의 대칭상의 數이다.

(9) 定理 3

D_j 의 모든 積項의 集合은 對應하는 graph G_j 의 모든 分離積의 集合과 同一하다. 이때 $S_{pk}(G_j)$ 의 부호는 $D_a \neq 0$ 일때 $(-1)^{D_s + D_a - 1}$ 이고 $D_a = 0$ 일 경우 $(-1)^{D_s}$ 로 주어진다. 여기서 D_a 는 S_{pk} 의 비대칭分岐의 數이고 D_s 는 S_{pk} 의 대칭상의 數이다.

위의 3개의 定理에서 쉽게 利得公式를 誘導할 수 있다. 즉

線型系에서 n 개의 同次 獨立線型方程式이 未知數 n 개를 가지고 있을 때는 [1]式에서

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = b_r, \quad i=1, 2, \dots, n,$$

로 주어지고 變數 x_j 의 利得은 다음과 같이 주어진다.

$$x_j = \frac{\sum_r (\text{sign } S_{pr}) S_{pr}(G_j)}{\sum_k (\text{sign } S_{pk}) S_{pk}(G)} \quad [4]$$

$$\begin{aligned} \text{여기서 } (\text{Sign } S_{pi}) &= (-1)^{D_{si} + D_{ai} - 1} \quad \text{단, } D_{ai} \neq 0 \quad (i=r \text{ 혹은 } k) \\ &= (-1)^{D_{is}} \quad \text{단, } D_{si} = 0 \quad (i=r \text{ 혹은 } k) \end{aligned}$$

D_{sr} 은 graph G_j 의 r 번째 分離에서 대칭상의 數, D_{or} 은 graph G_j 의 r 번째 分離에서 비대칭分岐의 數, $S_{pr}(G_j)$ 는 graph G_j 의 r 번째 分離 S 의 分離積, D_{sk} 는 flow graph G 의 k 번째 分離에서 대칭상의 數, D_{ak} 는 flow graph G 의 k 번째 分離에서 비대칭상의 數, $S_{pk}(G)$ 는 flow graph G 의 k 번째 分離 S 의 分離積이다

[4] 式은 定理 1과 定理 2에서

$$D = \sum_k (\text{sign } S_{pk}) S_{pk}(G)$$

로 주어지며 定理 3에서 부터

$$D_j = \sum_r (\text{sign } S_{pr}) S_{pr}(G_j)$$

그러므로 [3]式에서 알 수 있는 바와 같이 D 와 D_j 의 比를 구하므로써 [4]式을 바로 誘導할 수 있다.

예제 1] 다음과 같은 方程式을 가진 系의 x_2 의 利得을 구하라.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 &= b_1 \\ a_{22}x_2 + a_{23}x_3 &= 0 \\ a_{13}x_1 + a_{33}x_3 &= b_3 \end{aligned}$$

CHAN-MAI GRAPH에 의한 機電系의 解析

이의 解를 얻기위해 우선 이 方程式에 對應한 flow graph G와 G의 모든 分離의 集合과 定理3에 의거 分離積 $S_p(G)$ 를 나타내면 Fig. 2, Fig. 3과 같다.

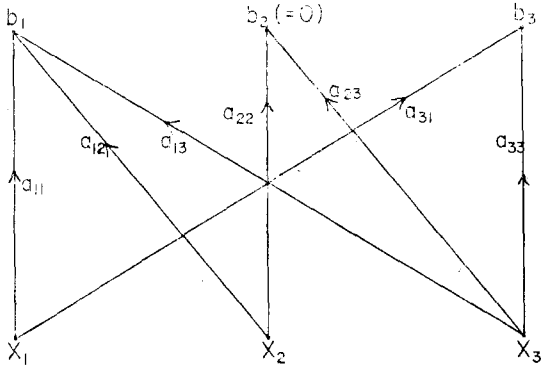


Fig. 2. The flow graph G of the example 1.

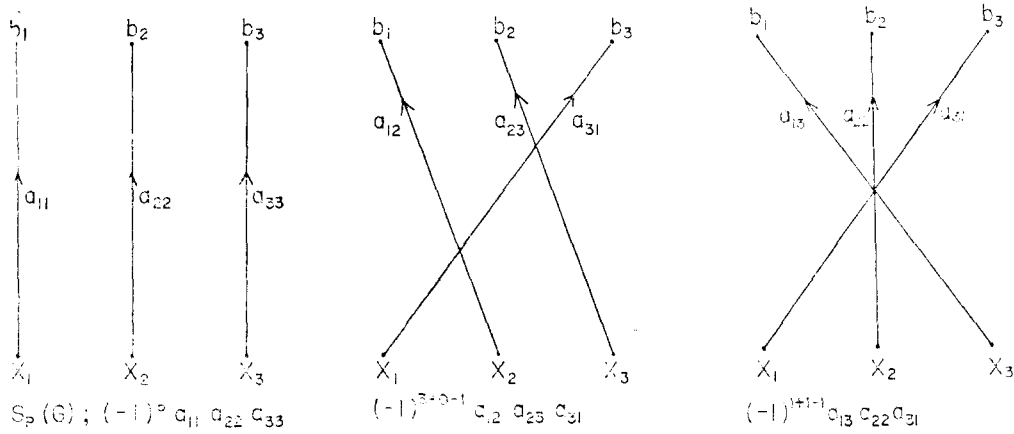


Fig. 3. The set of all the separation of G and separation product $S_p(G)$.

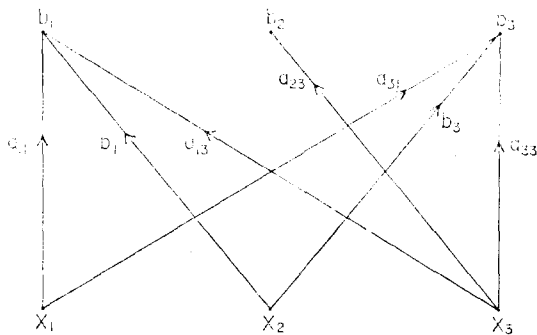


Fig. 4. The graph G_2

이상의 結果(Fig. 3과 Fig. 5)와 [4]式에 의거

$$x_2 = \frac{\sum_{r=1}^3 (\text{sign } S_{pr}) S_{pr}(G_2)}{\sum_{k=1}^3 (\text{sign } S_{pk}) S_{pk}(G)}$$

여기서 x_2 의 利得을 구하기 위하여 (2)에 의거 G_2 는 flow graph G에서 變數마다 X_2 의 모든 外向分岐를 제거하고 마디 X_2 에서 b_1, b_2, b_3 로 向한 分岐(이때 b_2 의 利得은 零이므로 b_2 로 向한 分岐는 존재치 않는다)를 부가시키면 Fig. 4와 같고 G_2 의 모든 分離와 그 分離積 $S_p(G_2)$ 는 Fig. 5와 같다.

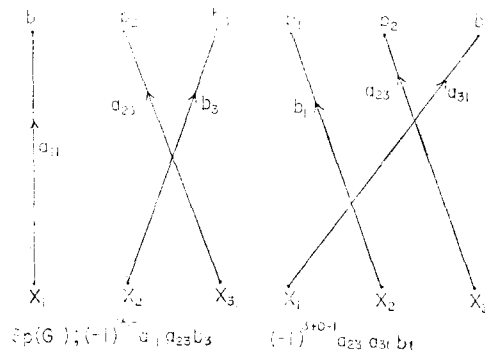


Fig. 5. The set of all the separation of G_2 and separation product $S_p(G_2)$

$$= \frac{(-1)^{3+0-1}a_{23}a_{31}b_1 + (-1)^{1+1-1}a_{11}a_{23}b_3}{(-1)^0a_{11}a_{22}a_{33} + (-1)^{3+0-1}a_{12}a_{23}a_{31} + (-1)^{1+1-1}a_{13}a_{22}a_{31}}$$

$$= \frac{a_{23}a_{31}b_1 - a_{11}a_{23}b_3}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31}}$$

로써 CHAN-MAI graph에 의해 복잡한 數式을 일세 거치지 않고 flowgraph란으로써 기계적으로 解를 구할 수 있음을 알 수 있다.

CHAN-MAI graph의 電氣機械系の 適用

이상에서 전개된 理論을 근거로 하여 상호인덕탄스를 가지지않는 [受動回路網에 이를 適用시키기 위하여 다음과 같은 새로운 연산법을 얻을 수 있다.

우선 임의의 變數에 대한 利得을 구하기 위하여서는 flow graph G와 graph G_j를 구할 필요가 있다. 마더 어드미탄스 行列의 行列式에서 각 要素의 位置와 flow graph G의 分岐사이에는 정확히 1:1의 대응이 成立한다는 事實에서 flow graph G와 graph G_j는 다음과 같은 機械的인 順序를 따르므로써 쉽게 構成할 수 있다.

(a) 回路網 N에서 基準마더를 선정하고 그의 마더는 v₁, v₂, …, v_n의 번호를 붙인다. 여기서 N에서의 마더의 총수는 (N+1)이다.

(b) 上端에 常數마더 b₁, b₂, …, b_n을 배열하고 下端에 v₁, v₂, …, v_n을 배열한다. 그리고 v_j와 b_j(단 j=1, 2, …, n)가 수직이 되게 배열한다.

(c) 마더 v_j에서 마더 b_j(j=1, 2, …, n)로 향하는 수직分岐의 分岐利得은 마더 v_j에 연결된 모든 어드미탄스의 合과 같이 한다.

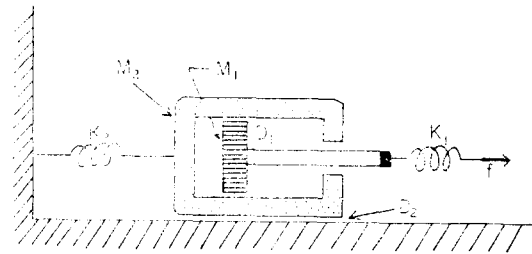
(b) 回路網 N에서 마더 v_i와 v_j(단 i≠j)사이에서 연결된 分岐에 대응하여 graph G에서 마더 i와 j사이에는 반드시 하나의 대칭쌍이 존재하며 쌍의 각 分岐는 N에서의 마더 v_i와 v_j사이에서 연결된 모든 어드미탄스의 合에 負의 부호를 붙인 것과 같은 分岐利得을 갖게 한다. 이상의 方法에 의해 구해진 것이 graph G가 됨은 명백하다.

다음에 graph G_j는 G에서 바로 구할 수 있다.

우선 G에서 마더 v_j에서 출발한 外向分岐를 제거한다. 단일 回路網 N에서 마더 v_i(i=1, 2, n)에 연결된 電流源이 있으면 G_j에는 반드시 마더 v_j에서 마더 v_i에 연결된 分岐가 존재하고 이 分岐의 利得은 N에서 마더 v_i에 연결된 分岐가 존재하고 이 分岐의 利得은 N에서 마더 v_i에 연결된 電流源의 合과 같다. 여기서 부호는 電流源이 마더 v_i방향으로 가와와지면 (떨어지면)正(負)의 부호를 갖게 한다. 이상의 方法에 의해 구해진 것이 graph G_j가 된다.

【예제2】 Fig. 6과 같은 機械系에서 M₁에 作用하는 속도 u₁를 구하라.

우선 이 系의 電氣的 analogy를 구하기 위하여 force-current 變換에 의해 電氣的 回路網을 構成하고 다시 이 回路網의 素子를 Laplace 變換시킨 結果의인 回路網은 Fig. 7과 같다.



K₁, K₂ : Spring compliance
M₁, M₂ : Mass
D₁, D₂ : Damping coefficient
f : Applied force

Fig. 6. The model of mechanical system connected spring and piston.

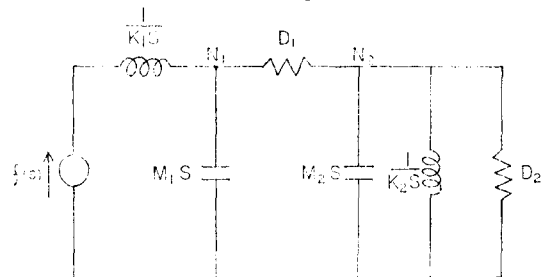


Fig. 7. The electrical network of Fig. 6.

CHAN-MAI GRAPH에 의한 機械-電氣系의 解析

M_1 에 作用하는 속도 u_1 을 구한다는 것은 $f-i$ analogy에서 구한 回路網에서는 마다 N_1 에서의 전압 V_1 을 구하는 것이 되므로 3의 방법을 그대로 적용해서 flow graph G 를 구하면 Fig. 8과 같다.

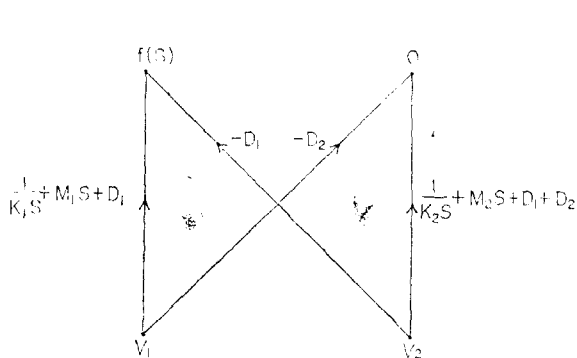


Fig. 8. The flow graph G of Fig. 7

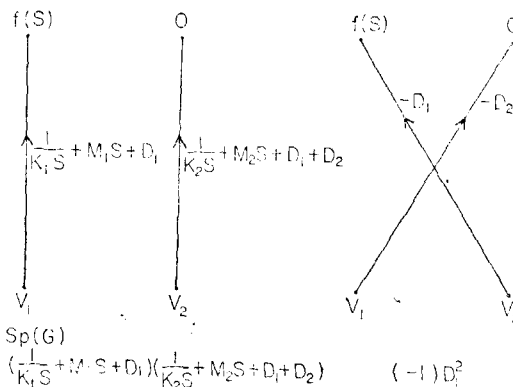


Fig. 9. The set of all the separations of G and separation product $S_p(G)$

이 graph G 의 모든 分離와 分離積을 구하면 Fig. 9와 같다.

여기서 3의 방법에 의해 G_2 의 모든 分離와 分離積을 구하면 Fig. 10과 같다.

이상의 結果에서 [4]式을 적용하면

$$u_1(s) = V_1(s) = \frac{\sum_{r=1}^3 (\text{sign } S_{pr}) S_{pr}(G)}{\sum_{k=1}^3 (\text{sign } S_{pk}) S_{pk}(G)}$$

$$= \frac{f(s)(\frac{1}{K_2 S} + M_2 S + D_1 + D_2)}{(\frac{1}{K_1 S} + M_1 S + D_1)(\frac{1}{K_2 S} + M_2 S + D_1 + D_2) - D_1^2}$$

[예제 3] Fig. 11에서 電源電流가

$i_s(t) = 10(\cos 2t + 30^\circ)$ 인 경우 網電流 I_3 을 구하라

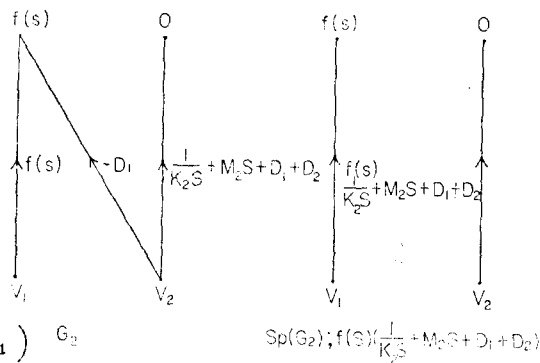


Fig. 10. The graph G_2 and the set of all the separation of G_2 and separation product $S_p(G_2)$

이 回路網의 網電流 I_3 을 구하기 위하여 Norton의 等價回路를 구하면 Fig. 12와 같이 된다.

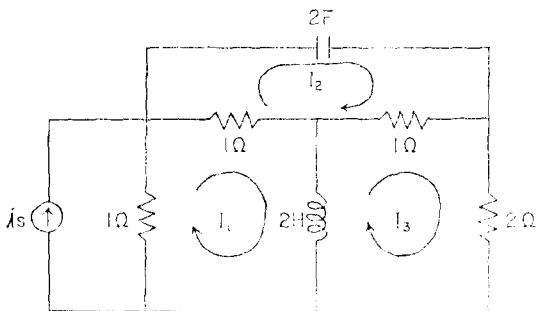


Fig. 11. The network of Example 3.

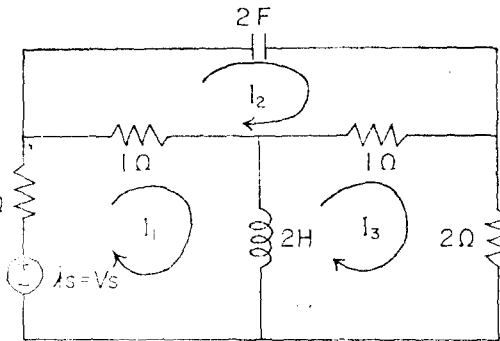


Fig. 12. The Norton equivalent circuit of Fig. 11.

朴 正 后

Fig. 12에 3의 方法을 적용시키기 위해서 回路의 Duality를 이용하여 graph G 를 구하면 Fig. 13과 같고 G 에서 모든 分離와 分離積을 구한 것이 Fig. 14 이고 G 에서 G_3 을 구하면 Fig. 15와 같고 G_3 에서 모든 分離와 分離積을 구하면 Fig. 16과 같이 된다.

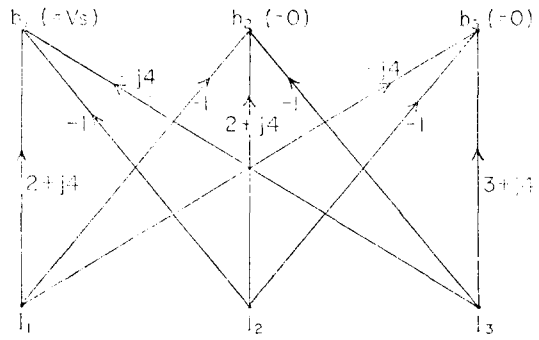


Fig. 13. The graph G of Example 3.

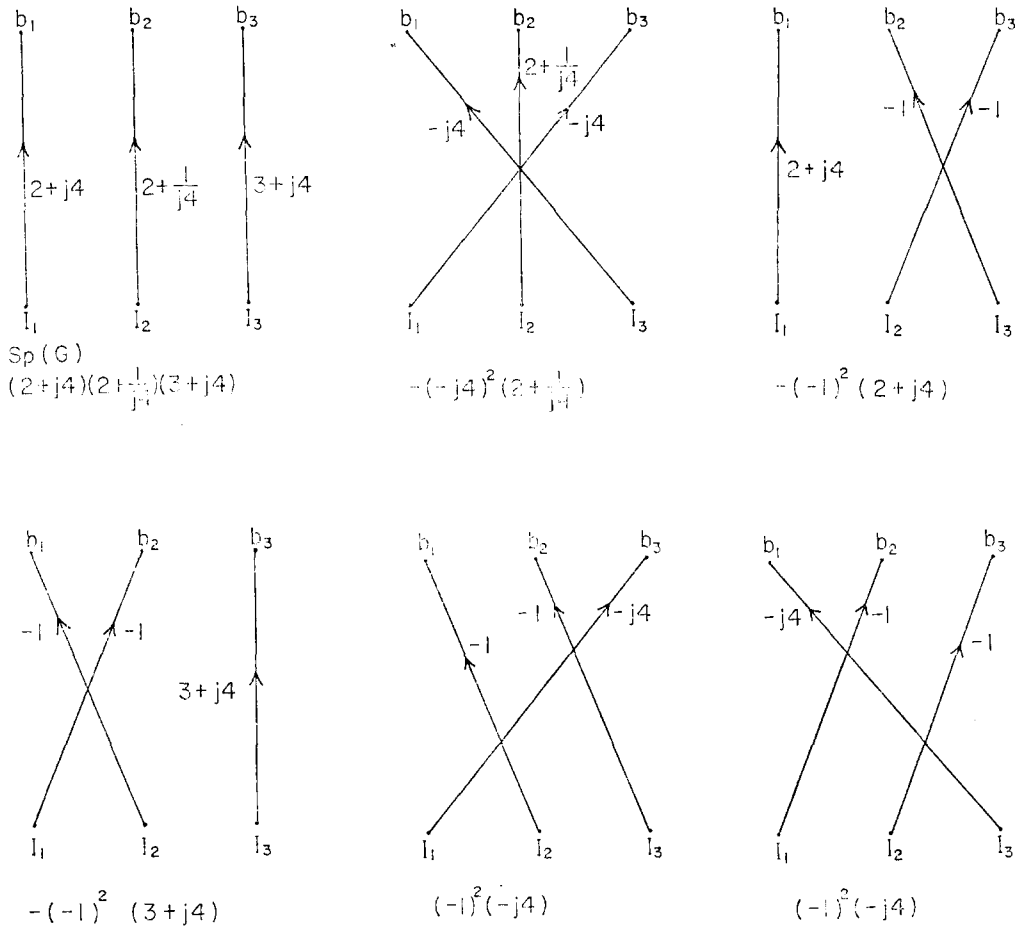


Fig. 14. The set of all the separation of G and separation product S_p .

CHAN-MAI GRAPH에 의한 機械-電氣系의 解析

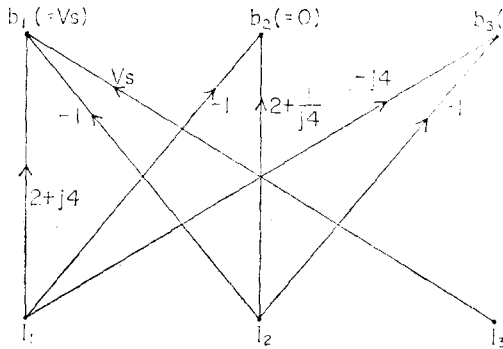


Fig. 15. The graph G_2 obtained from graph G

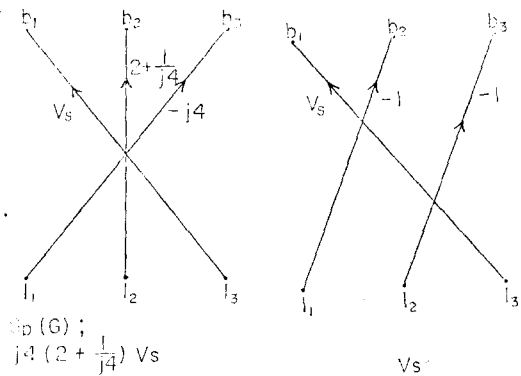


Fig. 16. The set of all the separation of G_2 and separation product $S_p(G_2)$.

이상의 結果에서 [4]式을 적용하면

$$I_3 = \frac{j4(2 + \frac{1}{j4})V_s + V_s}{(2+j4)(2 + \frac{1}{j4})(3+j4) - (-j4)^2(2 + \frac{1}{j4}) - (2+j4) - (3+j4) - j4 + (-j4)}$$

$$= \frac{2+j8}{12+j22.5} V_s$$

이 얻어지고 다른 網電流도 구할 수가 있다.

上記의 例題에서 알수 있는 바와 같이 임의의 變數에 대한 利得을 3의 方法을 적용 시키므로써 수식을 적용시키지 않고 機械, 電氣系에서 바로 구할 수가 있다.

結 論

CHAN MAI graph에서 도입한 새로운 graph의 構成法을 이용하여 機械, 電氣系를 解析하면 다음과 같은 結論을 얻는다.

(1) 종래의 數式化시켜 얻어진 graph에서 다시 位相數點의인 性質을 이용하여 利得을 구하는 복잡한 方式을 代替하고 이 方法은 回路網에서 直接 얻어지는 graph에서 복잡한 數式을 거치지 않고 바로 任意變數에 대한 利得을 精確하고 簡單하게 구할 수 있다.

(2) 機械系를 電氣系로 變換시키므로써 機械系의 解析도 이 方法을 적용시켜 임의의 利得계산이 가능하다.

(3) 任意 同次線型方程式의 解析은 이 graph에 적용시키므로써 數式을 사용하지 않고 任意變數에 대한 解를 直接 얻을 수 있다.

References

Chan, S. P and H. N. Maii (1967): A flow-graph method for the analysis of linear systems. IEEE Trans. Circuit Theory, 900-917.
 Chan, S. P., S. Y. Chan and S. G. Chan (1971): Analysis of linear networks and systems. Addison-Wesley Pub. Co. Nov. 28-133.
 Cheng D. K. (1966): Analysis of linear systems. Addison Wesley Pub. Co. 106-109.
 oCates, C. L. (1959) Flow graph solutions of linear algebraic equations. IRE, Trans. Circuit

补 正 后

- Theory. Sep. CT-6, 170-187.
- Koenig, H.E. and W.A. Blackwell (1961): Electromechanical system theory. McGraw-Hill Book Co., Inc. 42-53.
- Mason, S. J. (1953): Feedback theory. McGraw-Hill Book Co., Inc. 42-53.
- Mason, S. J. (1953): Feedback theory-Some properties of signal flow graphs Proc. IRE. 41, 1144-1156.
- Mason, S. J. (1956): Feedback theory-Further properties of signal flow graphs. Proc. IRE. 44, 920-926.