<資 料>

有限要素法과 地下水의 水理解析

Analysis of Ground Water hydraulics due to Finite element method

崔 榮 博
Choi, Young Bak

1. 머릿말

최근 構造工學分野에 있어서 電子計算機를 응용한 matrix 解析의 急激한 進展에 수반하여 有限要素法이 地下水의 水理問題에 活潑하게 응용하게 되었다. 이와 같은 경향은 當然하고 또한 우리나라에 있어서도 매우 소망스러운 것으로서 河川堤防 또는 河口堰, 필쩔댐의 浸透流問題解析 및 設計, 工事用假排水路施工管理에 있어서 有限要素法에 의한 地下水의 水理問題 解決은 그 眞價를 잘 發揮할 수 있을 것이라고 기대된다. 本文에서 問題하고 싶은 것은 多孔體중의 浸透流解析으로서 이는 場의 問題로서 벌써 外國에서는 널리 알려져있는 것이다. 이것은 처음 Zeinkiewicz 등이 熱傳導, 均一斷面棒의 비틀림, 浸透流問題 기타에 나타나는 quasi-harmonic type 의 偏微分方程式의 境界値問題에 응용한 것에서 시작되어 Rayleigh-Ritz 혹은 Galerkin 法의 擴張으로서 汎函數의 直接法의 一種으로서 體系化되었다.

그리하여 Zeinkiewicz 등에 의하여 다시 異方性浸透流問題에 응용되었는데 그는 論文에서 포텐셜分布만이 아니고 流線의 決定方法에 대하여도 그 可能性을 示唆한 바 있다. 또한 Finn 및 Tayler 는 浸透流에 관한 가장 困難한 문제의 하나인 自由水面을 가진 흐름에 대해서도 그 解析을 試圖한 바 있다. 그러나 이들 大部分의 研究는 모두 Darcy 의 法則에 따르고 있다. 한편 非 Darcy 흐름에 응용된 것으로는 Volker, McCorquodale 등의 研究가 있고 나아가서는 근자에 定常 및 非定常流에 걸쳐서 幅넓게 出版된 單行本도 있다.

이와같이 다방면으로 응용되고 있는 有限要素法의 큰 特徵으로서는 解析領域의 形狀에 의하지 않은 것, 또한 構成材料의 特性에 거의 관계가 없는 것과 또한 對象이 되는 現象을 模擬(sumilate)하는데 매우 안성마춤이라는 點 등이다.

이상의 여러가지 有限要素法의 地下水理問題에의 응용에 대한 情況에서 本稿에서는 될 수 있는데 많은 水文·水理專攻者에게 理解하기 쉽도록 가볍게 論說하고저 한다. 될 수 있는데 數學的으로 嚴密한 理論的인 記述은 삼가하고 有限要素法의 思考方式, 特徵 및 具體的인 計算手法 등 堤體浸透問題를 中心的인 解析例로 하여 앞으로 우리나라 水理構造物設計에 있어서 有限要素法의 展望에 대하여 간략하게 논술코저 한다.

2. 有限要素法의 原理와 特徵

有限要素法의 基本的인 思考方式은 無限한 自由度를 가진 連續體나 連續場(自然地盤이나 흙 構造物은 嚴密하게 말하면 粒狀體 등의 集合이나 많은 경우 連續體로서 취급됨)을 가진 有限個의 要素(element)로 分割하여 有限의 自由度를 가진 集合體로 近似케하여 취급하는데서 시작된다. 후술할 그림—3 의 堤體浸透에 대하여 말하면 連續의 場인 浸透領域 ABCD 를 3 角形의 要素(3 角形이 아니고 4 邊形의 要素로 취급해도 좋다)로 分割한다.

각 要素內에서의 透水係數나 貯溜係數등은 一定이고 또한 각 要素는 節點(node)로서 連結되고 있다. 이 節點을 통해서 水頭 혹은 應力, 變位의 傳達이 일어나는 것이라고 가정하는 것이 된다.

또 각 要素內에서의 水頭 혹은 應力, 變位의 分布는 많은 경우 후술할 식 (9)와 같은 位置의 1 次函數로서 가정된다. 따라서 當然한 것이지만 要素를 작게 하면 작게할수록 현실의 狀態에 가까워지며 높은 精度를 얻을 수 있다.

水頭이든, 應力 또는 變位이든 전체로서는 位置에너

本會副會長, 高麗大理工大敎授, 理學博士, 技術士(河川)

지가 最小가 되는 거와같은 分布를 하는 것은 變分原理 이란 이름으로 잘 알려져 있다.

浸透 立場에서 말하면 가장 흘러가기 쉬운 狀態, 즉 位置에너지가 最小가 되는 거와 같은 水頭分布로서 流動한다고 생각하면 좋다.

이상에서 생각한 思考方式과 原理에 따라서 數式으로 나타내어 數値計算을 실시하는 것이 有限要素法의 解析이다.

그 數値計算量은 매우 크게 되므로 일반으로 電子計算機가 사용된다.

有限要素法에 대하여 우리들이 옛부터 알고 있는 差分法(Finite difference method)이 있는데 이것은 數式上으로 近似를 실시하는데 대하여 有限要素法은 物理量分布의 近似를 실시하는 點에서 兩者는 根本的으로 상이하다. 또 解法의 汎用性이란 點에서 有限要素法이 훨씬 우수하다. 특히 差分法의 Net-work는 보통 正方形 따로는 矩形으로 限定되는데 대하여 有限要素法의 경우에는 2次元問題에 대하여는 任意의 3角形이나 4邊形의 要素, 3次元問題에 대하여는 3角錐나 6面體등이 사용되므로 境界形이나 境界條件이 복잡한 경우에도 잘 適用된다.

특히 水理構造物에 있어서 복잡한 境界, 地盤의 不均質이나 異方性이 重要視되는 問題가 많고 이 點으로서 有限要素法의 眞價가 發揮된다.

3. 浸透流에 있어서 有限要素法

本稿에서는 아직 matrix에 익숙하지 못한 技術者에게도 參考가 되도록 다른 文獻에서 보는 matrix表示와 다른 方法으로 처음에는 쉽게 有限要素法에 의한 浸透問題의 解法을 記述코저 한다. 물론 本質的으로는 matrix表示의 것과 相異한 것은 아니며 同一한 것임은 두말 할 것도 없다.

3.1 有限要素法에 있어서 變分原理

그림—1에 表示하는 浸透領域 R(후술할 그림—3에서는 ABCD)內에 定常浸透流가 Darcy의 法則에 따르는 것이라고 하면 다음 式 (1)이 성립한다.

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x\frac{\partial h}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_y\frac{\partial h}{\partial y}\right)-q=0 \cdots\cdots(1)$$

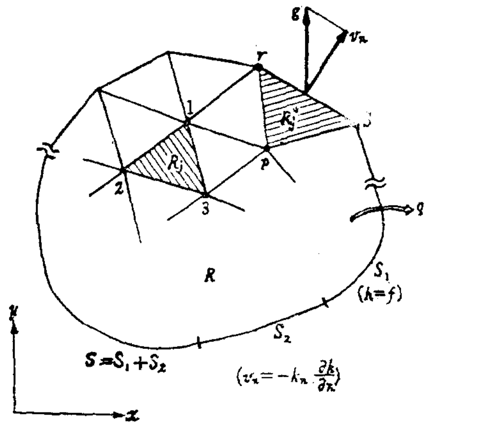
여기서

h: 水頭

k_x, k_y: 각각 x, y 方向의 透水係數

q: 물이 流出하는 量(流入이면 —값이 됨)

(x,y)는 直角座標系로서 앞으로는 y軸은 鉛直上方向으로 취한다.



그림—1 領域, 境界, Net-work

또 境界 S는 다음의 S_1型과 S_2型의 2種類로 나눈다.

(a) 境界上에서 水頭 f가 주어지는 경우(S_1型) : 예컨데 그림—3에서 AB, CE, ED가 이것에 상당한다.

$$h=f: \text{ on } S_1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

(b) 境界上에서 流出(혹은 流入)의 流速 v_n이 주어지는 경우(S_2型) : 예컨데 그림—3에서 AC, BD가 이것에 상당한다.

$$-k_n\left(\frac{\partial h}{\partial n}\right)=v_n: \text{ on } S_2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

여기서

n: 境界에서 直角外方向을 나타낸다. 특히 不透水境界의 경우에는 $v_n=0$이 된다(그림—3의 BD).

自由地下水面 AC에 대하여는 降雨浸透量이 주어지는 경우는 S_2型이며 또 水面의 위치가 결정되면 水頭가 自然히 결정되므로 S_1型으로도 된다.

다음에 앞에서 논술한 變分原理에 의하면 浸透領域 R에 대하여 식 (1)을 푼다는 것은 다음의 函數 V(汎函數 functional이라고 한다)을 最小로 하는 거와같은 h의 分布를 구하는 問題와 等値된다(詳細한 것은 數學의 變分法 參照할 것).

$$V=\frac{1}{2}\iint_R\left[k_x\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)^2+k_y\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)^2+2qh\right]dxd_y$$
$$+\int_{S_2}v_n h ds \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

여기서 S는 境界에 따라서 취한다. 식 (4)의 V가 極値가 되기 위한 條件으로서

$$\partial V=0 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

가 성립되지 않으면 안된다.

지금 임시로 식 (1)의 解, 즉, 식 (5)의 解가 다음

식 (6)과 같이 n個의 未知의 parometer(h_1, h_2, ……, h_n)으로 표시된다고 한다.

$$h=h(x,\ y,\ h_1,\ h_2,\ \cdots\cdots,\ h_n)\ \cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

식 (6)을 식 (4)에 대입해서 다시 식 (5)를 적용하면

$$\partial V=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial h_i}\delta h_i=0\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

로 된다. 식 (7)은 變分 δh_i의 모든 組立에 대하여 성립되어야 하므로 결국 다음 식 (8)과 같이 n個의 方程式을 얻는다.

$$\frac{\partial V}{\partial h_i}=0(i=1,2,\ \cdots\cdots,\ n)\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

식 (8)은 n個의 變數(h_1, h_2, ……, h_n)을 n個의 方程式으로 푸는 것이므로 解가 求하여지고 이들 解를 식 (6)에 代入하면 식 (1)의 解 h의 座標(x,y)의 函數로서 求하여지는 것이 된다.

3.2 有限要素에 의한 表示와 計算公式

위에서 기술한 變分原理를 有限要素와 그 集合體에 대해서 適用하여 보기로 한다.

그림—1과 같이 領域 R을 3角形의 要素로 分割한다. 이들 要素中 S_2型의 境界에 面하지 않는 要素에 대하여 생각하여 이것을 R_j로 한다. 이 要素內에서의 水頭分布가 다음 식 (9)와 같이 (x,y)의 1次函數로서 나타낸다고 가정하면

$$h=\alpha_1x+\alpha_2y+\alpha_3\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

여기서 α_i: 定數

즉, 水頭를 높이로 표시하면 要素內의 水頭分布는 3角形의 平板이 된다.

要素 R_j의 節點(1,2,3)에 있어서 각 水頭(h_1, h_2, h_3)를 식 (9)에 代入하여 係數(α_1, α_2, α_3)를 구하면

$$\left.\begin{aligned}\alpha_1&=(a_1h_1+a_2h_2+a_3h_3)/2\Delta\\ \alpha_2&=(b_1h_1+b_2h_2+b_3h_3)/2\Delta\\ \alpha_3&=(c_1h_1+c_2h_2+c_3h_3)/2\Delta\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$

여기서

$$\begin{cases}a_1=y_2-y_3\\ a_2=y_3-y_1\\ a_3=y_1-y_2\end{cases}\quad\begin{cases}b_1=x_3-x_2\\ b_2=x_1-x_3\\ b_3=x_2-x_1\end{cases}\quad\begin{cases}c_1=x_2y_3-x_3y_2\\ c_2=x_3y_1-x_1y_3\\ c_3=x_1y_2-x_2y_1\end{cases}$$

$$\Delta=|x_1(y_2-y_3)+x_2(y_3-y_1)+x_3(y_1-y_2)|/2$$

Δ: 要素 R_j의 面積

다음에 식 (10)을 식 (4)의 右邊의 第1項에 代入하여 정리하면

$$U_j=\frac{1}{2}(k_x\alpha_1{}^2+k_y\alpha_2{}^2)\iint_{R_j}dxdy+q\iint_{R_j}(\alpha_1x+\alpha_2y+\alpha_3)dxdy=\frac{\Delta}{2}(k_x\alpha_1{}^2+k_y\alpha_2{}^2)+\frac{q\Delta}{3}$$
$$\alpha_1(x_1+x_2+{}_3)+\alpha_2(y_1+y_2+y_3)+3\alpha_3\}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

단, 각요소내에서 k_x, k_y, q는 一定이다. 식 (11)의 제1항은 식 (10)에서 h_1, h_2, h_3의 2次函數이며 제2항은 제1차함수가 된다. 따라서 식 (10)을 식 (11)에 대입해서 정리하면 다음 식 (12)와 같이 표시된다.

$$U_j=\sum_{k=1}^{3}\left(\sum_{l=1}^{3}P_{kl}{}^jh_kh_l+Q^jh_k\right)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(12)$$

여기서 $P_{kl}{}^j=(k_xa_ka_l+k_yb_kb_l)/4\Delta$

$$Q^j=\frac{\Delta}{3}q$$

다음에 S_2型이 境界에 面하고 있는 要素 R_j*에 대하여 생각하기로 한다. 즉, 이 경우는 식 (12)에 보태어서 식 (4)의 右邊의 제2항을 고려하지 않으면 안된다. 堤體浸透의 경우로 말하면 自由地下水面에 面한 要素가 對象이 된다.

그림—1에 표시하는 바와 같이 S_2는 境界面에 直角인 方向이 流速 v_n을 鉛直方向成分 g와 境界面에 平行한 成分으로 分解하면

$$v_nds=gdx\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(13)$$

으로 되고 따라서 그림—1의 要素 r,S,P에 관하여 식 (4)의 제2항 U_j*는

$$U_j{}^*=\int_{x_r}^{x_s}ghdx(x_s>x_r)\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(14)$$

와 같이 계산된다.

$x_s\geq x\geq x_r$의 범위에서 S_2境界$(r-S)$에 따라서 h와 마찬가지로 g가 linear로 變化하는 것이라고 가정하면

$$U^*=\int_{x_r}^{x_s}\left[\frac{x_s-x}{x_s+x_r}h_r+\frac{x-x_r}{x_s-x_r}h_s\right]\times\left[\frac{x_s-x}{x_s-x_r}g_r+\frac{x-x_r}{x_s-x_r}g_s\right]dx$$
$$=\frac{1}{6}(x_s-x_r)[(2g_r+g_s)h_r+(2g_s+g_r)h_s]$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(15)$$

간단하게 要素內에서의 g는 一定이라고 가정해서 계산하는 경우가 많고 이경우에는 식 (15)는 다음 식 (16)과 같이 된다.

$$U_j{}^*=\frac{g}{2}(x_s-x_r)(h_s+h_r)\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(16)$$

식 (15) 또는 (16)을 다음 식 (17)과 같이 표시한다.

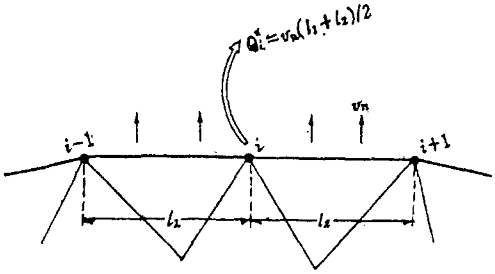
$$U_j{}^*=\sum_{r,s}Q_j{}^*h_j\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(17)$$

여기서 Q_j*는 식 (15) 또는 식 (16)을 대비하면 明白하다. 식 (12), (17)을 領域內의 모든 要素에 대해서 보태면 식 (4)의 汎函數 V가 구하여진다.

$$V=\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}P_{kl}h_kh_l+\sum_{k=1}^{n}Q_kh_k+\sum_{k=1}^{n}Q_k{}^*h_k\cdots(18)$$

여기서 n: 領域內의 節點의 數

식 (18)을 식 (8)에 代入해서 정리하면 P_{ij}는 對稱이므로 결국 다음 식 (19)가 얻어진다.



그림—2 S_2 型境界의 물收支

$$\sum_{j=1}^{n} P_{ij}h_j + Q_i + Q_i{}^* = 0 \, (i=1, 2, \cdots\cdots, n) \cdots (19)$$

식 (19)는 變數가 n 個인 n 元 1 次의 聯立方程式이므로 解 h_1, h_2, ……, h_j 가 결정된다.

여기서 식 (19)의 Q_i, $Q_i{}^*$의 具體的인 意味를 생각하면 Q_i 에 대하여는 節點 i 에 의하여 連結되고 있는 要素에 대한 流出量(q 에 面積을 곱한 것)의 1/3을 그 節點 i 에 있어서 流出量으로 代表化하고 있다. 또 $Q_i{}^*$ 는 그림—2에 나타내는 바와같이 S_2 境界를 지나서 流出되는 量을 節點의 流出量으로서 代表化하고 있다. 따라서 그림—2에 있어서 관계는 $Q_{i*} = v_n(l_1 + l_2)/2$ 로 된다.

3.3 自由地下水面의 位置를 求하는 方法

自由地下水面의 浸透流에 대하여는 그 自由地下水面의 位置를 구하는 것이 매우 어려운 문제로 되어있다. 自由地下水面상에서는 壓力水頭가 0으로서 位置水頭만이므로

$$h = Y(x) \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (20)$$

여기서 Y: 自由地下水面의 y 座標

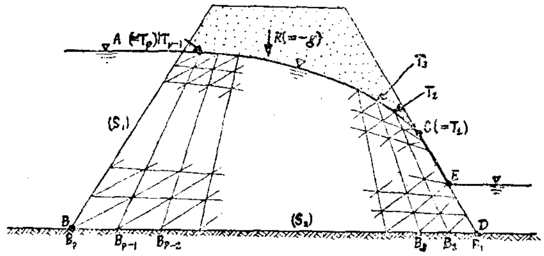
有限要素法에 의한 定常浸透流이 自由地下水面의 決定은 다음과 같은 順序로 反復計算하여 求한다.

① 먼저 처음으로 어느 自由地下水面을 가정한다.

② 다음에 그 自由地下水面을 S_2 型의 境界로 하여 식 (19)를 사용하여 가정한 自由地下水面上의 水頭 h_s 를 계산한다.

③ 가정한 自由地下水面의 y 座標 Y 와 ②에서의 水頭의 計算值 h_s 를 비교하고 $h_s > Y$ 의 경우에는 가정한 自由地下水面을 $\alpha(h_s - Y)/2$ 만큼 윗쪽으로 이동시킨다. 또한 $h_s > Y$ 인 경우는 $\alpha(Y - h_s)/2$ 만큼 아래쪽으로 이동시킨다. 定數 α 는 收斂을 빠르게 하기 위하여 1.1의 값을 취하는 경우가 많은데 이것을 relaxation factor 라 한다.

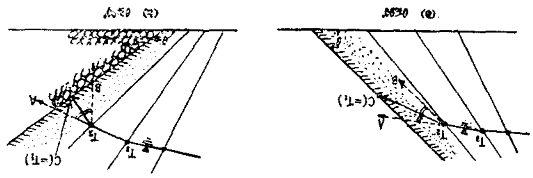
①～③의 順序를반복하고 $|Y - h_s| < \varepsilon$: 許容誤差의 값이 만족될 때 이것을 正確한 自由地下水面의 位置로 한다. 그림—3 의 Net-work 에 대하여 기술하면 가정한 自由地下水面上의 節點 T_2, T_3, ……, T_{p-1} 에 대하여 상술한 ①～③의 順序에 대한 操作을 하고 각각 $(T_2 - B_2)$, $(T_3 - B_3)$, ……, $(T_{p-1} - B_{p-1})$에 따라서 上下로 이동시킨다. 그때마다 새로운 Net-work 를 組成하는 作業이 필요하다. 그리고 節點 p 의 위치는 既知이고 또 T_1 은 浸出點 C 이므로 이 浸出點에 대하여는 다음 節에서 논술한다.



그림—3 堤體浸透에서 있어서 有限要素分割의 한계

3.4 浸出點의 位置求하기

그림—3에 표시한 C 點 즉, 浸出點은 自由地下水面의 特別點으로 有限要素法에 의한 數值解析으로 이 浸出點을 구하는 方式을 논술하기로 한다.



그림—4 浸出點의 型(a),(b)와 그 位置求하기

Finn 은 自由地下水面을 결정하는데 있어 浸出點의 位置를 임의로 이동시켜 試行錯誤法에 의하여 구하고 있다. 또 Kawamoto 는 自由地下水面上의 水頭의 계산치 h_s 와 Y 를 비교해서 自由地下水面을 이동시켜 가서 그 水面上의 節點이 처음 堤體밖으로 삐어져나오는 點을 조사하여 浸出點을 결정하고 있다.

또한 Kono 는 水平排水溝內의 浸出點의 位置決定 그기에다 非定常浸透流의 解析에도 편리하도록 다음과 같은 方法으로 浸出點을 결정하였는데 이것을 소개하면 다음과 같다.

浸出點을 그림—4와 같이 (a) $\theta \leqq 90°$, (b) $\theta > 90°$의 경우로 나누어서 생각하였는데 여기서 θ: 浸出點에 생기는 斜面의 傾斜이다.

(a) $\theta \leqq 90°$의 경우 :

浸出點 C 가 만족될 條件은

① 自由地下水面上의 點일 것, ② 自由地下水面은 이 點에서 斜面에 接할 것

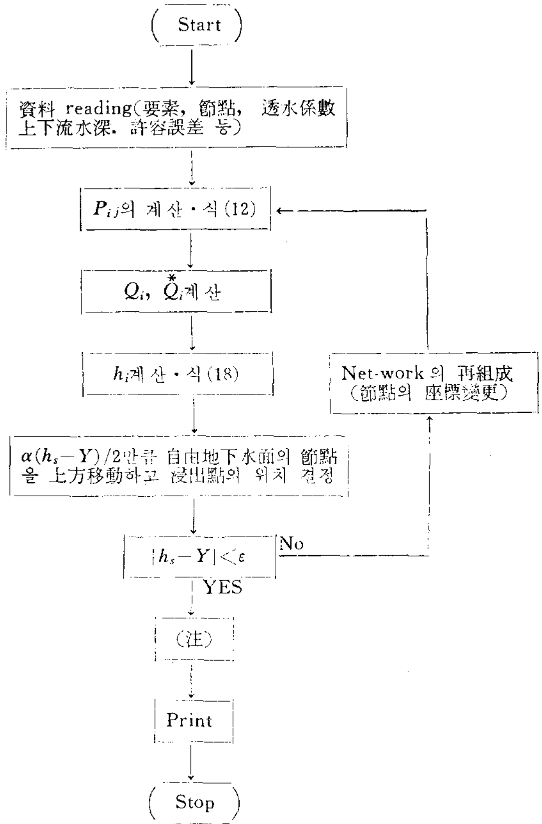
등이다. 이 ①, ②條件을 만족시킬 浸出點을 구하는近

似法은 다음과 같은 方法을 채용한다. 즉, 그림—4(a)에 나타내는 바와같이 自由地下水面上의 節點 T_3, T_2를 연결하는 直線의 延長線 A와 T_2를 지나서 斜面에 平行한 直線 B가 이루는 角을 2等分한다. 이 T_2를 지나는 2等分線이 斜面과 만나는 點 C를 浸出點으로 한다.

(b) $\theta<90°$의 경우 :

만족되어야할 條件은

① 自由地下水面上의 點일 것, ② 自由地下水面은



그림—5 有限要素法에 의한 定常浸透流解析 計算프로그램

(注) 浸透水壓, 應力 혹은 變形 등의 計算프로그램을 揷入해서 解析할 수 있다.

그 浸出點에 있어서 鉛直일 것 등이다. 따라서 (a)의 경우와 마찬가지로 直線(T_3-T_2)의 延長線 A와 T_2를 지나는 鉛直(下方)線 B와의 2等分線을 그어서 이 2等分線이 斜面과 만나는 點 C를 浸出點으로 한다. 물론 T_2, T_3節點의 위치는 3.3節에서 논술한 自由地下水面의 位置로서 구하여진 것이다.

3.5 計算프로그램의 Flow Chart

앞에서 논술한 堤體浸透의 一連의 計算은 물론 電子計算機프로그램에 의하여 실시되는 것이므로 그 Flow Chart를 표시하면 그림—5와 같다.

參考文獻

1) Zinkiewicz, O.C. and Y.K. Cheung: Finite elements in the solution of field problems, The Engineer, pp. 507~510, Sept. 24, 1965

2) Zinkiewicz, O.C. and Chung, Y.K.: The Finite element method in Structural and Continuum mechanics, Mc Grow Hill, 1967

3) Finn, W.D.: Finite element analysis of Seepage through dams, pro. ASCE, SM, Vol. 93, No. 2 pp. 25~33, 1967

4) Volker, R.E.: Non linear flow in prous media by finite elements, proc. ASCE, HY, Vol. 95, No. 6, pp. 2093~2114, 1969

5) McCorquodale, J.A. and H.C. Ng: Non-Darcy flow solved by finite element analysis, 13th Congress of the IAHR, Kyoto, Japan, Vol. 4, Subject D, pp. 347~355, 1969

6) Verrujjt, A: Theoryof ground water, McMillan, pp. 162~166, 1970

7) Kono, I: Analysis of Nonsteady Seepage problems by Finite element method, Report of Delft Tech. Univ., pp. 1~15, 1972