

非線形系の 安定度 判定에 關한 研究

(A Study on Judging Stability of Nonlinear Systems)

尹 在 剛
(Yoon, Jai Gang)

要 約

本論文은 非線形系の 安定度判定에 關한 Lyapunov, Malkin, Popov 等の 規範을 몇가지 實例를 들어 比較하고, 特別 어떤 系統에 流出入하는 energy을 考察하므로써, 그 系統의 安定度를 判定하는 方法을 重點의 으로 研究檢討하였다.

Abstract

In this paper, several criterias of Lyapunov, Malkin, Popov, etc. about stability of nonlinear systems are compared, and study on methods, through several examples, of judging the stability of nonlinear systems by considering the energy input into the system and the one put out of the system is concentrated.

1. Lyapunov 函數의 構成

制御系에 있어서의 非線形系을 行列形으로

$$\dot{x} = A_o x + A_{on}(x)x \quad (1)$$

와 같이 表示하고, Lyapunov 函數 V 을 다음과 같이 記述하기로 한다.

$$V(x) = x' M_o x + x' M_{on}(x)x \quad (2)$$

여기서, M_o 와 $M_{on}(x)$ 는 對稱行列이다. 上式의 時間 微分을 取하면

$$\dot{V}(x) = x' D_o x + x' D_{on}(x)x \quad (3)$$

여기서

$$D_o = A_o' M_o + M_o A_o \quad (4)$$

$$D_{on}(x) = A_{on}'(x) M_o + M_o A_{on}(x) + A_o' M_{on}(x) + A_{on}'(x) M_{on}(x) + M_{on}(x) A_o + M_{on}(x) A_{on}(x) + \dot{M}_{on}(x) \quad (5)$$

上式에서 添字 o 와 n 는 各各 그 系統의 階數와 非線形性의 個數를 意味한다.

M_o 는 對稱이므로 $x' D_o x = x' (A_o' M_o + M_o A_o)x$ 는 V 에 關한 限 $x' (2M_o A_o)x$ 와 等價일것이고, (4)式은 다음과 같이 簡素化할 수 있다.⁴⁾

$$D_o = 2M_o A_o \quad (4')$$

$V(x)$ 가 Lyapunov 函數가 되기 爲해서는 (1)式과 (2)式은 $V > 0$, $\dot{V} < 0$ 의 條件을 滿足해야 한다. A_o 行列은 負實(negative real)의 特性值를 갖일 것이고, M_o 는 正決(positive definite) 對稱일 것이고, $D_o = 2M_o A_o$ (負決行列)에 依하여 電算機에 依하여 具現할 수도 있다. 即 A_o 와 같은 特性值를 갖이는 對稱行列 P_o 을 擇 하고

$$C_o A C_o^{-1} = P_o \quad (6)$$

에 依하여

$$M_o = C_o' C_o \quad (7)$$

로 求할 수 있다. 行列 $M_{on}(x)$ 의 具現方法은 다음 例에서 알 수 있다. 몇 個 例를 들면

$$\begin{aligned} \dots \\ \dot{x} + a_3 \ddot{x} + a_2 \dot{x} + a_1 x + g(x) = 0 \end{aligned} \quad (8)$$

과 같은 非線形系를 狀態變數形으로 $x = x_1$ 라 놓고 고 치면

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ \dot{x}_3 &= -g(x_1) - a_1 x_1 - a_2 x_2 - a_3 x_3 \end{aligned} \quad (9)$$

(9)을 行列를 써서 記述하면

$$\dot{x} = A_3 x + A_{31}(x)x \quad (10)$$

여기서

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{pmatrix} A_{31}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -g(x_1)/x_1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

* 正會員, 建國大學校 工科學 電子工學科
Dept. of Electronic Eng., College of Eng.
Konkuk Univ.
接受日字: 1974年 9月 14日

行列 A_3 와 $A_{31}(x)$ 은 各各 (10)式의 線形部와 非線形部를 特徵지우고 있다. (4)式과 맞추기 爲해서 非線形函數를 같은 狀態變數에 關해서 取하면

$$M_{31}(x) = \begin{pmatrix} G(x_1)/x_1^2 & g(x_1)/x_1 & 0 \\ g(x_1)/x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (12)$$

여기서

$$G(x_1) = \int_0^{x_1} g(x_1) dx_1$$

亦是 $M_{31}(x)$ 도 對稱이 된다. 다른 例로

$$\dots + a_3 \ddot{x} + a_2 \dot{x} + f(x)x + a_1 x = 0 \quad (13)$$

인 非線形系를 들면, 行列形表示는

$$\dot{x} = A_3 x + A_{31}(x)x \quad (14)$$

여기서

$$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -a_1 & -a_2 & -a_3 \end{pmatrix}, A_{31}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -f(x) & 0 \end{pmatrix} \quad (15)$$

또 (12)式에 對한 $M_{31}(x)$ 는

$$M_{31}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & f(x_1) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (16)$$

亦是 $M_{31}(x)$ 는 對稱이 된다. $M_3, M_{31}(x)$ 에 依하여 求해진 $V(x)$ 는 充分條件을 滿足하며, 初期條件 $x(0)$ 는 收斂領域內에 있게 됨을 알 수 있다.^{1),4)}

2. Milkin의 漸近的 安定度規範

非線形系를

$$\dot{x}(t) = f(t, x) \quad (17)$$

와 같이 表示하고

$$\|f(t_1 x_1) - f(t_1 x_2)\| \leq \mu(t) \|x_1 - x_2\| \quad (18)$$

는 連續이라 하자.

Milkin의 漸近的解의 安定度規範은 Lyapunov函數에 類似한 $V(t)$ 을 構成하여 다음과 같이 말할 수 있다.

$$V(t) = \int_t^\infty \rho(\tau) \|x_1 - x_2\| d\tau, \quad 0 \leq t \leq \infty \quad (19)$$

여기서

$$\rho(t, \tau) = \exp\left[-\int_\tau^t \mu(s) ds\right], \quad t \geq \tau \geq 0 \quad (20)$$

系統 (17)은

條件 1)

$$R(t, \tau) \equiv \int_\tau^t \mu(s) \rho(s, \tau) ds \rightarrow \varepsilon, \quad t \geq \tau \geq 0$$

條件 2)

$$\int_\tau^t \rho(s, \tau) ds \leq C, \quad C > 0$$

을 滿足할때 漸近的으로 安定하다. Caly Hamilton 方

程式

$$\frac{\partial p(t, t_0)}{\partial t} = \mu(t)p(t, t_0), \quad t \geq t_0 > 0 \quad (21)$$

을 풀어 $p(t, t_0)$ 을 求하면 Lyapunov 函數 $V(t)$ 을 얻게 된다.³⁾

3. Levinson과 Smith法

航行때 나타나는 非線形系

$$\ddot{\theta} + 2\dot{\theta} \cos\theta + \sin\theta = 0 \quad (22)$$

의 安定度는 앞에서 든 方法들을 適用하기가 困難하다. 只今이 系統에 對한 energy 流出入을 考察하여 安定度를 檢討하기로 하자.

$$\begin{cases} W = \dot{\theta} + F(\theta) & \text{또는} & \begin{cases} \dot{\theta} = W - F(\theta) \\ \dot{W} = -g(\theta) \end{cases} \end{cases} \quad (23)$$

여기서

$$\begin{cases} f(\theta) = 2\cos\theta \\ F(\theta) = 2\sin\theta \end{cases} \quad \begin{cases} g(\theta) = \sin\theta \\ G(\theta) = -\cos\theta \end{cases}$$

로 擇하고

$$U = \frac{1}{2} W^2 + G(\theta) \quad [W, G \text{는 運動과 位置 energy}]$$

라 놓고, energy의 流出入을 考察하여

$$\begin{cases} \frac{dU}{d\theta} = W \frac{dW}{d\theta} + g(\theta) = \frac{-g(\theta)F(\theta)}{W - F(\theta)} \\ \frac{dU}{dW} = F(\theta) \end{cases}$$

을 利用하여 작은 θ 에 對한 U 의 變化와 W 의 變化를 $W-\theta$ 平面에서 檢討하면, 解曲線들은 原點(0, 0)에 向함을 알 수 있다.

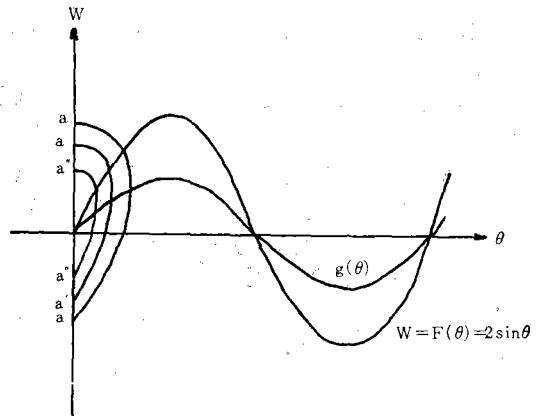


그림 1

$$\begin{aligned} U_a'' - U_d'' > 0, \quad W_a''^2 > W_d''^2 \\ U_a - U_d > U_a' - U_d' > U_a'' - U_d'' > \dots \end{aligned} \quad (25)$$

이다. 다음

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \frac{-1}{c}Z - \frac{2}{c}Z^2 \\ \dot{Z} = c\sin\theta \end{cases} \quad (26)$$

라 놓고, 相平面解析을 하면

$$\frac{dV}{d\theta} = \frac{-2V\cos\theta - \sin\theta}{V} = \frac{P}{Q} \quad (27)$$

여기서 P, Q는 θ, V 의 函數이다.

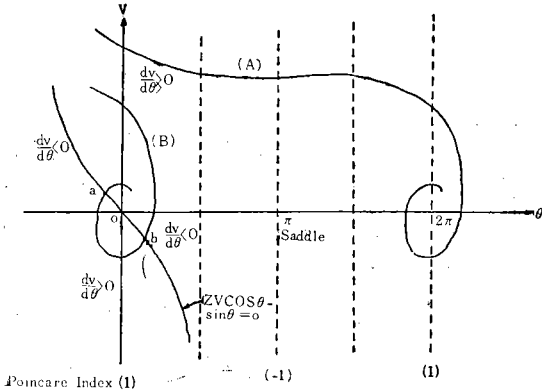


그림 2.

그림 2에서 보는 바와같이 Poincare Index을 計算하면 (0, 0)와 (0, 2n π)點들은 1이 되고, (0, π)와 (0, (2n+1) π)들은 -1이 되어 -1되는 點은 saddle點이 되는 것을 알 수 있으나, 1이 되는 點은 不確實하지만 앞에서 말한 energy의 流出入을 $2V\cos\theta - \sin\theta = 0$ 線上에서 (a點, b點등) 考慮하고, 그림 1의 方法을 並用하면 解曲線[(A), (B)등]의 傾度를 알 수 있게 되어, Poincare Index 1인 (0, 0)와 (0, 2n π)點들이 安定點이 됨을 알 수 있다. ^{1), 5), 2)}

또 (0, (2n+1) π) 附近에서의 解를 求하기 爲하여 (22)式을

$$\ddot{\theta} - 2\dot{\theta} - \cos\theta - \sin\theta = 0 \quad (28)$$

와 같이 쓰면

1) Perturbation 定理를 利用하여

$$\ddot{\theta} - 2\dot{\theta} - \theta + \beta\dot{\theta}^2 = 0 \quad (29)$$

에서 $\beta=0$ 라 노면 $\theta(t) = Ae^{(1+\sqrt{2})t} + Be^{(1-\sqrt{2})t}$ 가 되므로 이것을 (29)式에 넣어 近似解를 求하면

$$\begin{aligned} \theta(t) = & Ae^{(1+\sqrt{2})t} + Be^{(1-\sqrt{2})t} - \frac{2\sqrt{2}-1}{28} \\ & A^3e^{3(1+\sqrt{2})t} + \frac{1+2\sqrt{2}}{4}AB^2e^{(3-\sqrt{2})t} + \\ & \frac{1-\sqrt{2}}{4}A^2Be^{(3+\sqrt{2})t} + \\ & \frac{2\sqrt{2}+1}{28}B^3e^{3(1-\sqrt{2})t} \end{aligned} \quad (30)$$

2) Kryloff-Bogoliveoff法을 利用하여 (28)式을

$$\ddot{\theta} - 2\dot{\theta} - \theta = \beta f(\theta, \dot{\theta})$$

$$f(\theta, \dot{\theta}) = 2\dot{\theta}(\cos\theta - 1) + \sin\theta - \theta$$

라 놓고, $\beta=0$ 일 때의 解 $\theta(t) = Ae^{(1+\sqrt{2})t} + Be^{(1-\sqrt{2})t}$ 을 써서

$$\theta(t) = A(t)e^{(1+\sqrt{2})t} + B(t)e^{(1-\sqrt{2})t} \text{의 } A(t), B(t) \text{을 求하는 方法}$$

을 쓰면

$$\begin{aligned} \theta(t) = & Ae^{(1+\sqrt{2})t} + Be^{(1-\sqrt{2})t} - \\ & \frac{2\sqrt{2}-1}{28}A^3e^{3(1+\sqrt{2})t} + \\ & \frac{1+2\sqrt{2}}{4}AB^2e^{(3-\sqrt{2})t} + \\ & \frac{1-2\sqrt{2}}{4}A^2Be^{(3+\sqrt{2})t} + \\ & \frac{2\sqrt{2}+1}{28}B^3e^{3(1-\sqrt{2})t} \end{aligned} \quad (31)$$

여기서, A, B는 初期條件에 따르는 常數이다.

3) 返復法을 利用하여

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} - 2\dot{\theta} - \theta = 2\dot{\theta}(\cos\theta - 1) + \sin\theta = \\ \beta f(\theta, \dot{\theta}) \approx -\beta\dot{\theta}^2 \end{aligned} \quad (32)$$

$\beta=0$ 때의 解 $\theta(t) = Ae^{(1+\sqrt{2})t} + Be^{(1-\sqrt{2})t}$ 을 (32)式의 右邊에 代入하여 返復法을 써서 解를 求하면 (30), (32)式과 同一한 解를 얻게 된다.

이와 같이 1), 2), 3)의 方法에 依한 (0, 2(n+1) π)點附近의 近似解는 同一한 結果를 얻게 되며, 安定點이 많임(saddle 點)을 알 수 있다. ^{1), 2), 4)}

4. Lyapunov法과 Levinson法의 比較

(22)式은 Lyapunov法을 써서 解析하기 爲하여

$$V(t) = (C\theta + 2Z)^2 > \phi > 0$$

라 놓면

$$\dot{V}(t) = 2(C\theta + 2Z)(C\dot{\theta} + 2\dot{Z}) = 2(C\theta + 2Z)(-Z)$$

萬一 $|C\theta| < 2Z$ 또는 角度 θ 가 高度 Z에 比하여 작은 때는

$$\dot{V}(t) < \phi < 0$$

따라서 (0, 0)는 安定함을 알 수 있다.

여기서 固定點定理를 適用하여 작은 θ 에 對하여 解를 求하면

$$\begin{pmatrix} \dot{\theta} \\ \dot{Z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{C}x_2 - 2\sin x_1 \\ C\sin x_1 \end{pmatrix} = f(t, x) \quad (33)$$

$$\|f(t, x) - f(t, Z)\| \leq K \|x - Z\|$$

작은 θ 에 對하여는

$$K \approx 1 \text{임을 알 수 있고}$$

$$\rho(Tx, TZ) = Kt\rho(x, Z), Kt < 1$$

$0 < t < 1$ 라 假定하고

$$x_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ A \end{bmatrix}$$

로出發하여

$$x_1 = \int_0^t \begin{bmatrix} -\frac{1}{C}A \\ 0 \end{bmatrix} dt = \begin{bmatrix} -\frac{1}{C}At \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = \int_0^t f(t, x_1) dt = \int_0^t \begin{bmatrix} 2\sin\frac{A}{C}t \\ -C\sin\frac{A}{C}t \end{bmatrix} dt$$

$$= \begin{bmatrix} -\frac{2A}{C}\cos\frac{A}{C}t \\ \frac{C^2}{A}\cos\frac{A}{C}t \end{bmatrix}$$

$$x_3 = \int_0^t f(t, x_2) dt$$

$$= \int_0^t \begin{bmatrix} \frac{C}{A}\cos\frac{A}{C}t + 2\sin\left(\frac{2A}{C}\cos\frac{A}{C}t\right) \\ -C\sin\left(\frac{2A}{C}\cos\frac{A}{C}t\right) \end{bmatrix} dt$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{C^2}{A^2}\sin\frac{A}{C}t + \frac{4C}{A}J_1\left(\frac{2A}{C}\right)\sin\frac{A}{C}t \\ -\frac{2A}{C^2}J_1\left(\frac{2A}{C}\right)\cos\frac{A}{C}t \end{bmatrix}$$

따라서

$$\theta \approx \left[\frac{C^2}{A^2} + \frac{4C}{A}J_1\left(\frac{2A}{C}\right) \right] \sin\frac{A}{C}t \quad (34)$$

또 큰 θ 에 對해서는

$$\begin{cases} \dot{\theta} = \frac{-1}{C}Z - \frac{2}{C}\dot{Z} & \frac{dV}{d\theta} = \frac{-2V\cos\theta - \sin\theta}{V} \end{cases} \quad (35)$$

을 써서 거반 같은 結果를 얻게 된다.」

5. 結 論

非線形系의 安定度를 判定하는데는 그 系統을 表現하는 式模樣에 따라 適切한 方法을 擇함이 便利함을 알 수 있고, 上述한바와 같이 安定度判別의 規範은 여러가지가 있으나 長短이 있음을 알 수 있다. 實例를 들어 結果를 誘導하는데 重點을 두었다.

參 考 文 獻

1. H. Hochstadt: "Differential Equations," Holt, Rinehart and Winston Co., Inc., 1963, p. 234.
2. Thomas E. Stern: "Theory of Nonlinear Networks and Systems," Addison-Wesley Co., Inc., 1965, p. 332.
3. A.S.C. Sinha, W.J. Willians: "Asymptotic Stability of Solutions to Nonlinear Equations," proceedings of IEEE, April, 1972 p. 467.
4. Ralph Mekel, Patrick Peruo: "Design of Controllers for a Class of Nonlinear Control Systems," IEEE Transactions on Automatic Control, April, 1972, pp. 206-211.
5. C.E. Zimmerman: "Application of the Popov Criterion to Design of Nonlinear Systems," IEEE Transactions on Automatic Control, Feb. 1971, p. 77.