

SCR 發振回路의 非線形解析 (Nonlinear Analysis of SCR Oscillators)

朴 炳 哲*
(Bark, Byong Cheol)

要 約

SCR發振回路를 等價回路와 實驗式을 利用하여 2階의 非線形微分方程式으로 解析하고, 發振回路의 相軌道와 安定性을 考察했다. 發振波形은 高調波成分을 갖고 있고 狀況點은 軌道에서 平衡點을 向하고 있으므로 이 發振回路는 安定되고 있음을 알았다.

Abstract

The SCR oscillator is characterized by the second order differential equation which is consistent with both its equivalent circuit and its empirical formula.

It is found that the wave form of the SCR oscillator contains the components of higher harmonics and that this oscillator is stable since its representative point on the phase trajectory has the sense directed to the equilibrium point.

1. 序 論

SCR을 switching의 目的外로 SCR의 cathode 回路에 抵抗 R_b 를 연결하므로써 그림 1, 그림 2에서와 같이 gate回路에 負性抵抗特性을 갖음을 알았고, 이를 gate電壓과 gate電流사이의 關係(그림 3)를 3次式을 使用할 수 있음을 最近 著者에 依해서 指摘되었다.¹⁾ 여기서 van der Pol 方程式으로 만들어 보고류보프, 미트로프스키의 漸近法을 利用하여 그 解를 求하고, 位相平面으로 發振의 安定性을 살폈다.²⁾³⁾⁴⁾⁵⁾⁶⁾

2. 發振回路의 解析

그림 1, 2 및 3에서

$$i = \frac{1}{L} \int v dt + C \frac{dv}{dt} + Gv \quad [A] \quad (1)$$

$$i = av^3 + bv^2 + ca + d \quad [A] \quad (2)$$

$$\text{단 } \begin{cases} a_1 = 146.5 \times 10^{-3} \\ b = -390 \times 10^{-3} \\ c = 334.5 \times 10^{-3} \\ d = -93 \times 10^{-3} \end{cases}$$

가 成立한다.¹⁾ 이때 G 는 코일 L 의 損失分이나 發振器에 接續하는 外部負荷까지 包含하고 있다고 해도 좋다. 위의 두 式에서 (2)式을 (1)式에 代入하여 整理하면,

$$\begin{aligned} (3a_1v^2 + 2bv + c) \frac{dv}{dt} &= \frac{1}{L}v + C \frac{d^2v}{dt^2} + G \frac{dv}{dt} \\ C \frac{d^2v}{dt^2} + G \frac{dv}{dt} - (3a_1v^2 + 2bv + c) \frac{dv}{dt} + \frac{1}{L}v &= 0 \\ C \frac{d^2v}{dt^2} + \left\{ G - 3a_1 \left(v^2 + \frac{2b}{3a_1}v + \frac{b^2}{9a_1^2} \right) \right. \\ &\left. + \frac{b^2}{3a_1} - c \right\} \frac{dv}{dt} + 1Lv = 0 \end{aligned} \quad (3)$$

여기서, $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$, $\tau = \omega_0 t$ 로 變換, 無次元化하면,

$$\begin{aligned} \frac{d^2v}{d\tau^2} + \sqrt{\frac{L}{C}} \left\{ G - 3a_1 \left(v + \frac{b^2}{3a_1} \right)^2 + \frac{b^2}{3a_1} - c \right\} \frac{dv}{d\tau} \\ + v = 0 \\ \frac{d^2v}{d\tau^2} - \left(c - \frac{b^2}{3a_1} - G \right) \sqrt{\frac{L}{C}} \left\{ 1 - \frac{3a_1}{\left(G + \frac{b^2}{3a_1} - c \right)} \right\} \frac{dv}{d\tau} \end{aligned}$$

* 正會員, 成均館大學校 理工大學 電子工學科
Dept. of Electronics Engineering,
Sung Kyun Univ.
接受日字: 1974年 6月 10日

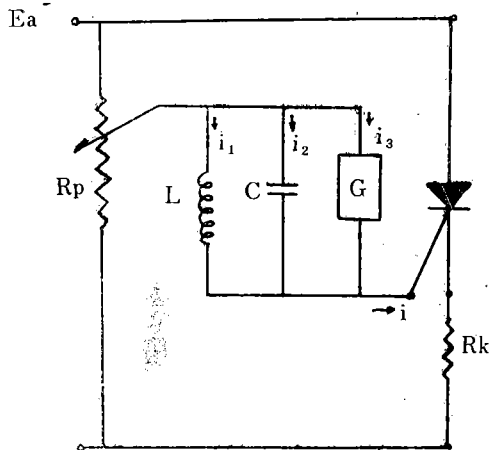


그림 1. SCR 發振回路
Fig. 1. SCR oscillator

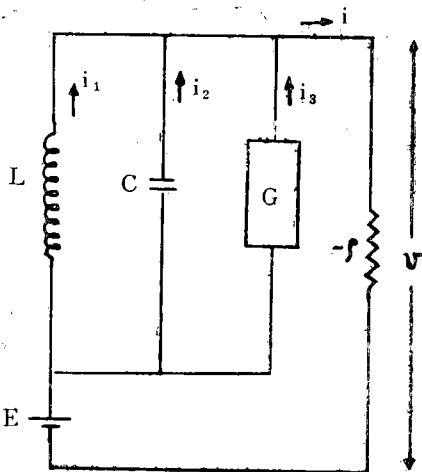


그림 2. 等價回路
Fig. 2. Equivalent circuit of SCR oscillator

$$\cdot \left(v + \frac{b}{3a_1} \right)^2 \frac{dv}{d\tau} + v = 0$$

$$\frac{d^2x}{d\tau^2} - \mu(1-x^2) \frac{dx}{d\tau} + x = 0$$

$$\text{단 } \begin{cases} \mu = \left(c - \frac{b^2}{3a_1} - G \right) \cdot \sqrt{\frac{L}{C}} \\ x = \left(\frac{3a}{G + \frac{b^2}{3a_1} - c} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \left(v + \frac{b}{3a_1} \right) \end{cases}$$

와 같이 쓸 수 있다. 이를 보고듀보프, 미트로프스키의 漸近法을 適用하면

$$x = a \cos \varphi + \mu u_1(a, \varphi) + \mu^2 u_2(a, \varphi) + \dots \quad (5)$$

로부터 a, φ 는

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{d\tau} &= \mu A_1(a) + \mu^2 A_2(a) + \dots \\ \frac{d\varphi}{d\tau} &= 1 + \mu B_1(a) + \mu^2 B_2(a) + \dots \end{aligned} \right\} \quad (6)$$

이때 $A_1(a), B_1(a)$ 는

$$A_1(a) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (1 - a^2 \cos^2 \varphi) (-a \sin \varphi) \sin \varphi d\varphi$$

$$= a \left(1 - \frac{a^2}{4} \right)$$

$$B_1(a) = -\frac{1}{2\pi a} \int_0^{2\pi} (1 - a^2 \cos^2 \varphi) (-a \sin \varphi) \cos \varphi d\varphi$$

$$= 0 \quad (7)$$

第 2의 近似에서, u_1 에 對해서는

$$u_1(a, \varphi) = \frac{g_0(a)}{\omega_0^2} + v_1(a) \cos \varphi + w_1(a) \sin \varphi$$

$$+ \sum_{n=2}^{\infty} \frac{g_n(a) \cos n\varphi + h_n(a) \sin n\varphi}{\omega_0^2 (1 - n^2)}$$

$$= \frac{3}{4} \sin \varphi - \frac{1}{4} \sin 3\varphi \quad (8)$$

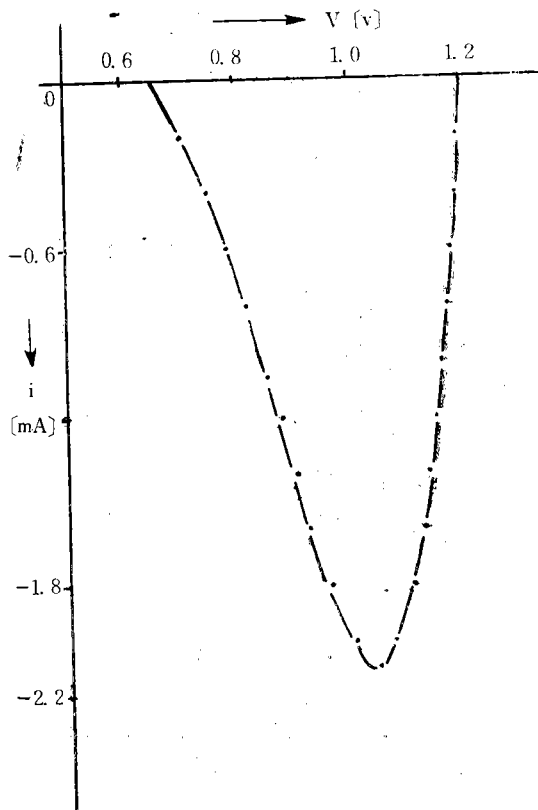


그림 3. V-I 실험곡선
Fig. 3. The empirical curve of gate circuit

$$\text{단 } \begin{cases} g_n(a) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (1-a^2 \cos^2 \varphi) (-a \sin \varphi) \cos n \varphi d\varphi \\ h_n(a) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (1-a^2 \cos^2 \varphi) (-a \sin \varphi) \sin n \varphi d\varphi \end{cases}$$

가 되며, $A_2(a), B_2(a)$ 는

$$\begin{aligned} A_2(a) &= -\frac{1}{2\omega_0} \left\{ 2A_1 B_1 + A_1 \frac{dB_1}{da} \cdot a \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2\pi\omega_0} \int_0^{2\pi} \left\{ u, (a, \varphi) f'_x \right. \\ &\quad \left. + \left(A_1 \cos \varphi - a B_1 \sin \varphi + \omega_0 \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} \right) f'_x \right\} \sin \varphi d\varphi \\ &\quad - 2\omega_0 A_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial \varphi} - 2\omega_0 B_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \varphi^2} \\ &= 0 \\ B_2(a) &= -\frac{1}{2\omega_0} \left\{ B_1^2 - \frac{A_1}{a} \cdot \frac{dA_1}{da} \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2\pi\omega_0 a} \int_0^{2\pi} \left\{ \left\{ u_1(a, \varphi) f'_n + \left(A_1 \cos \varphi \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - a B_1 \sin \varphi + \omega_0 \frac{\partial u_1}{\partial \varphi} \right) f'_n \right\} \cos \varphi d\varphi \\ &\quad - 2\omega_0 A_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial a \partial \varphi} - 2\omega_0 B_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial \varphi^2} \\ &= -\frac{a}{32} \end{aligned} \tag{9}$$

따라서

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{d\tau} &= \mu a \left(1 - \frac{a^2}{4} \right) \\ \frac{d\varphi}{d\tau} &= 1 - \frac{a^2}{32} \cdot \mu \end{aligned} \right\} \tag{10}$$

윗 식에서 정상상태에서는

$$\begin{aligned} a &= 0, a \pm 2 \\ \varphi &= \left(1 + \frac{\mu^2}{16} \right) \cdot \tau \end{aligned} \tag{11}$$

이나, 第一近似에서는 $a=0$ 는 不安定이므로 第二의 近似에서

$$\left. \begin{aligned} x &= \sqrt{4 + \frac{9}{16} \mu^2} \cdot \sin(\varphi + \varphi_0) - \frac{1}{4} \mu \sin 3\varphi \\ \text{단, } \varphi_0 &= \tan^{-1} \frac{8}{3\mu} \\ \varphi &= \left(1 - \frac{\mu^2}{16} \right) \omega_0 t \end{aligned} \right\} \tag{12}$$

가 얻어진다.

3. 相軌道와 安定性

前節에서는 正常상태에서의 振巾 및 周波數를 알 수 있었으나, 여기에서는 位相平面에서의 運動을 파악하고, 또 安定性을 살펴 본다.⁶⁷⁾

于先 (4)식에서 부터

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= y \\ \frac{dy}{d\tau} &= -x + \mu(1-x^2)y \end{aligned} \right\} \tag{13}$$

이므로, 一般的으로

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= P(x, y) \\ \frac{dy}{d\tau} &= Q(x, y) \end{aligned} \right\} \tag{14}$$

라 놓고, $x=x_0, y=y_0$ 를 滿足하는 點 $P(x_0, y_0)=0, Q(x_0, y_0)=0$ 인 平行點 近傍의 相軌道를 살펴 보면, (13)식에서 x_0, y_0 는 原點(0,0)임을 알 수 있다. 따라서 原點 近傍에서의 變分 $\delta x, \delta y$ 를 取하고, 各各을 (4)식에 代入한後, 그 變分을 x, y 라 쓰면,

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{d\tau} &= y \\ \frac{dy}{d\tau} &= -x + \mu y \end{aligned} \right\} \tag{15}$$

이는 平行點 近傍에서의 狀況點이 어떤 運動을 하는가를 定하는 式이 된다. 이 式은 또 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$x - \mu x + x = 0 \tag{16}$$

이 式의 解는

$$\left. \begin{aligned} x &= A_1 e^{\lambda_1 \tau} + A_2 e^{\lambda_2 \tau} \\ y &= \lambda_1 A_1 e^{\lambda_1 \tau} + \lambda_2 A_2 e^{\lambda_2 \tau} \end{aligned} \right\} \tag{17}$$

$$\text{단 } \lambda_1 = \frac{1}{2}(\mu + \sqrt{\mu^2 - 4}) = \alpha + j\beta$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{2}(\mu - \sqrt{\mu^2 - 4}) = \alpha - j\beta$$

C_1, C_2 는 초기 조건에 依한 const.

(17)식에서 부터 (16)식의 x 의 계수가 0보다 크면 (여기에서는 1) 또 x 의 계수 ($-\mu$)가 0보다 크면 (μ 의 값이 “-”임), $x-y$ 平面的 平衡點에 接近하게 되어, (16)식은 이를 만족하고 있음을 알 수 있다.

(15)식의 積分曲線을 求하기 위하여

$$\left. \begin{aligned} x &= a_{11}\xi + a_{12}\eta \\ y &= a_{21}\xi + a_{22}\eta \end{aligned} \right\} \tag{18}$$

$$\text{단 } a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$$

인 變換을 한다. 于先 $a_{11}=a_{12}=1, a_{21}=\eta_1, a_{22}=\lambda_2$ 라 하면,

$$\left. \begin{aligned} x &= \xi + \eta \\ y &= \lambda_1 \xi + \lambda_2 \eta \end{aligned} \right\} \tag{19}$$

가 되므로 (15)식은

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\xi}{d\tau} &= \lambda \xi \\ \frac{d\eta}{d\tau} &= \lambda_2 \eta \end{aligned} \right\} \tag{20}$$

(20)식에서, λ_1, λ_2 는 共軛복소수이므로, 다음과 같이 變換한다.

$$\left. \begin{aligned} \xi &= u + jv \\ \eta &= u - jv \end{aligned} \right\} \tag{21}$$

라 쓰면, u, v 는 x, y 의 實一次函數이다. (17)식, (21)식을 (20)식에 代入하면,

$$\left. \begin{aligned} \frac{du}{d\tau} &= \alpha u - \beta v \\ \frac{dv}{d\tau} &= \beta u + \alpha v \end{aligned} \right\} \quad (22)$$

또는

$$\frac{dv}{du} = \frac{\beta u + \alpha v}{\alpha u - \beta v} \quad (22')$$

지금, $u = \rho \cos \theta$, $v = \rho \sin \theta$ 라 하고, (22)식에代入하면

$$\frac{d\rho}{\rho} = \frac{\alpha}{\beta} d\theta$$

$$\therefore \rho = B e^{\frac{\alpha}{\beta} \theta} \quad (23)$$

따라서, $u-v$ 平面上에서는 그림 4와 같은 對數 나선族이 된다.

이 積分曲線은 하나도 特異點(渦狀點)을 지나지 않는다. 또 τ 의 增加와 더불어 狀況點(representative point)이 軌道上을 平衡點(0,0)을 向하고 있으므로, 이 回路는 安定됨을 알 수 있다.

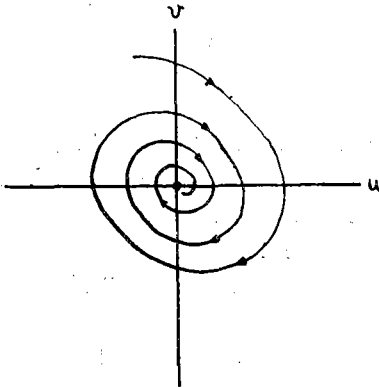


그림 4. SCR 發振回路的 相軌道
Fig. 4. The phase trajectory of SCR oscillator

4. 結 論

- 1) SCR 發振回路는 高調波成分이 包含되어 있다.
- 2) 이 回路는 安定된 發振을 하고 있음을 알 수 있다.

參 考 文 獻

1. B.C. Bark "Sinusoidal oscillation using planer SCR" KIEE Vol.11 No.2 pp.40~45(April '74)
2. Minorsky. "nonlinear oscillations" Van Nostrand ('62)
3. C. Hayashi "nonlinear oscillations in physical system" McGraw Hill ('64)
4. 古屋茂南雲仁一 "非線形振動論" 岩波書店('57)
(岩波講座, 現代應用數學 B6-6)
5. 志村正道 "非線形回路理論" 昭晃堂('69)
6. D.L.Hester "The Non linear theory of a class of Transistor oscillator" IEEE Trans. CT Vol-13,2, pp.118 (June '68)
7. Mabuchi "nonlinear analysis of transistorized LC oscillator with coupling Capacitor" IECE Vol. 52-A No.7 pp.277(July '69)