論 文

論文 74-11-2-1

Sparse 行列을 이용한 抵抗 回路網의 解析과 電算프로그래밍

(Analysis of Linear Time-Invariant Sparse Network and its Computer Programming)

車 均 鉉*

(Tchah, Kyun Hyon)

要 約

큰 규모의 系統이나 回路網의 解析에 있어서 0이 대부분 포함되어 있는 行列을 反轉하여 해를 구하는 것은 대단히 비능률적이다. 이러한 系統을 Sparse行列을 이용하여 풀면 計算時間이 적게 들고 記憶容量이 감소되며 둥근(round-off)誤差를 줄일 수 있다. 本論文은 Sparse 行列을 이용하여 回路網을 푸는 方法과 電算프로그래밍을 제공한다.

Abstract

Matrix inversion is very inefficient for computing direct solutions of the large sparse systems of linear equations that arise in many network problems. This paper describes some computer programming technibues for taking advantage of the sparsity of the admittance matrix. with this method, direct solutions are computed from sparse matrix. It is possible to gain a significant reduction in computing time, memory and round-off esror. Details of the method, numerical examples and programming are given.

1. 序 論

큰규모의 系統이나 回路網을 解析하는 데 있어서 連立線形回路網方程式의 각 係數에 대한 行列의 逆行列을 구하지않으면 안된다. 그러나 이 行列의 要素(elements)의 대부분이 0으로 되어 있을 때 行列을 反轉하는 것은 時間, 記憶容量, 둥근(round-off)誤差면에서 생각해볼때 비능률적이다. 이것을 sparse 行列法을 이용하여 풀면 計算時間을 줄이고, 記憶容量을 감소시키며, 둥근誤差를 줄일 수 있다. 本論文은 2개의 부분으로 나누어 2절에서 sparse行列을 이용하여 直接解를 얻는 방법을 설명하고 3절에서 프로그래밍을 설명한다.

* 正會員, 崇田大學校 電子工學科
Department of Electronic Engineering, Soong-Jun University
接受日字 : 1974年 1月 29日

2. 直接解를 얻는 방법

回路網의 節點方程式(node equation)은

$$Y_n e = i_s \tag{1}$$

와 같이 쓸 수 있다[1]. 여기서 Y_n은 節點어드미턴스行列이고 i_s는 節點電流源 벡터이고, e는 節點과 基準節點間의 電壓벡터이다. 방정식(1)을 구하는 과정은 接續行列(incidence matrix)과 가지어드미턴스行列(branch admittance matrix)을 구하여 얻을 수 있다. 回路網이 結合要素(coupling elements)가 없을때는 直觀的으로 구할 수 있다. Y_n은 回路網이 線形電源이 없으면 symetric 行列이고 대개 0을 많이 포함하고 있다. 그리고 콘덕턴스가 전부 正이면 $\det(Y_n)>0$이 된다[1].

(1) 식을 풀려면 Y_n의 逆行列을 구하여 i_s를 곱해야 하는데 Y_n의 逆行列을 구하기 위하여 Gauss消去法을 사용하면 Y_n이 차수가 클때는 둥근誤差가 생기고 記憶

容量이 많이들어 풀수 없을뿐만 아니라 時間이 많이 걸리는 단점이 있다. 그러나 이것을 sparse行列法을 이용하여 풀면 記憶容量이 줄어들고 時間을 절약할수 있다[2][3].

(1) 식을 Sparse 行列로 풀면

$$e=U_{12}U_{13}\cdots U_{n-1,n}D_{nn}\cdots D_{11}U_{n,n-1}\cdots U_{31}U_{21}i_s \quad (2)$$

와 같이 된다[2]. 여기서 $D_{ij}'s$는 Y_n을 三角行列(triangular) Y_T로 변환하는 elementary 行列이고 $U_{ij}'s$는 Y_T를 單位行列로 변환하는 elementary行列이다.

(a) 計算時間을 줄이는 方法

節點方程式이 다음 식과 같이 되었다고 할때 계산을 생각해 본다.

$$\begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & y_{13} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ y_{31} & 0 & y_{33} & 0 & \cdots \\ y_{k1} & 0 & \cdots & 0 & y_{kk} \\ y_{n1} & 0 & & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_k \\ e_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_{s1} \\ i_{s2} \\ i_{s3} \\ i_{sk} \\ i_{sn} \end{pmatrix} \quad (3)$$

(3)식의 Y_n行列을 三角行列 Y_{T1}로 만들면

$$Y_{T1}=\begin{pmatrix} 1 & y_{12}' & y_3' & \cdots & y_{1n}' \\ & 1 & y_{23}' & \cdots & y_{2n} \\ & & & & \vdots \\ & & 1 & \cdots & y_{kn}' \\ & & & & \vdots \\ & & & 1 & y_{n-1,n} \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \quad (4)$$

이 된다. Y_n을 Y_{T1}로 만들려면 n번 나누고 $(n^2-n)/2$번 곱하고 $n\times(n-1)+(n-1)\times(n-2)+\cdots\cdots+3\times2+2\times1\sim\frac{1}{3}n^3$ 乘和해줘야 한다[2]. 그러나 (3)식의 Y_n 行列을 1行 n行과 1列 n列을 서로 바꾸면

$$\begin{pmatrix} y_{nn} & 0 & \cdots & 0 & y_{n1} \\ 0 & y_{22} & 0 & \cdots & y_{21} \\ 0 & 0 & y_{33} & 0 & y_{31} \\ 0 & \cdots & 0 & y_{kk} & y_{k1} \\ 0 & \cdots & 0 & y_{n-1n-1} & y_{n-11} \\ y_{1n} & y_{12} & y_{13} & \cdots & y_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_n \\ e_2 \\ e_3 \\ e_k \\ e_{n-1} \\ e_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i_{sn} \\ i_{s2} \\ i_{s3} \\ i_{sk} \\ i_{sn-1} \\ i_{s1} \end{pmatrix} \quad (5)$$

이 된다.

(5)식의 Y_n의 三角行列 Y_{T2}는

$$Y_{T2}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & y_{n1}'' \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & y_{21}'' \\ 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \ y_{k1}'' \\ 0 & \cdots & & 1 & y''_{n-1,1} \\ 0 & \cdots & & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (6)$$

하는 방법은 0이 아닌 非對角線要素가 제일적은 行을 제1行에 그다음으로 적은 것을 제2行순으로 배열하면 이상에서 논한 효과를 얻을 수 있다.

Sparse行列法은 Y_n行列을 三角行列로 만든 다음 對角線위의 0이 아닌 要素와 對角線을 1로 만드는 要素를 記憶시켜 直接解를 구하는 것이므로 Y_n의 逆行列을 구하여 解를 얻는 것과 비교해보면 Y_n이 Sparse行列일때 Y_n을 三角行列 Y_T로 만드는 과정에서 최대로 대략 $\frac{1}{3}n^3$ 乘和해줘야하고 Y_T의 0이 아닌 非對角要素가 m개이면 直接解를 얻는 과정에서 $2m$번 乘和해줘야하므로 전부 $\left(\frac{1}{3}n^3+2m\right)$번 乘和해줘야하나, Y_n의 逆行列을 反轉하여 구할때는 n^3번 乘和해줘야하고 Y_n의 逆行列을 구해서 電流源벡터 i_s와 곱하면 n^2번 乘和해줘야 하므로 전부(n^3+n^2)번 乘和해줘야 한다. 그러므로 Sparse 行列法이 훨씬 빠르다

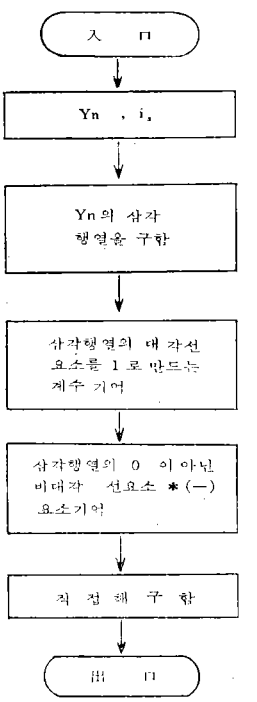

Fig 1. Flow Chart for solving sparse networks

(b) 記憶容量을 줄이는 방법

(2)식을 이용하여 直接解를 구하는 과정에서 三角行列의 0이 아닌 非對解要素의 수를 m이라하면 $m+n$의 記憶容量이 필요하므로 m이 적으면 적을수록 記憶容

量은 줄어든다. 그러므로 (4)식의 非對角要素수는 $(n^2-n)/2$이므로 記憶容量은 $(n^2+n)/2$ 필요하나 (6)식의 非對角要素수는 $(n-1)$이므로 記憶容量은 $(2n-1)$이면 된다. 따라서 (4)식에 비해 (6)식이 記憶容量이 감소됨을 알 수 있다. 그러므로 記憶容量을 줄이기 위해서는 三角行列의 非對角要素가 0이 많이 포함되도록 行列을 재배열하면된다.

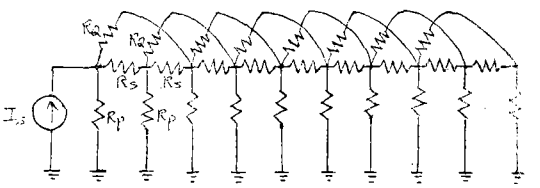

Fig. 2. Ladder Networ

3. 프로그래밍

節點方程式을 Sparse行列法을 이용하여 푸는 flow chart는 그림 1과 같다.

(예제 1) 그림 2와 같은 사다리 回路網을 Sparse 行列法을 이용하여 푼다.

그림 2에 대한 節點 어드미턴스 行列은

$$\begin{pmatrix} G_1 & \frac{-1}{R_S} & \frac{-1}{R_4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{R_S} & G_2 & \frac{-1}{R_S} & \frac{-1}{R_4} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-1}{R_4} & \frac{-1}{R_S} & G_3 & \frac{-1}{R_S} & \frac{-1}{R_Q} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{R_4} & \frac{-1}{R_S} & G_3 & \frac{-1}{R_S} & \frac{-1}{R_Q} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{-1}{R_4} & \frac{-1}{R_S} & G_3 & \frac{-1}{R_S} & \frac{-1}{R_Q} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{R_4} & \frac{-1}{R_S} & G_3 & \frac{-1}{R_S} & \frac{-1}{R_Q} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{R_4} & \frac{-1}{R_S} & G_3 & \frac{-1}{R_S} & \frac{-1}{R_Q} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{R_4} & \frac{-1}{R_S} & G_3 & \frac{-1}{R_S} & \frac{-1}{R_4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{R_Q} & \frac{-1}{R_S} & G_2 & \frac{-1}{R_S} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{-1}{R_Q} & \frac{-1}{R_S} & G_1 \end{pmatrix} \quad (7)$$

이다. (7)식에서 $G_1=\frac{1}{R_P}+\frac{1}{R_S}+\frac{1}{R_4}$,

$G_2=\frac{1}{R_P}+\frac{2}{R_S}+\frac{1}{R_4}$, $G_3=\frac{1}{R_P}+\frac{2}{R_S}+\frac{2}{R_Q}$

이다.

節點電流源벡터는

$$i_s=[I_S\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0]^T \quad (8)$$

이다.

Sparse行列法을 이용한 프로그래밍과 예제에 대한 解는 부록에 기재되어 있다.

解는 $R_P=1\Omega$, $R_S=2\Omega$, $R_4=2.5\Omega$, $I_S=20$mA에 대한 것이다. 프로그래밍에서 SUBROUTINE GASEL은 節點어드미턴스行列을 三角行列로 변환하는 Gauss 消去法이고 SUBROUTINE SPSCP는 節點方程式의 直接解를 구하는 것이다.

4. 結 論

Sparse行列法을 이용하여 回路網의解를 구하면 時間, 記憶容量을 줄일수 있는 방법을 일반적으로 節點 어드미턴스 行列을 들어 설명했다.

프로그래밍을 작성하여 비단 回路뿐만 아니라 대규모의 系統解析에도 이용할 수 있다.

參 考 文 獻

1. C.A Desoer and E.S Kuh, Basic Circuit Theory, McGraw—Hill, Inc. 1969
2. N.Sato and W.F. Tinney, Techniques for Exploiting the Sparsity of the Network Admittance Matrix, IEEE Trans. Power Appara-

tus and Systems, Vol. 82, pp. 944—950, DEC. 1963

3. W.F. Tinney and J.W.Walker, Direct Solution of Sparse Network Equations by Optimally Ordered Triangular Factorization, Proc. of the IEEE Vol. 55, No.11, pp. 1801—1809 Nov. 1967.
4. F.H. Bramin, Jr and H.H. Wang, A Fast Reliable Iteration Method for Analysis of Nonlinear Networks, Proc. of the IEEE Vol. 55, No.11, pp. 1819—1826, Nov.1967
5. 차균현, 非線形抵抗 回路網의 解析 대한전기학회지 발표예정.

附 錄