스윗칭函數 分割에 의한 多閾値函數 實現에 관한 硏究

논 문
23～4～3

A Study on the Realization of Multi-Threshold Function by Partition of Switching Functions

林　濟　鐸
(Chae Tak Lim)

Abstract

This paper investigates the theoretical properties of a logic element called the multi-threshold threshold element, which is a generalization of the single-threshold threshold element. The primary partition is a systematie method of obtaining the mult-threshold realization of a switching function by the index numbers.

The concept of comparable vertices of the same index numbers introduced in this paper is very promising for testing the multi-threshold partition by the initial condition to be defined by the minterms of the same index numbers.

Ⅰ. 序　論

單閾閾値要素(single-threshold threshold element; TE로 略記)로 實現할수 있는 線型分離可能函値(linear separable function)의 比率은 變數가 增加함에 따라 急激히 減少한다. 例로서 4變數 스윗칭函數인 경우 單閾値實現 可能函數는 3%이지만 5變數인 경우는 0.002%에 지나지 않는다[1,2].

이러한 理由때문에 더욱 强力한 論理函數實現能力을 갖는 要素가 要望되고 또 硏究開發되고 있으며 여기에서 論하는 多閾閾値論理要素(multi-threshold threshold logic element; MTE로 略記)는 單閾閾値要素를 一般化한 完備論理要素이다.

스윗칭函數 $F(x_1,x_2,\cdots,x_n)$와 MTE와의 關係는 아래와 같다(그림 1).

$$E=\sum_{i=1}^{n} W_iX_i \geq T_1 \text{ 或은 } T_{2j} \geq F \geq T_{2j+1}$$

일때 그리고 이때에 限해서

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n)=z$$

그外의 경우에는

$$F(x_1, x_2, \cdots, x_n)=\overline{z}$$

여기에서

$z \in \{0,1\}$

$T_m \in \{T_1, T_2, \cdots, T_K\}$

$T_m > T_{m+1}$

X_i : MTE의 論理入力(0 或은 1)

W_i : i번째 入力變數 X_i의 同伴重量

T_m : m번째 閾値

E : 勵振(excitation)

n : 스윗칭變數의 數

위의 關係에 의하면 E의 크기가 增加함에 따라 相異한 閾値를 갖는 영역에서 函數의 眞僞가 번갈아 交替됨을 알 수 있다. 즉 幾何學的으로는 MTE의 眞僞

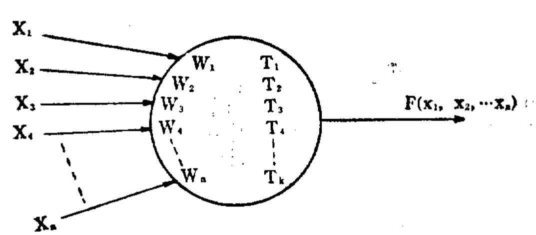

그림 1. K-閾 閾値論理要素
Fig 1. K-threshold threshold logic element.

最小項(minterm)들이 n次元 超空間(hyperspace)에서 超平面(hyperplane) 사이에 번갈아 그룹을 이룬다.

MTE는 重量—閾値벡터(weigh-threshold vector) (W;T)로 表示한다. 여기에서 W는 MTE에 의해서 實

現되는 스윗칭函數의 n變數에 同伴하는 重量의 順序集合이고 T는 K閾値의 順序集合이다.

한편 **MTE實現을** 얻기 위해서는 眞僞가 交替되는 **그룹의 數 K가 最小인** 重量—閾値벡터(W;T)를 얻는 것이 問題이다. 이에 관해서 많은 硏究가 있었는데[3,4] 特히 Haring[3]은 MTE實現에 관한 基本的인 두가지 알고리즘(algorithm)을 發表하였다. 또한 Haring과 Diephuis[5]는 11變數까지의 多閾閾値論理函數를 電子計算機에 의하여 實現하였다. Necula[4]는 對稱函數에 있어서 最小 K를 얻는 最小解(minimal solution)를 發表하여 아주 손쉽게 MTE實現을 얻고 있다.

여기서 論하는 原始分割(primary partition)은 各 頂點들間의 正規被覆(normal coverage) 特性을 利用하여 最小의 K를 求하기 위한 것이다. 이 方法은 맨처음 Ghosh와 Choudhury[6]에 의해서 論議되었었다. 그러나 原始分割에서 多閾値分割을 얻는 過程에서 相互可合成(mutual 2-summability)을 利用하는 代身 本論에서는 初期重量條件에 의한 같은 指數의 最小項들間의 部分順序關係를 利用함으로써 보다 쉽고 간결하게 多閾値分割을 얻을 수 있는 方法을 提示하였다.

Ⅱ. 原始分割과 多閾値分割

原始分割을 論議하기 前에 必要한 몇가지 定義를 한다.

〔定義 1〕 最小項의 2進數表示에서 1의 數를 그最小項의 指數(index number)라 한다.[7]

〔定義 2〕 最小項 t에 對應하는 勵振을 E_t로 表示한다.

〔定義 3〕 MTE實現에 있어서 勵振이 最大인 最小項을 이 實現의 基本頂點(basic vertex)이라 한다.

〔定義 4〕 $Et_1 > Et_2$이면 頂點 t_1이 頂點 t_2를 支配(dominate) 혹은 正規被覆(normaly cover)한다 하고 t_1을 優頂點(dominating vertex), t_2를 劣頂點(dominated vertex)이라 한다. 頂點들間의 優劣關係는 그림 2와 같은 正規被覆圖를 利用 容易하게 判斷할 수 있다.

Ⅱ—Ⅰ　原始分割

MTE實現의 第一段階로서 眞僞最小項들을 그 勵振値에 의해서 階級的으로 分割하는 問題를 생각한다.

〔定義 5〕 正規被覆特性을 利用하여 다음 條件이 滿足되도록 眞僞最小項을 交替되는 그룹數가 最大로 되는 그룹 $G=\{G_1, G_2, \cdots\}$로 分割한다.

1) 先그룹 G_{i+1}에는 그룹 G_i에 屬하는 頂點 t를 支配하는 優頂點 t_1이 적어도 하나 存在하고 續그룹 G_{i-1}에는 t에 의해 支配되는 劣頂點 t_2가 적어도 하나 存在한다.

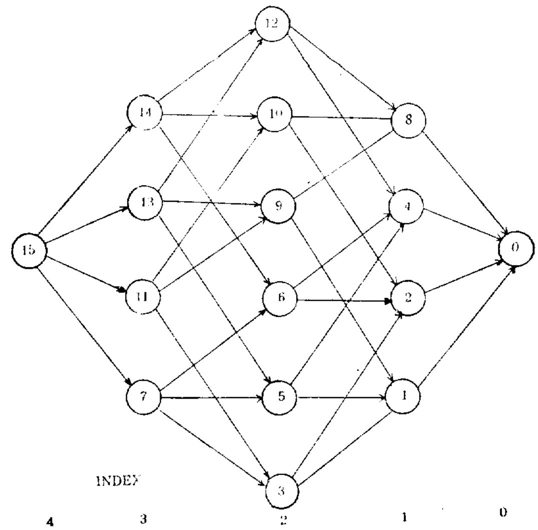

그림 2.　4-變數 스윗칭 函數의 正規被覆圖
Fig 2.　normal coverage diagram of 4-variable switching functions

2) 先그룹 G_{i+1}에는 t에 의해 支配되는 劣頂點이 없고 續그룹 G_{i-1}에도 t를 支配하는 優頂點이 存在하지 않는다.

이러한 分割을 F의 原始分割이라 定義한다.

〔定義 6〕 그룹 $G=\{G_1, G_2, \cdots\}$를 구성하는 最小項들을 束縛頂點(constrained vertex), 束縛頂點이 아닌 頂點을 自由頂點(free vertex)이라 부른다.

〔定理 1〕 原始分割에서 束縛頂點들은 指數에 따라 그룹지어진다.

〔證明〕 그룹 G_i에 있는 頂點 t_i에 대하여 이것을 支配하는 優頂點 t_{i+1}과 이에 의하여 支配되는 劣頂點 t_{i-1}을 생각하면 이들 頂點은 各各 그룹 G_{i+1}과 G_{i-1}에 屬하게 된다. 또한 t_{i+1}은 t_i를 支配하기 때문에 t_i가 1인 곳에서는 전부 1이고 t_i가 0인 곳에서 적어도 하나가 1을 갖는다. 그러므로 t_i의 指數와 t_{i+1}의 指數는 다르다. t_{i-1}에 대해서도 마찬가지이다.

〔定義 7〕 n變數 스윗칭函數에서 指數가 0 혹은 n인 最小項은 各各 하나씩이다. 그러므로 F 혹은 $\bar{F}$의 어느 한쪽에 屬하게 되며 F와 $\bar{F}$에 同時에 屬할수는 없다. p_i와 q_i가 各各 $\bar{F}$와 F에 있는 指數 i를 가진 最小項의 그룹을 表示하기로 하고 萬一 最小項 0이 $\bar{F}$에 屬하면 (q_0, q_1), (p_1, p_2), (q_2, q_3), $\cdots$, 萬一 最小項 0이 F에 屬하면 (p_0, p_1), (q_1, q_2), (p_2, p_3), $\cdots$와 같이 眞僞그룹으로 分割한다. 이것을 豫備그룹핑(Preliminary grouping)이라 한다.

例를 들어 $F=\sum(3,4,7,8,11,12,13,14,15)$의 예비그룹은 表 1과 같이 된다.

표 1. 예 비 그 룹

Table 1. Preliminary group

group	$G_4(F)$	$G_3(F)$	$G_2(F)$	$G_1(F)$
index	4 or 3	3 or 2	2 or 1	1 or 0
vertex	7 (5, 6)	(7,13,15) 5 (4)	(5, 6) 4 (0)	(4,8,3,12) 0
	11 (9,10)	(7,14,15) 6 (4)	(9,10) 8 (0)	(3) 1
	13 (5, 9)	(11,13,15) 9 (8)	3 (0,12)	(3) 2
	14 (6,10)	(11,14,15) 10 (8)	12 (0)	
	15 (5,6,9,10)	×		

표 1을 검토하면 어떤 最小項에 대하여 적어도 하나의 優頂點과 劣頂點이 先그룹과 續그룹에 各各 存在함을 알 수 있다. 한편 예비그룹에서 左右端에 있는 그룹에 屬하는 最小項들은 한쪽에서만 속박을 받게 된다. 그外의 그룹에 있어서는 先그룹에 지배하는 優頂點이 없거나 續그룹에 支配되는 劣頂點이 없는 모든 最小項들은 지배하거나 지배되는 모든 最小項들과 함께 分割로부터 빠지게 되며 이들이 自由頂點이다. 표1에서 (3, 12)는 先그룹에 優頂點이 없으므로 分割에서 빠지게 된다. 또한 (1,2)는 3만을 優頂點으로 가지고 있기 때문에 이것도 分割에서 빠지게 된다. 自由頂點을 색출하는 段階에서 어떤 그룹이 빠지면 그 그룹의 先그룹과 續그룹이 한그룹으로 합병된다. 이 結果로 얻는 그룹도 또한 주어진 函數의 原始分割이라 한다. 自由頂點은 어떤 그룹에도 속박되지 않으므로 眞僞에 따라 任意의 그룹에 屬할 수 있다. 自由頂點을 색출하는데 있어 그림 2와 같은 正規被覆特性圖를 利用하면 간편하게 求할 수 있다.

Ⅱ—2. 多閾値分割

스윗칭函數의 MTE實現의 基本問題는 어떤 지정된 重量係數에 대하여 G_i의 各頂點의 勵振値가 續그룹 G_{i-1}에 있는 頂點의 勵振値보다 크게 되도록 서로 다른 最小項들을 交替되는 眞僞 그룹 $G_k, G_{k-1}, \cdots, G_2, G_1$로 分割하는 것이다. 다른 觀點에서 본다면 萬一 f_i가 特定 그룹 G_i의 모든 項에 대하여 眞의 값을 줌으로써 얻은 스윗칭函數이고 또

$$F_k = f_k$$
$$F_{k-1} = f_k + f_{k-1}$$
$$\vdots$$
$$F_2 = f_k + f_{k-1} + \cdots + f_2$$

인 관계가 있으면 MTE實現이 可能하기 위해서는 모든 函數 $F_k, F_{k-1}, \cdots, F_2$가 線型分離可能하고 또 서로 同重量(isobaric)이어야 된다[9]. 위의 條件을 만족하는 分割을 函數의 多閾値分割이라 한다.

〔定義 8〕 하나의 多閾閾値要素로 實現할 수 있는 函數의 集合 $\{F_1, F_2, \cdots, F_n\}$을 實現可能集合(realizability set)이라 하고 어떤 函數의 集合이 實現可能集合의 部分集合일 때 並立集合(compatibility set)이라 한다.

〔定義 9〕 函數 F, G사이에 $F \rightarrow G$(implication) 혹은 $G \rightarrow F$의 關係가 있을때 F와 G는 比較可能(comparable)하다고 한다.

〔定理 2〕 函數 $F_1, F_2, \cdots, F_n$이 並立集合이면 F_i와 F_j $(1 \leq i, j \leq n)$는 比較可能하다. 그리고 F_i가 F_j보다 작은 閾値로 實現할 수 있으면 $F_j \rightarrow F_i$이다[8].

Ⅲ. 線型의分離性과 同重量性의 테스트

〔定義 10〕 스윗칭函數 $F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$에 k個의 n組 $(t_1, t_2, \cdots t_k)$ F에 k個의 n組 $(u_1, u_2, \cdots, u_k)$가 있어 $\sum_{i=1}^{k} t_i = \sum_{i=1}^{k} u_i$를 滿足할 때 F는 k-可合(k-summable)이라 한다.

〔定義 11〕 同一한 重量벡터로 實現可能한 閾値函數는 서로 同重量(isobaric)이라 한다.

Ⅲ—1. 線型 分離性의 테스트

〔定理 3〕 線型分離可能函數가 되기 爲한 必要充分條件은 그것이 非可合性(Asummable)을 만족하는 것이다[1].

스윗칭函數의 線型分離性을 테스트 하기 爲해서는 k-可合性을 체크해야 하지만 變數 $n \leq 8$일 경우에는 2-가합성의 체크만으로 充分하다[9]. 다음 定理는 原始分割에 있어서 2-可合雙의 검출에 유용하다.

〔定理 4〕 두雙의 最小項(t_1, t_2)와 (u_1, u_2)가 2-가합성을 만족할 必要條件은 各雙의

1) 指數의 合이 같고

2) 10進數表示값의 合이 같아야 된다[9].

一般的으로 우리가 자주 使用하는 스윗칭函數는 變數가 8보다 적은 경우가 많은데 이때에는 2-可合雙의

체크만으로 線型分離性의 테스트는 充分하다.

III—2. 同重量性의 테스트

函數 $F_1, F_2, \cdots, F_n$이 並立集合이어야 이것을 MTE로 實現할수 있기때문에 우선 스윗칭函數의 並立性에 對해서 알아보자.

〔定義 12〕 $0=F_n\to F_{n-1}\to\cdots\to F_2\to F_1=1$인 스윗칭函數의 集合 $F=\{F_1,F_2,\cdots F_n\}$에 있어 $S_i=\{E_j| F_i(j)\oplus F_{i+1}(j)=1\}$를 만족하는 集合 $S=\{s_1,s_2,\cdots s_N\}$을 F에 依해서 誘導된 S-分割이라 한다.

〔定理 5〕 $0=F_n\to F_{n-1}\to\cdots\to F_2\to F_1=1$인 函數의 集合 $F=\{F_1,F_2,\cdots,F_n\}$이 並立集合이 될 必要充分條件은 重量 $W_1,W_2,\cdots,W_n$이 있어 이에 同伴하는 勵振集合이 $S'=\{E_0,E_1,\cdots,E_{2^n{}_{n1}}\}$이고 F에 依해서 誘導된 S-分割 $S=\{s_1,s_2,\cdots,s_{n-1}\}$가 $i>j$일 때 $S_i>S_j$인 관계를 만족하는 것이다[3].

〔定理 6〕 같은 指數를 가진 頂點 t_1과 t_2의 勵振이 比較可能하면 重量集合 $W=\{W_1,W_2,\cdots,W_n\}$에서 어떤 重量이 比較可能하다.

〔證明〕 같은 指數를 가진 두 頂點을 t_1, t_2라하면 이들의 距離는 2이다. 即 2進벡터表示에 있어서 두개의 成分이 다르게 된다. 만일 $E_{t1}>E_{t2}$라 하고 t_1이 i번째에서 1을 t_2가 j번째에서 1을 各各 獨立的으로 갖는다면

$$E_{t1}-E_{t2}=W_i-W_j>0$$

即 $W_i>W_j$이다.

n變數 스윗칭函數의 原始分割 形成에서 最左端으로 割當되는 그룹 G_i는 그 그룹을 구성하는 最小項들의 指數가 n 或은 $n-1$이다. 그리고 그 다음 그룹 G_{i-1}에 있어서 最小項들의 指數는 $(n-1)$ 或은 $(n-2)$이다. 여기서 共通의 指數 $(n-1)$에 對해서 고찰해보면 이들 最小項들은 주어진 n變數 스윗칭函數의 眞僞에 따라 G_i 或은 G_{i-1}에 屬하게 된다. 또한 이 原始分割이 多閾値分割이 되기 爲해서는 同重量이어야 되므로 G_i와 G_{i-1}을 구성하는 최소항들은 서로 다른 勵振을 갖게된다. 即 $t_i\in G_i$, $t_j\in G_{i-1}$이면 이들의 勵振은 어떤 값에 依하여 分離되어야 하므로 $E_{ti}>T>E_{tj}$가 成立된다. 또 定理 6에 依하여 p와 q가 t_i의 2進數表示에서 p번째 位置가 1이고 t_{i-1}의 q번째 위치가 1이고 t_i의 q번째 위치가 0이고 t_{i-1}의 p번째 위치가 0이라고 하면 $W_p>W_q$이다. 이것은 또 다른 그룹에 있어서 지수 $(n-2)$, $(n-3),\cdots,1$을 갖는 그룹 G_{i-2}, $G_{i-3},\cdots,G_2,G_1$에 속하는 같은 指數를 갖는 最小項들의 위치를 제약하게 된다. 即 같은 指數를 갖는 어떤 最小項들이 比較될 수 있다. 例로서 4變數 스윗칭函數에 있어서 G_4가 7을 要素로 하고 G_3가 14,13,11을 要素로하고 있다고하면 $W_4<W_1,W_2,W_3$이고 지수 2인 最小項들 間에

3>9,10
5>9,12
6>10,12

또 지수 1인 最小項들 間에

1,2,4>8

	Index 3		Index 2			Index 1		Weight relation	
1	7	14,13,11	3 5 6		9,10 9,12 10,12	1,2,4	8	W_2, W_3, W_4	W_1
2	11	14,13,7	10 9 3		6,12 5,12 5, 6	1,2,8	4	W_1, W_3, W_4	W_2
3	13	14,11,7	12 9 5		10, 6 10, 3 6, 3	1,4,8	2	W_1, W_2, W_4	W_3
4	14	13,11,7	12 10 6		9, 5 9, 3 5, 3	2,4,8	1	W_1, W_2, W_3	W_4
5	11,7	14,13	3	10 9 6 5	12	1,2	4,8	W_3, W_4	W_1, W_2
6	13,7	14,11	5	6 3 12 9	10	1,4	2,8	W_2, W_4	W_1, W_3
7	14,7	13,11	6	5 3 10 12	9	2,4	1,8	W_2, W_3	W_1, W_4

표 2. 初期條件에 의한 같은 指數의 最小項들 間의 部分順序關係(4變數인경우)

Partial ordering relation on the minterms of the same index number by initial condition.

이라는 部分順序關係가 있는 것이다. 이들의 關係를 표 2에 表示하였다.

Ⅳ. 多閾値分割의 形成 및 재배열

多閾値分割을 얻기 爲해서는 函數의 集合 $\{F_i\}$가 線型分離可能하고 또 서로 同重量이어야한다. Ⅲ章에서 論한 테스트에 依하여 위의 條件이 만족되지 않을 때는 위의 條件이 만족되도록 各頂點을 재배열한다.

多閾値分割을 얻기 爲해서 自由頂點들을 線型分離可能하고 同重量이 되도록 配列하려면 우선 最左側 自由그룹의 속박정점아래 自由頂點을 놓아야 한다. 그리고 이 自由頂點의 같은 指數의 頂點들과의 順序關係를 조사하여 初期條件을 만족하는가를 체크한다. 그다음에 線型分離性을 체크한다. 만일 이 과정에서 위의 條件이 만족되지 않으면 이 自由頂點을 다른 그룹에 이동시켜 체크한다. 이때 자유정점에 의해서 지배되는 다른 自由頂點은 더 낮은 그룹에 이동시킬 必要가 있다. 이와같이 自由頂點의 移動에 依해서 線型分離와 同重量條件이 만족될 때는 分割의 그룹數는 변하지 않는다. 그러나 속박정점의 경우는 그룹數가 增加한다.

〔定理 7〕 初期條件을 만족하지 않는 속박정점이 있는 分割에서 初期條件을 만족시키려면 그 束縛頂點을 재 배열해야 된다. 이때 그룹數는 두개 增加한다[6].

例로서 $F=\sum(1,2,3,5,7,9,15)$를 생각하면 이 函數의 原始分割은 표 3—1과 같이 된다.

표 3—1. $F=\sum(1,2,3,5,7,9,15)$의 原始分割

Table 3—1. Primary Partition of F

$G_4(F)$	$G_3(\bar{F})$	$G_2(F)$	$G_1(\bar{F})$
7	6	1	0
15	⑩	2	4
	11	③	8
	13	$\underline{5}$	
	14	9	
	$\underline{12}$		

그림 2를 보면 12가 自由頂點이다. 또한 이 原始分割의 初期條件은 7>14,13,11 이다. 표 2의 1行, 指數 2인 경우를 보면 3>10과 5>12이다. 그런데 위의 原始分割은 이 條件을 만족하지 못하고 있다. 그러므로 10, 12를 오른쪽으로 移動시켜야 하는데 12는 自由頂點이므로 바로 移動시킬 수 있지만 10인 경우는 재배열해야 한다. 위의 原始分割을 初期條件에 맞도록 재배열하면 표 3—2를 얻는다.

한편 표 3—1을 보면 10을 3의 오른편으로 이동시키는 것은 10(1010)이 2(0010)보다 작은 勵振을 갖는다는 것을 意味한다. 萬一 基本頂點이 15(1111)에서 7(0111)로 變換되었다면 위의 條件을 만족시킨다. 基本頂點을 7로 變換시킨 函數는 $F_T=\sum(1,7,9,10,11,13,15)$이다. 이 變換된 函數의 原始分割은 표 3—3과 같다.

표 3—2. 變形原始分割

Table 3—2. modified primary partition

$G_6(F)$	$G_5(\bar{F})$	$G_4(F)$	$G_3(\bar{F})$	$G_2(F)$	$G_1(\bar{F})$
7	11	5	10	1	0
15	13	3	6	2	4
	14	9	12		8

표 3—3. 함수 F_T의 原始分割

Table 3—3. primary partition of F_T

$G_4(F)$	$G_3(F)$	$G_2(F)$	$G_1(\bar{F})$
7	3	1	0
11	5	10	2
13	14		8
15			
	6		4
	12		

이 原始分割의 初期條件은 표 2의 4行의 경우이다. 卽 指數 2인 경우 (12<9,5), (10<9,3), (6<5,3), 指數 1인경우 (2,4,8<1)이다. 여기서는 자유정점들만을 이동시켜 이 條件들을 만족시킬 수 있다. 이와같이 初期條件을 만족하지 않는 函數 F의 原始分割에서 어떤 變數의 補變數를 取함으로서 分割의 數를 增加시키지 않고 多閾値分割을 얻을 수 있는 경우도 있으나 그룹의 數가 增加한다면 分割의 재배열을 고려해야 한다.

Ⅴ. 重量—閾値벡터의 計算 및 多閾値函數의 實現

多閾値分割로 부터 重量—閾値벡터는 다음과 같은 方法에 依하여 얻는다.

1) $F_2, F_3, \cdots F_k$의 各函數를 加法標準型으로 表現한다.

2) 같은 指數의 頂點들間의 部分順序關係를 決定한다. 이것을 原始順序關係(primary ordering relation)라 한다.

3) 2)에서 얻은 順序關係들이 共通으로 만족하는 共通順序關係를 求한다.

例를 들어 만일 F_2에서 $W_4>W_3=W_2>W_1$, F_3에서 $W_4=W_3=W_2=W_1$, F_4에서 $W_4=W_3=W_2>W_1$이면 F_2, F_3, F_4에 모순되지 않는 順序關係는 $W_4>W_3=W_2>W_1$이다. 이것을 變形原始順序關係(modified primary ordering relation)라 한다.

4) 變形原始順序關係를 利用하여 各函數 $F_2, F_3, \cdots F_k$의 眞僞頂點間의 不等式을 求하여 이 不等式을 만족하는 入力重量을 얻는다[10].

5) 入力重量에 依하여 各函數의 閾値를 얻는다.

例로서 표3—4, 표 3—5, 표 3—6의 多閾値函數를 求하면

i) 표 3—4인 경우

$F_4=X_2X_3X_4+X_1X_2X_4+X_1X_3X_4$; $W_4>W=W_2=W_1$

$F_3=X_2X_3+X_2X_4+X_3X_4$; $W_4=W_3=W_2>W_1$

표 3—4. 例 題

Table 3—4. example

$G_4(F)$	$G_3(F)$	$G_2(F)$	$G_1(F)$
7	3	1	0
11	5	10	2
13	14	9	8
15	6		12
			4

표 3—5. 例 題

Table 3—5. example

$G_4(F)$	$G_3(F)$	$G_2(F)$	$G_1(F)$
7	3	1	0
11	5	10	2
13	14		8
15	12		6
9			

표 3—6. 例 題

Table 3—6. example

$G_4(F)$	$G_3(F)$	$G_2(F)$	$G_1(F)$
7	3	1	0
11	5	10	2
13	14		8
17			6
9			12
			4

$F_2=X_4+X_2X_3+X_1X_3$; $W_4>W_3>W_2=W_1$

$\therefore \quad W_4>W_3>W_2>W_1$

이로부터 최적부등식은

$W_2+W_4>W_1+W_4 (6>9)$

$W_4 \quad >W_1+W_2 (1>12)$

$W_1+W_2>W_3 \quad (13>3)$

여기에서 入力重量을 求하면

$W_1=2, \ W_2=5, \ W_3=6, \ W_4=8$

그러므로

$F_4=(2X_1+5X_2+6X_3+8X_4)>14.5$

$F_3=(2X_1+5X_2+6X_3+8X_4)>10.5$

$F_2=(2X_1+5X_2+6X_3+8X_4)>7.5$

결국 주어진 函數의 MTE實現은 다음과 같다.

$F_T=(2,5,6,8 ; 14.5, 10.5, 7.5)$

마찬가지로 하여 표 3—5, 표 3—6의 MTE實現은 다음과 같다.

ii) $F_T=(3,2,1,4 ; 5.5, 4.5, 3.5)$

iii) $F_T=(3,1,2,5 ; 7.5, 5.5, 4.5)$

最小팬인解(minimum fan-in solution)는 $\sum|W_i|$가 最小가 되는 ii)의 경우이다. 그리고 이들 多閾値函數들은 원래 $F=\sum(1,2,3,5,7,9,15)$의 基本頂點을 7로 變換시켜 얻은 것이므로 만일 $F(X)$가 $(W_1, W_2, \cdots, W_p, \cdots, W_n ; T_1, T_2, \cdots, T_k)$의 多閾値要素로서 實現된다면 $F(X ; X_p \rightarrow \bar{X}_p)$는 $(W_1, W_2 \cdots, -W_p, \cdots, W_n ; T_1-W_p, T_2-W_p, \cdots, T_k-W_p)$의 多閾値要素로서 實現할 수 있으므로 본래의 函數의 最小팬인解는

$F=(-3,2,1,4 ; 2.5, 1.5, 0.5)$

이다.

VI. 結 論

線型分離가 不可能한 스윗칭函數를 보다 손쉽게 多閾値論理要素로서 實現하는 方法에 關하여 論하였다. 正規被覆特性圖를 利用함으로서 原始分割에서 束縛頂點과 自由頂點을 쉽게 區分할 수 있도록 하였다. 또한 原始分割로부터 多閾値分割을 얻는 過程에서 初期條件에 依한 같은 指數의 頂點들 間의 部分順序關係를 체크함으로서 Ghosh[6,9]의 同重量性 체크에 依한 方法보다 간단하게 實現할 수 있음을 밝혔다. 實際 4變數스윗칭函數에 있어서 표 2는 同重量性을 테스트 하는데 많은 時間과 努力을 절감시켜 줄 것이다.

引 用 文 獻

1. Lewis, P.M., Coats, C.L.: "Threshold Logic", New York, Wiley, (1967)

2. Yen, Y.T.: "Some Theoretical Properties of Multi-Threshold Realizable Function", IEEE Trans, Comput., Vol. C-17, pp. 1081~1088, (1968)
3. Haring, D.R.; "Multi-threshold Element", IEEE Trans, Electron Comput., Vol. EC-15, pp. 45~65, (1966)
4. Necula, N.N.: "An Algorithm for Multi-threshold Threshold Element Synthesis," IEEE Trans, Comput, Vol. C-17, pp. 978~985, (1968)
5. Haring, D. R., Diephuis, R.J.:" A Realization Procedure for Multi-Threshold Threshold Element", IEEE Trans, Electron Comput, Vol. EC-16 pp. 828~835, (1967)
6. Ghosh, S., Choudhury, A.K.: "Partition of Boolean Function for Realization with Multi-Threshold Threshold Logic Element," IEEE Trans, comput., Vol. C-22, No. 2, pp. 204~214, (1973)
7. Caldwell, S.H.: "Switching Circuit and Logic Design", New York, Wiley, (1965)
8. Meisel, W. S.: "Variable-Threshold Threshold Elements", IEEE Trans. Comput., Vol. C-17, pp. 565~667, (1968)
9. Ghosh, S., Bandyopadhyay, S., Mitra, S.K., Choudhury, A.K.; "Simple Methods for Testing the 2-Summability of Boolean Functions and Isobaricity of Threshold Functions," IEEE Trans, Comput., Vol. C-21 pp. 503~507, (1972)
10. Sheng, C.L., Hwa, H.R.: "Testing and Realization of Threshold Functions by Successive Higher Ordering of Incremental Weights," IEEE Trans., Electron Comput., Vol. C-15, pp. 212-220, (1966)
11. Hill, F.J., Peterson, G.P.: "Introduction to Switching Theory and Logic Design", New York, Wiley, (1968)
12. McClusky, E.J., Bartee, T.C. : "A Survey of Switching Circuit Theory", New York, Mc Graw-Hill, (1962)