Kyungpook Math. J.
Volume 13, Number 1
June, 1973

UNE NOTE SUR LA CONVERGENCE DES SEMI-GROUPES DES OPÉRATEURS DANS LES ESPACES DE BANACH

Par Ki Sik Ha

§ 1. Introduction.

Soit X un espace de Banach réel muni de la norme $\| \|$. Nous supposons un opérateur A dans X dont le domaine $D(A)$ et l'ensemble de valeurs $R(A)$ sont contenus dans X.

Dans ce travail, quand un opérateur générateur A est donné à l'avance, nous nous occuperons de l'existence de la suite $\{A_n\}$ des opérateurs générateurs, convergente vers A et de l'existence de la suite $\{T_n(t) : t \geq 0\}$ des semi-groupes continus des opérateurs des contractions, engendrés par A_n pour $n=1, 2, \cdots$, convergente vers le semi-groupe continu $\{T(t) : t \geq 0\}$ des opérateurs des contractions, engendré par A, uniformément pour $t \in [0, T]$.

Nous considérons le cas où A est linéaire dans § 2 et le cas où A est non-linéaire dans § 3.

§ 2. Le cas où A est linéaire.

On appelle dissipatif un opérateur A dans X satisfaisant à la condition

(1) $$\|(\lambda I - A)x\| \geq \lambda \|x\| \text{ pour tout } x \in D(A) \text{ et } \lambda > 0.$$

En outre, on appelle m-dissipatif un opérateur A dans X si A est dissipatif et $R(\lambda I - A) = X$ pour tout $\lambda > 0$.

Théorème de Hille-Yosida. Pour que A soit l'opérateur générateur d'un semi-groupe continu $\{T(t) : t \geq 0\}$ des opérateurs linéaires des contractions sur X, il faut et il suffit que soit vérifié l'ensemble des conditions suivantes:

i) $D(A)$ est un ensemble dense dans X:
ii) A est m-dissipatif.

Soit X_n un espace de Banach et soit P_n une application linéaire de X sur X_n pour $n=1, 2 \cdots$, telle qu'il existe N un nombre entier positif, satisfaisant à la condition

(2) $$\|P_n x\| = \|x\| \text{ pour tout } n \geq N.$$

On dit qu'une suite $\{x_n\}$, où $x_n \in X_n$, converge vers $x \in X$ si

$$\|x_n - P_n x\| \to 0 \text{ pour } n \to \infty,$$

et qu'une suite $\{A_n\}$ des opérateurs dans X_n pour $n=1, 2, \cdots$, converge vers un opérateur A dans X si

$$\|A_n P_n x - P_n A x\| \to 0 \text{ pour } n \to \infty \text{ et } x \in D(A).$$

Soit A m-dissipatif avec le domaine dense dans X et soit $\{T(t) : t \geq 0\}$ un semi-groupe continu des opérateurs linéaires des contractions sur X, engendré par A. Nous prenons une suite $\{\lambda_n\}$ des nombres réels tels que $\lambda_n > 0$ pour $n=1, 2, \cdots$ et $\lambda_n \to \infty$ pour $n \to \infty$.

Nous définissons A_n dans X_n par

$$A_n P_n x = P_n(\lambda_n^2 R(\lambda_n) - \lambda_n I)x \tag{3}$$

pour $x \in X$ où $R(\lambda)$ est la résolvante de A, c'est-à-dire $R(\lambda) = (\lambda I - A)^{-1}$. On a donc $D(A_n) = X_n$ pour $n=1, 2, \cdots$.

LEMME 2.1. *A_n est m-dissipatif pour $n \geq N$.*

DÉMONSTRATION. Pour $x \in X$ et $\lambda > 0$, on a

$$\begin{aligned} &\|(\lambda I - A_n)P_n x\| \\ &= \|\lambda P_n x - P_n(\lambda_n^2 R(\lambda_n) - \lambda_n I)x\| \\ &\geq (\lambda + \lambda_n)\|P_n x\| - \lambda_n^2 \|P_n R(\lambda_n)x\|. \end{aligned} \tag{4}$$

D'après (1) et (2), on obtient

$$\|P_n R(\lambda_n)x\| = \|R(\lambda_n)x\| \leq \frac{1}{\lambda_n}\|x\| = \frac{1}{\lambda_n}\|P_n x\|$$

pour $n \geq N$. De (4), nous avons

$$\|(\lambda I - A_n)P_n x\| \geq \lambda \|P_n x\| \tag{5}$$

pour $x \in X$, $\lambda > 0$ et $n \geq N$.

Soit $z \in X$ et nous définissons une application K_n de X_n en lui-même pour $n = 1, 2, \cdots$ par

$$K_n P_n x = \frac{1}{\lambda + \lambda_n} P_n z + \frac{\lambda_n^2}{\lambda + \lambda_n} P_n R(\lambda_n) x \tag{6}$$

pour $x \in X$ et $\lambda > 0$. Alors nous obtenons

$$\begin{aligned} &\|K_n P_n x_n - K_n P_n y\| \\ &= \frac{\lambda_n^2}{\lambda + \lambda_n} \|P_n R(\lambda_n)x - P_n R(\lambda_n)y\| \end{aligned} \tag{7}$$

pour $x, y \in X$. D'après (1) et (2), on a

$$\begin{aligned}\|P_nR(\lambda_n)x-P_nR(\lambda_n)y\| &= \|P_nR(\lambda_n)(x-y)\| \\ &= \|R(\lambda_n)(x-y)\| \leq \frac{1}{\lambda_n}\|x-y\| \\ &= \frac{1}{\lambda_n}\|P_n(x-y)\| = \frac{1}{\lambda_n}\|P_nx-P_ny\|\end{aligned}$$

pour $n \geq N$. De (7), nous avons

$$\|K_nP_nx-K_nP_ny\| \leq \frac{\lambda_n}{\lambda+\lambda_n}\|P_nx-P_ny\|$$

pour $n \geq N$. Puisque $\frac{\lambda_n}{\lambda+\lambda_n}<1$, K_n est l'application de contraction stricte pour $n \geq N$. En vertu du Théorème de point fixé, il existe $P_nx \in X_n$ tel que $K_nP_nx = P_nx$ pour $n \geq N$. Pour tel $P_nx \in X_n$, d'aprés (6) on obtient

$$P_nx=\frac{1}{\lambda+\lambda_n}P_nz+\frac{\lambda_n^2}{\lambda+\lambda_n}P_nR(\lambda_n)x,$$

duquel nous obtenons

$$\begin{aligned}P_nz &= \lambda P_nx-P_n(\lambda_n^2R(\lambda_n)-\lambda_nI)x, \\ &= \lambda P_nx-A_nP_nx=(\lambda I-A_n)P_nx \\ &\in R(\lambda I-A_n).\end{aligned}$$

Par conséquent, on a

$$R(\lambda I-A_n)=X \text{ pour } \lambda>0 \text{ et } n \geq N. \tag{8}$$

D'après (5) et (8), A_n est m-dissipatif pour $n \geq N$.

En vertu du Théorème de Hille-Yosida et Lemme 2.1, A_n est l'opérateur générateur de quelque semi-groupe continu $\{T_n(t) ; t \geq 0\}$ des opérateurs linéaires des contractions sur X pour $n \geqslant N$.

LEMME 2.2. *Nous avons*

i) $\lim_{n\to\infty} A_n = A$;

ii) $\lim_{n\to\infty} T_n(t)=T(t)$ *uniformément pour* $t \in [0, T]$.

DÉMONSTRATION. i) Pour $z \in D(A)$ on a

$$\begin{aligned}\|P_n(\lambda_nR(\lambda_n)z-z)\| &= \|\lambda_nR(\lambda_n)z-z\| \\ &\leq \|R(\lambda_n)Az\| \leq \frac{1}{\lambda_n}\|Az\|\end{aligned}$$

pour $n \geq N$, duquel nous obtenons

$$\|P_n(\lambda_n R(\lambda_n)z - z)\| \to 0 \text{ pour } n \to \infty. \tag{9}$$

D'après (2), (9) et $\overline{D(A)} = X$, pour tout $y \in X$

$$\|P_n(\lambda_n R(\lambda_n)y - y)\| \to 0 \text{ pour } n \to \infty. \tag{10}$$

Pour $x \in D(A)$, d'après (10) on obtient

$$\begin{aligned} \|A_n P_n x - P_n A x\| & \\ &= \|P_n(\lambda_n^2 R(\lambda_n) - \lambda_n I)x - P_n A x\| \\ &= \|P_n(\lambda_n R(\lambda_n) A x - A x)\| \to 0 \text{ pour } n \to \infty. \end{aligned} \tag{11}$$

ii) Nous mettons $R_n(\lambda) = (\lambda I - A_n)^{-1}$ pour $\lambda > 0$.

Pour $x \in X$, en vertu de $R(\lambda I - A) = X$ pour $\lambda > 0$, il existe $y \in D(A)$ tel que $x = (\lambda I - A)y$ et $y = R(\lambda)x$. Nous avons donc

$$\begin{aligned} \|R_n(\lambda)P_n x - P_n R(\lambda)x\| &= \|R_n(\lambda)\ P_n x - P_n y\| \\ &= \|R_n(\lambda)P_n x - R_n(\lambda)(\lambda I - A_n)P_n y\| \\ &\leq \frac{1}{\lambda}\|P_n x - (\lambda I - A_n)P_n y\| \\ &= \frac{1}{\lambda}\|P_n(\lambda I - A)y - (\lambda I - A_n)P_n y\| \\ &= \frac{1}{\lambda}\|P_n A y - A_n P_n y\| \end{aligned}$$

D'après (11), on a

$$\|R_n(\lambda)P_n x - P_n R(\lambda)x\| \to 0 \text{ pour } n \to \infty,$$

duquel, pour m le nombre entier positif fixé, nous obtenons

$$\|R_n(\lambda)^m P_n x - P_n R(\lambda)^m x\| \to 0 \text{ pour } n \to \infty. \tag{12}$$

Pour $x \in X$ nous avons

$$\begin{aligned} &\|P_n T(t)x - T_n(t)P_n x\| \\ &\leq \|P_n(T(t)x - \frac{m}{t}R\left(\frac{m}{t}\right)^m x)\| \\ &+ \|P_n \frac{m}{t}R\left(\frac{m}{t}\right)^m x - \frac{m}{t}R_n\left(\frac{m}{t}\right)^m P_n x\| \\ &+ \|\frac{m}{t}R_n\left(\frac{m}{t}\right)^m P_n x - T_n(t)P_n x\|. \end{aligned}$$

En vertu de la représentation du semi-groupe continu $\{T(t) : t \geq 0\}$ des opérateurs linéaires sur X, avec son opérateur générateur A : pour $x \in X$

$$T(t)x = \lim_{m \to \infty} \frac{m}{t}R\left(\frac{m}{t}\right)^m x$$

uniformément pour $t \in [0, T]$, pour $\varepsilon > 0$, il existe un nombre m_0 fixé suffisamment grand pour que

$$\|P_n\Big(T(t)x - \frac{m_0}{t}R\Big(\frac{m_0}{t}\Big)^{m_0}x\Big)\| \tag{13}$$
$$= \|T(t)x - \frac{m_0}{t}R\Big(\frac{m_0}{t}\Big)^{m_0}x\| < \frac{\varepsilon}{3}$$

pour $n \geq N$ et $t \in [0, T]$, et

$$\|\frac{m_0}{t}R_n\Big(\frac{m_0}{t}\Big)^{m_0}P_n x - T_n(t)P_n x\| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{14}$$

pour $n \geq N$ et $t \in [0, T]$. D'après (12), pour $\varepsilon > 0$, il existe un nombre entier positif M tel que

$$\|P_n \frac{m_0}{t}R\Big(\frac{m_0}{t}\Big)^{m_0}x - \frac{m_0}{t}R_n\Big(\frac{m_0}{t}\Big)^{m_0}P_n x\| < \frac{\varepsilon}{3} \tag{15}$$

pour $n \geq M$ et $t \in [0, T]$. Nous posons $n_0 = \max(M, N)$. Alors d'après (13), (14) et (15), on obtient

$$\|P_n T(t)x - T_n(t)P_n x\| < \varepsilon$$

pour $n \geq n_0$ et $t \in [0, T]$. Par conséquent, nous avons

$$\lim_{n\to\infty} T_n(t) = T(t)$$

uniformément pour $t \in [0, T]$. En vertu du Lemme 2.1 et Lemme 2.2 nous obtenons

THÉORÈME 2.3. *Soit A est m-dissipatif avec le domaine dense dans X. Il existe donc une suite $\{A_n\}$ des opérateurs m-dissipatifs avec $D(A_n) = X_n$ pour $n = 1, 2 \cdots$, telle que*

i) $\lim_{n\to\infty} A_n = A$;

ii) $\lim_{n\to\infty} T_n(t) = T(t)$ *uniformément pour* $t \in [0, T]$,

où $\{T_n(t) : t \geq 0\}$ et $\{T(t) : t \geq 0\}$ sont les semi-groupes continus des opérateurs des contractions sur X_n et X, engendrés par A_n et A respectivement.

REMARQUE. Soit $X = X_n$ et $P_n = I$ pour tout $n = 1, 2, \cdots$. Alors $N = 1$ et Théorème 2.3 devient le résultat sur la convergence forte des opérateurs dans X.

§ 3. Le cas oú A est non-linéaire.

On dit que l'opérateur A est dans la classe $\mathfrak{A}(\omega)$, $\omega \geq 0$ si pour tout $x, y \in D(A)$ et $0 < \lambda\omega < 1$,

$$\|(x + \lambda Ax) - (y + \lambda Ay)\| \geq (1 - \lambda\omega)\|x - y\|. \tag{16}$$

Nous appelons accretif l'opérateur A si A est dans la classe $\mathfrak{A}(0)$, et m-accretif l'opérateur A si A est accretif et $R(I+\lambda A)=X$ pour tout $\lambda>0$.

Dans cette section nous utiliserons les trois théorèmes suivants dans les travaux [3] et [4].

THÉORÈME A. *Soit* $A\in\mathfrak{A}(\omega)$, $\omega\geq 0$ *avec* $R(I+\lambda A)\supset\overline{co D(A)}$ *pour* $0<\lambda\omega<1/2$. *Alors il existe le semi-groupe continu* $\{T(t): t\geq 0\}$ *des opérateurs sur* $\overline{D(A)}$ *avec* $\|T(t)x-T(t)y\|\leq e^{\omega t}\|x-y\|$ *pour* $x, y\in D(A)$.

On dit qu'un tel semi-groupe $\{T(t): t\geq 0\}$ est engendré par A, ou que A est l'opérateur générateur du semi-groupe $\{T(t): t\geq 0\}$.

THÉORÈME B. *Soit* $A\in\mathfrak{A}(\omega)$, $0\leq\omega\leq\alpha$ *avec* $R(I+\lambda A)\supset\overline{co D(A)}$ *pour* $0<\lambda\omega<1/2$ *et soit* $A_n\in\mathfrak{A}(\omega_n)$, $0\leq\omega_n\leq\alpha$ *avec* $R(I+\lambda A_n)\supset\overline{co D(A_n)}$ *pour* $0<\lambda\omega_n<1/2$ *et* $n=1, 2, \cdots$, *Si* $D(A)\subset D(A_n)$ *pour* $n=1, 2, \cdots$, *et* $\lim_{n\to\infty} J_{\lambda, n}x=J_\lambda x$ *pour* $x\in\overline{co D(A)}$, *où* $J_{\lambda, n}=(I+\lambda A_n)^{-1}$ *et* $J_\lambda=(I+\lambda A)^{-1}$ *pour quelque* λ, *alors pour tout* $x\in\overline{D(A)}$ $\lim_{n\to\infty} T_n(t)x$ $T(t)x$ *uniformément pour* $t\in[0, T]$, *où* $\{T_n(t): t\geq 0\}$ *et* $\{T(t): t\geq 0\}$ *sont les semi-groupes engendrés par* A_n *et* A *respectivement*.

THÉORÈME C. *Soit le dual* X^* *de* X *uniformément convexe et soit* A_n *et* A *clos et m-accretifs dans* X *avec* $D(A_n)=D(A)$ *pour* $n=1, 2, \cdots$. *Si pour* $x\in\overline{D(A)}$ $\lim_{n\to\infty} T_n(t)x=T(t)x$ *uniformément pour* $t\in[0, T]$ *et si* $\lim_{n\to\infty} A_nx$ *existe pour* $x\in D(A)$, *où* $\{T_n(t): t\geq 0\}$ *et* $\{T(t): t\geq 0\}$ *sont les semi-groupes des opérateurs des contractions engendrés par* A_n *et* A *respectivement, alors* $\lim_{n\to\infty} A_nx=Ax$ *pour* $x\in D(A)$.

Soit A clos et m-accretif avec $D(A)=X$. Pour tout $\varepsilon>0$ nous prenons $\lambda_0>0$ tel que

$$\lambda_0<\varepsilon/2\|Ax\| \text{ pour } x\in X. \tag{17}$$

Nous posons $A_n=\frac{1}{\lambda_0\lambda_n^2}(I-J_{\lambda_n})$. En vertu de $R(I+\lambda A)=X$ pour $\lambda>0$, on a $D(A_n)=X$ pour $n=1, 2, \cdots$.

LEMME 3.1. *A_n est clos et m-accretif pour* $n=1, 2, \cdots$.

DÉMONSTRATION. Pour $x, y\in X$, nous avons

$$\begin{aligned} &\|(I+\lambda A_n)x-(I+\lambda A_n)y\| \\ &=\Big\|\Big(1+\frac{\lambda}{\lambda_0\lambda_n^2}\Big)(x-y)-\frac{\lambda}{\lambda_0\lambda_n^2}(J_{\lambda_n}x-J_{\lambda_n}y)\Big\| \end{aligned} \tag{18}$$

$$\geq \left(1+\frac{\lambda}{\lambda_0\lambda_n^2}\right)\|x-y\| - \frac{\lambda}{\lambda_0\lambda_n^2}\|J_{\lambda_n}x - J_{\lambda_n}y\|$$

$$\geq \|x-y\|.$$

Soit $z \in X$. Nous définissons l'application K_n de X en lui-même pour $n=1, 2, \cdots$ par

$$K_n x = \frac{1}{1+\lambda_n^{-2}} z + \frac{\lambda_n^{-2}}{1+\lambda_n^{-2}} J_{\lambda_n} x \tag{19}$$

pour $x \in X$. Pour $x, y \in X$ on obtient

$$\|K_n x - K_n y\|$$

$$= \left\| \left(\frac{1}{1+\lambda_n^{-2}} z + \frac{\lambda_n^{-2}}{1+\lambda_n^{-2}} J_{\lambda_n} x \right) - \left(\frac{1}{1+\lambda_n^{-2}} z + \frac{\lambda_n^{-2}}{1+\lambda_n^{-2}} J_{\lambda_n} y \right) \right\|$$

$$= \frac{\lambda_n^{-2}}{1+\lambda_n^{-2}} \|J_{\lambda_n} x - J_{\lambda_n} y\| \leq \frac{\lambda_n^{-2}}{1+\lambda_n^{-2}} \|x-y\|.$$

Puisque $\lambda_n^{-2}/\left(1+\lambda_n^{-2}\right)<1$, K_n est l'application de contraction stricte pour $n=1, 2, \cdots$. En vertu du Théorème de point fixé, il existe $x \in X$ tel que $K_n x = x$, pour $n=1, 2, \cdots$. D'après (19), nous obtenons

$$x = \frac{1}{1+\lambda_n^{-2}} z + \frac{\lambda_n^{-2}}{1+\lambda_n^{-2}} J_{\lambda_n} x,$$

duquel on a

$$z = (1+\lambda_n^{-2})x - \lambda_n^{-2} J_{\lambda_n} x = x + \lambda_n^{-2}(x - J_{\lambda_n} x)$$

$$= x + \lambda_0 A_n x \in R(I+\lambda_0 A_n).$$

Nous avons donc $R(I+\lambda_0 A_n) = X$ pour $n=1, 2, \cdots$. Par conséquent on obtient

$$R(I+\lambda A_n) = X \text{ pour tout } \lambda > 0 \text{ et } n=1, 2, \cdots \tag{20}$$

Soit une suite $\{x_m\}$ dans X convergente vers $x \in X$ et une suite $\{A_n x_m\}$ convergente vers $y \in X$. Alors nous obtenons

$$\|A_n x - y\| \leq \|A_n x - A_n x_m\| + \|A_n x_m - y\|$$

$$\leq \frac{1}{\lambda_0 \lambda_n^{-2}} (\|x - x_m\| + \|J_{\lambda_n} x - J_{\lambda_n} x_m\|) + \|A_n x_m - y\|$$

$$\leq \frac{2}{\lambda_0 \lambda_n^{-2}} \|x - x_m\| + \|A_n x_m - y\| \to 0$$

pour $m \to \infty$ et $n=1, 2, \cdots$, duquel $A_n x = y$ pour $n=1, 2, \cdots$. Par conséquent avec

(18) et (20) A_n est clos et m-accretif pour $n=1, 2, \cdots$.

THÉORÈME 3.2. *Soit le dual X de X^* uniformément convexe et soit l'opérateur A clos et m-accretif aves $D(A)=X$. Alors il existe une suite $\{A_n\}$ des opérateurs clos et m-accretifs avec $D(A_n)=X$ pour $n=1, 2, \cdots$ telle que pour $x\in X$, $\lim_{n\to\infty}A_n x=Ax$ et $\lim_{n\to\infty}T_n(t)x=T(t)x$ uniformément pour $t\in[0, T]$, où $\{T_n(t)\ ;\ t\geq 0\}$ et $\{T(t)\ ;\ t\geq 0\}$ sont les semi-groupes des opérateurs des contractions sur X, engendrés par A_n et A respectivement.*

DÉMONSTRATION. Pour $x\in X$ on a

$$\begin{aligned}
\|J_{\lambda_0, n}x-J_{\lambda_0}x\| &\leq \|J_{\lambda_0, n}x-J_{\lambda_0, n}(I+\lambda_0 A_n)J_{\lambda_0}x\| \\
&\leq \|x-(I+\lambda_0 A_n)J_{\lambda_0}x\| \leq \|x-J_{\lambda_0}x\|+\lambda_0\|A_n J_{\lambda_0}x\| \\
&= \|x-J_{\lambda_0}x\|+\lambda_0\|\frac{1}{\lambda_0\lambda_n^{-2}}(I-J_{\lambda_n})J_{\lambda_0}x\| \\
&\leq \lambda_0\|Ax\|+\frac{1}{\lambda_n}\|AJ_{\lambda_0}x\| \leq \lambda_0\|Ax\|+\frac{1}{\lambda_n}\|Ax\|.
\end{aligned}$$

Pour $\varepsilon>0$, il existe $n_0>0$ tel que pour $n>n_0$, $\frac{1}{\lambda_n}\|Ax\|<\varepsilon/2$. Avec (17), pour $n>n_0$ et $x\in X$, nous avons $\|J_{\lambda_0, n}x-J_{\lambda_0}x\|<\varepsilon$. En vertu du Théorème B, pour $x\in X$, $\lim_{n\to\infty}T_n(t)x=T(t)x$ uniformément pour $t\in[0, T]$. Pour $x\in X$

$$\begin{aligned}
&\|A_n x-A_m x\| \\
&= \|\frac{1}{\lambda_0\lambda_n^2}(I-J_{\lambda_n})x-\frac{1}{\lambda_0\lambda_m^2}(I-J_{\lambda_m})x\| \\
&\leq \frac{1}{\lambda_0}\Big(\frac{1}{\lambda_n^2}\|(I-J_{\lambda_n})x\|+\frac{1}{\lambda_m^2}\|(I-J_{\lambda_m})x\|\Big) \\
&\leq \frac{1}{\lambda_0}\Big(\frac{1}{\lambda_n}+\frac{1}{\lambda_m}\Big)\ \|Ax\|\to 0 \text{ pour } n, m\to\infty.
\end{aligned}$$

Donc $\{A_n x\}$ est la suite de Cauchy dans X et il existe la limite $\lim_{n\to\infty}A_n x$ pour $x\in X$. En vertu du Théorème C, $\lim_{n\to\infty}A_n x=Ax$ pour $x\in X$. Par conséquent avec le Lemme 3.1 le Théorème est ainsi démontré.

Université de Busan
Corée

BIBLIOGRAPHIE

[1] H. Brezis and A. Pazy, *Convergence and approximation of semigroups of nonlinear operators in Banach spaces*, Jour. Funct. Analy. 9((1972) 63—74

[2] K. S. Ha, *Convergence of nonlinear semigroups and approximation schemes to well-posed Cauchy problem in Banach spaces*, Mem. Fac. Sci. Kyushu Univ. Ser. A, Math. 25(1971) 337—350.

[3] ______, *On convergence of semigroups of operators in Banach spaces*, Jour. Korean Math. Soc. 9 (1972) 91—99.

[4] ______, *On generation of semigroups of operators in Banach spaces*, Univ. Jour. Busan Univ. 15 (1973) 11—19.

[5] E. Hille and R. S. Phillips, *Functional analysis and semigroups*, Amer. Math. Soc. New York, 1957.

[6] S. G. Kreîn, *Les équations différentielles linéaires dans un espace de Banach* (traduit du russe en japonais par T. Usijima et K. Tsujioka), Yosioka Syoten, Tokyo 1972.

[7] H. F. Trotter, *Approximation of semigroups of operators*, Pac. Jour. Math. 8 (1958) 887—919.

[8] K. Yosida, *Functional analysis*, Springer-Verlag, 1968.