韓國數學敎育學會誌〈數學敎育〉
1973. 6. Vol. XI No. 2

Journal of the Korean Society of Mathematical Education
June 1973. Vol. XI No. 2

高等學校數學敎材의 論理的 取扱에 關하여

羅 炳 昭

I. 硏究動機 및 目的

수학교육의 현대화 문제는 범 세계적으로 "크로즈엎"된지 벌써 20여년이 된 오늘날, 우리나라에서도 이 현대화 문제에 대하여 여러가지 방법으로 연구되고 있다.

그러면 이와같이 절실히 요구되는 數學敎育 現代化의 배경을 살펴보자.

"초등 수학교육의 현대화에 따른 교육내용의 개선 및 교사교육에 관한 연구"에서 현대 수학의 특징을

1. 公理主義와 構造主義
2. 새로운 應用數學의 形成
3. 數學基礎論과 계산기의 結緣

으로 보고 이와같은 현대수학의 특징은 수학교육의 성격을 바꾸어놓게 하고 있으며, 수학교육 개혁은 현대사회가 요청한 것이라고 주장하고 있다([4] 통권 24호 p. 4～5).

또 학교수학 에서는 수학교육 개혁의 동기로서

1. 현대수학 자체의 발전
2. 급속한, 그리고 고도로 발달한 과학기술
3. 대규모 고성능의 전자계산기의 출현
4. 수리 논리학의 발달

을 들고 있으며, 특히 4에 대하여서는 다음과 같이 강조하고 있다.

「아리스토 텔레스」가 집대성했던 演繹의 형식은 약 2000년에 걸쳐 완전한 것, 「본질적으로 개량의 여지가 없는것」으로 인식되어 왔다.

사실 1787년 까지만 해도 형식논리학은 「아리스토 텔레스」이래 완전무결한 학문이라고 대철학자 「칸트」가 주장할 정도였다.

그러나 전통적 논리학은 대단히 불완전한 것이며 초등교육의 추론에서 쓰여지고 있는 많은 추론 원리 조차도 설명할 수 없는 것이라고 비판받기 시작하였다.

현대에 있어서의 논리학 연구는 1847년 「불」(G. Boole)의 「論理의 數學的 分析」이라는 간행물을 비롯하여 생긴 전통적인 논리학으로서는 설명할 수도 없는 보다 광범위한 여러형의 연역방법에 대한 엄밀한 논리형식을 제공하고 있는 「論理代數」의 출현으로, 논리학의 「르네상스」를 맞이하게 되었다.

특히 1931년에 발표된 「괴델」(K. Gödel)의 증명과 「코헨」(B. Cohen)등을 거쳐서 발전되고 있는 수학기초론 및 수리논리학에 대한 업적으로 말미암아 종전에 철학자들의 전용물이었던 형식논리학은 예리한 비판을 받게 되었고, 그의 결함이 들어나게 되었다.

수리논리학은 현대수학의 기저를 이루며, 모든 과학분야의 연구는 물론, 인간의 사고형식에 까지도 큰 영향을 미치고 있다.

따라서 인간의 기본사고 형식에 따른 논리의 지도는 수학교육이 감당해야만 하게 되었다([5] p. 2～p. 4).

이와같은 견지에서 볼 때 현대수학에서 논리가 차지하는 비중은 매우 큰 것이다.

그러나 현대수학에의 접근을 위하여 중·고등학교의 교재 내용을 살펴보면 논리의 지도는 대체로 소홀히 다루어져 있다.

數學을 일종의 論理로 볼 때 수학에서 쓰이는 하나 하나의 말, 기호에는 엄격한 뜻이 있으며 이 뜻을 잘 이해하지 못하면 문제 하나를 다루는데도 큰 착오를 일으키는 일이 많다.

이런 뜻에서 논리의 지도가 매우 필요하며, 지금까지의 교재에도 논리에 관한 부분이 있었지만 이것을 종합적으로 지도해야 할 것이다([4] 통권 14호 p.11). 물론, 이것은 고교에서 Boole 대수적인 복잡한 記號論理나 非形式論理를 지도하라는 것은 아니다.

교재를 취급하는데 사용되는 논리를 종합적으로 지도하고 특히 연역적인 추론 방법을 철저히 지도하기 위한 논리가 필요하다는 것이다.

다행히도 1972년에 발표된 새로운 산수과 교육과정을 살펴보면 논리의 중요성이 강조되어 있고, 기호를 적극적으로 사용하고 있음을 알 수 있다.

이 시안의 특징을 대체적으로 살펴보면

1. 집합. 함수의 기본적인 개념의 도입

2. 수학적인 관찰이나 원리적인 것이 들어 있다.

3. 수학적인 용어나 기호가 적극적으로 사용되고 있다.

로 집약할 수 있는데([4] 통권 24호 p.56~57)

이것은 論理의 重要性과 記號의 使用에 대한 철저한 지도를 요구하고 있는 것이다.

이와같이 산수과 교육과정의 특징중 하나를 "記號와 用語의 적극적인 使用"에 둔다면 중·고등학교에서는 이를 계승 발전시켜야 할 것은 당연한 것이다.

그래서 본 연구는 고등학교에서 교재를 논리적으로 취급하기 위하여

1. 수학 명제를 기호화 한다.

2. 전제와 결론 사이의 의존관계나 대응관계를 파악하여 논증의 능력을 배양시킨다.

3. 연역적인 추론 방법을 알아보고, 이를 이용하여 새로운 사실을 추론할 수 있도록 한다.

이를 위하여 우리나라의 현행 교과서를 분석, 비판하고 수학교육에 관하여 활동적인 연구를 하고 있는 OEEC의 가맹국 중 프랑스, 미국의 UICSM, 그리고 일본의 교과서와 1973년으로 예정된 교육과정의 개편내용을 살펴보고 논리지도에 관한 가장 바람직한 방법을 찾아서 이것을 현행 우리나라 교과서에 적용시키는 것이 본 연구의 목적이다.

Ⅱ. 우리나라의 現況 및 批判

1. 高等學校 敎育課程의 考察

1955년에 공포된 敎育課程의 정신을 이어받아 수학교육의 원대한 목표를 달성하기 위하여 1963년 2월에 개정 공포된 고등학교 교육과정의 개정요점을 살펴보면 共通數學의 指導에 있어서 "中學校의 수학의 내용을 더욱 발전시키고 나아가서 뒤에 배울 수학의 기초적인 통찰과 통일을 주어서 생활을 합리화 하고 향상시켜 나가는 基礎가 되는 것과 論證에 의하여 체계적으로 전개해 가는 방법과 수학 전체의 밑바닥에 흐르는 생각을 지도함"([3] p.117)이라고 하여 共通數學은 중학교 수학의 연장 발전과정임과 論證에 의한 체계적인 전개를 강조하고 있다.

또 수학전반의 지도목표를 살펴보면([2] p.327)

2. 수량적인 관계나 문제를 기호나 식을 사용하여 간결하고 정확하게 표현하고,……

3. 논리적인 사고방법의 필연성을 깨닫고 조리 있게 추리하여 論理에 흥미를 일으키거나 편견에 치우치지 않고 적합한 판단을 내릴 수 있는 능력을 길러……와 같이 수학적인 관계를 기호로 사용하여 간결하게 표현하고, 용어를 바르게 사용하며 논리적인 體系에 대하여 이해하고 논리적으로 생각하는 능력과 태도 및 통찰력을 기르는데 중점을 두고 있는 것이다.

이것은 公理를 토대로 하여 論理의 法則에 의하여 數學의 體系를 구성하도록 하는 것을 말한다.

앞에서 살펴본 바와 같은 배경 밑에서 共通數學, 數學Ⅰ, 數學Ⅱ가 어떻게 구성되어 있는가를 살펴보자.

먼저 공통수학의 지도 목표를 살펴 보면([2] p.328)

6. 幾何學의 體系의 構成을 이해하여, 이것이 지식을 학문적으로 꾸리는 한가지 전형임을 깨닫게 한다.

7. 조리있게 논리적으로 사고하는 방식을 이해하고 前提와 結論사이의 의존관계, 대응관계

를 파악할 줄 알게하여 논리운영에 주의하는 습관을 기르도록 한다.

이와같은 설명은 論證의 지도를 목표로 하고, 公理를 토대로 하여 체계적인 論理와 해석적인 研究方法을 해나갈 수 있도록 하기 위한 것이다.

이와같은 목표는 공통수학 전반의 지도에 충분히 반영되어야 할 것은 당연하다.

그런데 교육 현장에서 지도될 지도내용을 살펴보면 이 목표에 다소 차이가 있음을 발견할 수 있다.

第1章 수와 식에서 第5章 곡선의 방정식 까지는 대부분 개념의 이해와 이에 대한 직관적인 취급이 다루어 지고 있을 뿐 論理的으로 어떻게 取扱해야 할 것인가에 대한 방법이 전혀 언급되어 있지 않다.

그리고 第6章 평면도형과 그 성질에서 "平面圖形을 公理, 定義를 토대로 하여 논리적인 사고방법으로 증명하되 命題의 形態로 지도한다." "命題를 條件과 結論으로 나누어 조건과 조건사이의 의존관계 태응관계를 論證하는 능력을 기른다."([2] p. 332)

와 같이 論證에 대하여 언급되어 있다.

물론 여기에서 논리적인 사고방법을 公理, 定義를 토대로 하여 지도하고 논증을 수학의 전 분야에 걸쳐 이미 학습한 사실을 예로들어 지도하고, 지도방법으로는 命題의 형태를 조사하여 假定에서 結論이 어떻게 유도되며 逆의 관계, 裏, 對偶의 관계등과 같이 조건과 조건사이의 관계를 지도하라는 것이다.

그러나 論理를 평면도형의 성질을 증명하는 과정에서 주로 지도하도록 한 점은 論理를 수학의 기본적인 운영도구라 생각할 때 수학 전반에서 지도하여야 되는 점과 다소 차이가 있는 점은 생각할 문제이다.

또 구체적으로 논리를 어떻게 지도하고 이에 필요한 기호(예를 들면 ∀.∃ 등)에 대한 지도와 論證의 形態에 대한 것은 전혀 설명되고 있지 않다.

수학 I 과 수학 II의 指導目標를 살펴보아도 "4 공간 도형에 대한 기본적인 개념과 법칙을 이해하도록 한다"([2] p. 334)와 같이 평면도형을 토대로 공간도형에 대한 성질을 논리적으로 취급하도록 하고 있을 뿐, 대수에 대한 것은 거의 개념과 이것에서 직관적으로 처리할 수 있는 내용만 다루어지고 있는 것이다.

이 점은 수학전반의 지도목표와는 커다란 차이점이 있는 것임을 의미하며, 또 수학을 일종의 論理로 볼때 적당히 넘길 수 없는 문제인 것이다.

물론 개념에 대한 이해와 이 개념에서 직관적으로 취급되어 얻을 수 있는 성질도 논리적으로 유도된 것이어야 하나, 전반적으로 論理的 取扱을 한 것이라고는 볼 수 없다.

이상에서 교육과정에서 어떻게 교재를 논리적으로 취급해야 할 것인가에 대하여 고찰하여 보았다.

그러면 이상과 같은 관점에서 현행교과서는 어떻게 이것을 반영하고 있는가 살펴보기로 하자.

2. 現行 教科書의 分析

우리나라의 現行 教科書는 論理운영에 있어서 세심한 주의를 기울이고 있음을 살펴볼 수가 있다.

먼저 부등식에 관한 章을 살펴보자.

〔大小의 定義〕

두 실수 또는 두 식 a, b에 있어서

$a-b>0 \iff a>b$

$a-b=0 \iff a=b$

$a-b<0 \iff a<b$

〔基本 性質〕

1. a가 임의의 실수이면 다음 3가지중 꼭 하나만 성립한다(삼일 법칙).

$a>0,\quad a=0,\quad a<0$

2. $a>0,\ b>0$이면 $a+b>0,\ ab>0$

〔定理〕 $a>b,\ b>c$이면 $a>c$

〈證明〉

$a>b,\ b>c$이므로 $a-b>0,\ b-c>0$이다.

2에 의하여 $(a-b)+(b-c)>0$

따라서 $a-c>0$

$\therefore a>c$

이와같이 먼저 定義를 하고 부등식에 관한 基本性質[1]을 소개한 뒤에 이것을 이용하여 부등

식에 관한 여러가지 定理를 증명하고 있다.

그러면 論理에서 사용되는 記號와 論證 및 證明 方法이 어떻게 되어 있는가 살펴 보기로 하자.

두 命題 P, Q에 있어서

"P 또는 Q"의 否定 "$\bar{P}$ 그리고 $\bar{Q}$[2)]"

"P 그리고 Q"의 否定 "$\bar{P}$ 또는 $\bar{Q}$"

와 같이 連結詞 ∧, ∨이 직접 사용되고 있지는 않지만 이와 같은 기호를 사용한 다음과 같은 사실을 명확히 설명하고 있다.

$\sim(P \vee Q) \equiv \sim P \wedge \sim Q$

$\sim(P \wedge Q) \equiv \sim P \vee \sim Q$

다음에 P→Q의 命題에 관한것도 다음과 같이 기술하고 있다.

다음 세 명제는 같은 뜻을 가진다.

P 또는 Q

$\bar{P}$ 이면 Q

$\bar{Q}$ 이면 P

따라서 명제

P 이면 Q

는 다음 명제와 같은 뜻을 가짐을 알 수 있다.

$\bar{P}$ 또는 Q

위의 사실은 다음과 같은 同値關係의 설명이다.

$P \longrightarrow Q \equiv \sim P \vee Q$

이와같이 조건문 P→Q를 ∼과 ∨를 이용하여 설명하고 이것을 集合과 관련시켜서 이해시키고 있다.

다음에 逆, 裏, 對偶의 관계를 설명하면서 命題 P→Q가 眞이면 그의 對偶 ∼Q→∼P도 眞이다.

그러나 逆 Q→P와 裏∼P→∼Q는 眞이라고 말할 수 없음을 集合과 관련시켜서 이해시키고 있다.

이것은

$$\begin{array}{l} P \longrightarrow Q \\ \quad\ \sim Q \\ \hline \therefore \sim P \end{array}$$

는 有效한 推論이지만

$$\begin{array}{l} Q \longrightarrow Q \\ \qquad\quad Q \\ \hline \therefore P \end{array} \qquad \begin{array}{l} P \longrightarrow Q \\ \sim P \\ \hline \therefore \sim Q \end{array}$$

는 有效하지 않은 推論임을 보이고 있는 것이다.

다음에 論證에 있어서는

$$\begin{array}{l} P \longrightarrow Q \\ Q \longrightarrow R \\ \hline \therefore P \longrightarrow R \end{array}$$

와 같이 三段論法을 기술하고, 다음과 같은 방법으로 集合을 이용하여 설명하고 있다.

동물은 생물이다.

사람은 동물이다.

∴ 사람은 생물이다.

〈이유〉 사람의 집합을 A, 동물의 집합을 B, 생물의 집합을 C라 하면 위의 3명제는 각각 $B \subseteq C$, $A \subseteq B$, $A \subseteq C$가 되고

$B \subseteq C$이고 $A \subseteq B$이면 $A \subseteq C$가 된다.

그리고 삼단논법에 의하여 演繹的 推論을 전개하고 있다.

P⇨Q의 證明에 있어서는 직접법, 귀류법, 치환법, 동일법등이 있음을 기술하고 이와같은 證明方法을 보기로써 이해시키고 있다.

數學的 歸納法에 대하여는 자세히 설명되어 있으므로 여기에서는 數學的 歸納法에 관한 것은 더 이상 설명하지 않기로 한다.

그러나 이와같이 敎材의 論理的 取扱에 있어서 세심한 주의가 교과서 전반에 나타나고 있지만 몇가지 미흡한 점을 살펴보지 않을 수 없다.

첫째로 用語의 定義가 미흡한 점이다. 간혹 용어의 정의를 하는 대신 그 정의에 합당한 예를 소개하고 〈이와같은 것을…… 라 한다〉와 같은 방법으로 설명하고 있는데 이와같은 방법으로 용어를 정의하는 것은 시정되어야 할 것이다.

둘째로 "∀, ∃"와 같은 論理記號를 사용하지 않기 때문에 일어나는 혼란이다.

$\forall x \in U\ P(x)$, 또는 $\exists x \in U\ P(x)$ 등의 命題를 否定할 때 어떤 명제가 될 것인가를 정확히 지

---

1) 이것은 公理로 생각할 수 있다.

2) $\bar{P}, \bar{Q}$ 등은 ∼P, ∼Q와 같은 기호 이다.

도하는 데 미흡했고 절대부등식, 조건부등식 등과 같은 용어를 정의해야 할 복잡성이 뒤따른다.

예를 들면 $\exists x \in R$ $2x-3=2x+5$ 는 僞인 명제인데

이때 $2x-3=2x+5$ 를 不能인 方程式, $\forall x \in R$ $2(x+2)=2x+4$ 는 眞인 命題인데 이때 $2(x+2)=2x+4$ 를 否定인 方程式 또는 恒等式이라고 처리하며 $\forall x \in R$ $P(x) > Q(x)$ 가 眞인 命題일 때 $P(x) > Q(x)$ 를 絶對不等式이라고 정의한다.

이와같이 "$\forall, \exists$"등의 기호를 사용하여 수학문장을 기호화 하는 것은 의미를 이해시키기 위하여 매우 중요한 일이다.

세째로 有効한 推論과 有効하지 않은 推論에 대한 명확한 설명이 부족한 점이다.

命題 $P \rightarrow Q$ 의 대우는 본 명제와 동치이지만 逆과 裏는 동치가 아니므로 $P \rightarrow Q$ 가 眞일 때라도 $\bar{P} \rightarrow \bar{Q}$ 와 $Q \rightarrow P$ 가 꼭 眞이라고 할 수는 없다고 설명하고 있지만 다른 형태의 命題에 관해서는 전혀 언급이 없고 逆과 裏에 대하여도 직관적인 설명으로 그친점은 다시 한번 생각해 봐야 할 것이다.

네째로 全體集合에 대한 설명이 미흡한 점이다. $\forall x \in U$ $P(x)$ 또는 $\exists x \in U$ $P(x)$ 등의 命題의 眞僞는 全體集合 U 에 의하여 결정될 때가 많은데 이것을 분명히 설명하지 않고 처리하는 경우가 있다.

예를 들면

$$\frac{x}{x+2}-\frac{4}{x+1}=\frac{-2}{x+2}$$

와 같은 분수방정식에서 전체집합은 $R-\{-1, -2\}$ 로 볼 수 있으므로[3] 이 분수방정식을 정방정식으로 고쳐서 풀 때, 정방정식의 解集合은 $\{3, -2\}$ 가 되지만 $-2 \in R-\{-1, -2\}$ 이기 때문에 -2 는 解가 될 수 없음은 분명하다.

그런데 현행교과서는 이와같은 근을 무연근이라고 해서 제외하고 있지만 이것보다는 전체집합에서 생각하는 것이 자연스러울 것이다.

또 무리방정식이나 무리부등식에서도 全體集合을 명확히 함으로써 훨씬 자연스럽게 이해시킬 수 있는 것이다.

마지막으로 지적해야 할 점은 교육과정의 고찰에서도 살펴보았지만 직관적인 처리로 넘긴 부분이 많다는 것이다.

이것은 특히 극한 개념의 지도에서 많이 나타나는데 자세한 내용은 〔5〕의 통권 25호에 기술되어 있으므로 생략 한다.

또 대수의 성질[4]에서도 증명하지도 않은 사실을 직관으로 처리하여 眞임을 주장하는 命題가 있는데 이것은 數學的 構造에 근거하여 증명한 후에 이용하여야 할 것이다.

이상으로 우리나라의 現行 敎科書에서 논리적 취급이 미흡한 점을 살펴보았다.

물론, 고등학교에서는 Boole 대수적인 복잡한 記號論理나 非形式論理를 종합적으로 지도할 수는 없지만 그러나 엄격한 推論에 의하여 직관을 배제하고 간단한 수학적 문장을 기호화하여 사고의 절약을 기할 수 있도록 해야 할 것이다.

Ⅲ. 外國의 現況 및 批判

1. 미국(UICSM)

UICSM 교과서는 미국의 4년제 중, 고등학교 과정을 위한 가장 現代化된 교재이다.

먼저 이 교재의 特徵을 살펴보면(〔7〕 p. 8～11)

1. 철저히 集合槪念을 토대로 하여 전개되어 나갔으며, 따라서 교재의 集合化(位相化)가 다른 교과서에 비해서도 가장 철저하게 이루어져 있다.

2. 數學의 構造 특히 代數的 構造에 중점을 두었다.

3. 엄밀한 論理體系밑에서 公理系의 완전한 설정을 통하여 數理論理學을 바탕으로 하여 전 교재를 전개하였다.

4. 現代化, 集合化, 構造化, 論理化에 불필요

3) 전체집합을 복소수의 집합으로 확장하여 생각할 수도 있고, 자연수의 집합으로 줄여서 생각할 수도 있다. 또 임의로 주어질 수도 있지만 여기에서는 실수의 범위에서 생각하기로 한다.

4) 실수의 체계에서 體가 되는 성질을 公理와 같이 취급 한다.

한 재래의 교재는 대담하게 삭제하고 그 대신 필요하다고 생각하는 것은 그것이 아무리 어려워도 대담하게 도입하고 있다.

5. 교재 전체를 통일된 방법으로 다루어 나가고 있다.

6. 교재의 배열을 螺旋的으로 하고 있다.

7. 학생으로 하여금 수학을 암기하는 것이 아니라 스스로 연구 발견하게 하며, 학생들의 창조력, 독창력을 길러 주는데 전력을 기울이고 있다.

이와같이 철두 철미 현대화를 위한 교재로써 만들어진 UICSM의 교과서가 어떻게 논리적으로 구성되어 있는가를 살펴보는 것은 매우 중요한 일이다.

Coursel 1을 살펴보면 1장에서 수의 概念을 정확히 하고 문장의 대용을 확실히 하기 위하여 "Arithmetic by Mail"이라는 절을 소개하고 number(數)와 numeral(數詞)를 구별하여 나타내지 않고 사용함으로써 혼란을 일으키는 例를 제시하고 number와 numeral의 차이점을 설명하였다.

이를 테면 number 4의 이름인 몇가지 numeral을

$$\left(\begin{array}{l} \text{IV}. 5-1,\ 8-4,\ \text{four},\ 2+2, 7-3, 2\times 2, (1+1) \\ \div(1+1), \dfrac{6+2}{2},\ 3\times 1\frac{1}{3}, \text{넷}, 8\div 2, 1\times 4, 4\times 1, \\ 72\div 18,\ 12\times\frac{1}{3},\ 1+3,\ 628424\div 157106 \end{array}\right)$$

등과 같이 제시하고 5−1은 5에서 1을 빼라는 명령이 아니라 단순히 4의 numeral일 뿐이라는 사실을 강조하고 있다.

그래서 "두 실수의 합은 실수이다. 그러나 2와 $\sqrt{2}$는 더할 수 없다"라는 자기당착인 명제를 말하지 않도록 지도하고, 이를 토대로 "등호를 끼는 두 식이 각각 numeral일때 이 numeral이 같은 이름이면 이 관계식을 方程式이라고 한다"라고 방정식을 엄밀히 정의하고 있는 것이다.

또 2章에서는 도로 여행에서 방향과 거리를 동시에 표시하는 numeral의 필요성을 이해시키고 이와같은 성질의 수를 실수라 정의하였다.

또 계속되는 실수의 연산으로써 "덧셈"을 도입하고 이것을 binary operation(二項演算)으로 정의하고 있다.

예를 들면 $(\overrightarrow{4},\ \overrightarrow{5})\rightarrow\overrightarrow{9}$로 쓰고 "쌍$(\overrightarrow{4},\ \overrightarrow{5})$에 二項演算을 적용한 결과는 수 $\overrightarrow{9}$이다"라고 읽으며 이때 二項演算을 실수의 덧셈 이라고 정의한다.

또, 실수의 덧셈을 세실수의 표$((\overrightarrow{4}, \overrightarrow{5}),\ \overrightarrow{9})$로 표시하고 산술적 수의 덧셈[1]때 사용한 "+"를 실수의 덧셈기호로 사용하여 $\overrightarrow{4}+\overrightarrow{5}=\overrightarrow{9}$로 나타내고 있다.

이와같이 술어나 용어의 개념을 정확히 인식하도록 기도하고 이를 토대로 문장의 뜻을 論理學的으로 엄밀히 검토하고 있다.

또, 이와같은 엄밀성 밑에서 공리계의 설정을 위하여 그 도입에 힘을 기울이고 공리계의 참뜻을 인식시키려고 노력하였다.

course 2를 살펴보면 "A visit to the planet glox"라는 절에서 planet glox에 간 우주인이 보낸

message 1. glox에는 적어도 한 도시가 있다.

message 2. glox에는 적어도 하나의 고속도로가 있다.

message 3. glox에는 적어도 3도시가 있는데 이들 모두가 동일한 고속도로 상에는 있지 않다.

message 4. glox에 있는 각 고속도로는 적어도 두 도시를 지난다.

message 5. glox에서는 한 도시에서 다른 도시로 고속도로를 바꾸지 않고 갈 수 있다.

두 도시를 연결하는 이와같은 고속도로는 오직 하나 뿐이다.

이것에 대하여 다음의 message가 眞임을 이해시키고 있다.

message A. glox에는 적어도 3개의 고속도로가 있다.

message B. 두 고속도로는 한 도시 이상에서는 만나지 않는다.

message C. 하나의 고속도로로서 glox에 있는 모든 도시를 잇는 그러한 도로는 없다.

여기에서 message 1∼message 5의 사실을 가지고 message A∼message C를 유도하는 것을

5) numeral로써 "1+3" "2+2" "4+0"과 같이 사용된 덧셈. 이것을 UICSM의 교과서에서는 indicated sum이라고 부르며 이때 1, 2, 3 등과 같이 방향(direction)이 포함되지 않을 수를 산술적 수라 한다.

설명하고 公理로 부터 定理를 유도하는 일을 이해시키고 있다.

여기에서 유의할 점은 이와같이 현실과 완전히 분리된 가상적인 모델을 놓고 학생들의 直觀을 완전히 배제한 뒤에 公理系를 이해시키고 있는 것이다.

즉, 공리계를 하나의 약속으로 이해시키고 이 약속으로 부터 추론될 수 있는 사실(定理)을 찾아보고 이와같이 하여 1章 7節에서 평면상의 점과 직선사이의 성질과 관계를 연구하기 위하여 15개의 공리[2]를 소개하고 있으며 이에서 유도될 수 있는 성질을 정리로써 소개하고 있다.

또 기하적 도형에 수를 대응시키는 축도에 관한 7개의 공리[3]를 소개하고 있다. (axion A~axion C는 선분에 측도를 주는 공리이고 axion D~axion G는 각에 측도를 주는 공리이다.)

course 3에서는 실수가 무엇인가를 규정하기 위하여 4칙에 관한 12개의 원리[4]를 공리로 설정하고 또 양수의 공리로써 p(1)~p(4)[5], 음수의 공리로써(N)[6], 순서의 공리로써(G)[7] 실수의 완전성의 공리로써(LUBP)[8]을 설정하므로써 실수를 완전히 규정하고 이것을 토대로 하여 수학적 귀납법을 비롯한 수에 관한 대부분의 성질을 증명하고 있다.

이와같이 공리계의 설정을 위하여 여러가지로 고찰하고, 그 도입을 이해하기 쉽게 설명하였으며 이를 바탕으로 엄격한 공리계에 의하여 수학을 전개해 나가고 있다.

여기에서 주목해야 할 사실은 이와같은 모든 公理와 定理를 論理記號인 uniuersal Quantifier "∀", Existential Quantifier "∃"을 자유 자재로 사용하고 Implication sign "⇒" Bumplioation sign "⟺" negation "~"을 사용하여 나타내고 있는 것이다.

즉 어떤 사실을 완전히 기호화하여 설명함으로써 사고의 절약을 기하고 있다. (이에 대한 설명은 course 1의 4장에서 다루었다)

마지막으로 지적해야 할 점은 이것이 가장 중요한 것이기도 하지만 論理過程에서 論理記號인 ∀·∃와 ⇒, ⟺, ~을 사용하여 여러가지의 論理學的 scheme를 도입하고 이것으로써 論證을 엄밀히 단계적으로 전개하고 있는 것이다.

이 교과서에서 사용되고 있는 論理學的 scheme은 대체로 다음과 같이 18개로 정리할 수 있다.

물론 여기에서 사용되는 論理學的 scheme는 서로 다른 것에서 유도될 수도 있는 것이다.

그러나 이것은 엄격한 설명에 의하여 유도되고 증명과정에서 사용하고 있는 것이다.

1. universal instantiation

任意 記號가 붙은 眞인 명제는 그 문자 대신에 어떤 것을 대입한 것은 바로 얻어진다.

예를 들면

$$\frac{\forall x \forall y \forall z\,[x+z=y+z \Rightarrow x=y]}{a+c=b+c \Rightarrow a=b}$$

2. The replacement rule for equation

$$a=b \qquad\qquad\qquad a=b$$

$$\frac{\cdots\cdots a\cdots\cdots}{\cdots\cdots b\cdots\cdots} \qquad\qquad \frac{\cdots\cdots b\cdots\cdots}{\cdots\cdots a\cdots\cdots}$$

3. modus ponens

$$\frac{p.\ p \Rightarrow q}{q}$$

4. modus tollens

$$\frac{p \Rightarrow q\ \sim q}{\sim p}$$

5. The deduction rule and conditionalizing

$$\frac{\dfrac{p.\ p^1.\ p^2\cdots\cdots}{\begin{array}{c}\vdots\\ q\end{array}}}{p \Rightarrow q}$$

여기에서 p^1, p^2……는 정의 이거나 증명된 명제 또는 공리 들이다.

6. Hypothetical syllogism

$$\frac{p \Rightarrow q\quad q \Rightarrow r}{p \Rightarrow r}$$

7. Contraposition

$$\frac{p \Rightarrow q}{\sim q \Rightarrow \sim p} \qquad\qquad \frac{\sim q \Rightarrow \sim p}{p \Rightarrow q}$$

$$\frac{p \Rightarrow \sim q}{q \Rightarrow \sim p} \qquad\qquad \frac{\sim p \Rightarrow q}{\sim q \Rightarrow p}$$

8. double denial

2)~8)은 p.33~p.36 참조.

$$\frac{p}{\sim\sim p} \qquad \frac{\sim\sim p}{p}$$

9. Biconditionals

$$\frac{q \Rightarrow p \quad p \Rightarrow q}{p \Longleftrightarrow p} \qquad \frac{p \Longleftrightarrow q}{q \Rightarrow p} \qquad \frac{p \Longleftrightarrow q}{p \Rightarrow q}$$

10. The replacement rule for biconditionals

$$\frac{\dfrac{p \Longleftrightarrow q}{\cdots\cdots\cdots p\cdots}}{\cdots\cdots\cdots q\cdots} \qquad \frac{\dfrac{p \Longleftrightarrow q}{\cdots\cdots\cdots q\cdots}}{\cdots\cdots\cdots p\cdots}$$

11. Conjuntions

$$\frac{p, \quad q}{p \text{ and}} \qquad \frac{p \text{ and } q}{p} \qquad \frac{p \text{ and } q}{q}$$

12. Importation and Exportation

$$\frac{p \Rightarrow [q \Rightarrow r]}{[p \text{ and } q] \Rightarrow r} \qquad \frac{[p \text{ and } q] \Rightarrow r}{p \Rightarrow [q \Rightarrow r]}$$

13. Alternations

$$\frac{p}{p \text{ or } q} \qquad \frac{q}{p \text{ or } q} \qquad \frac{p \text{ or } q \quad p \Rightarrow r \quad q \Rightarrow r}{r}$$

14. Denying and alternative

$$\frac{p \text{ or } q \quad \sim q}{p} \qquad \frac{p \text{ or } q \quad \sim p}{q}$$

15. The test-pattern rule

임의 기호가 붙은 眞인 命題는 임의의 例인 test-pattern 으로써 증명된다.

예를 들면

$$\frac{a+c=b+c \Rightarrow a=b}{{}^{\forall}x{}^{\forall}y{}^{\forall}z[x+z=y+z]=x=y]}$$

16. The reflexiuity principle for equality

모든것은 그 자신과 같다.

17. The law of the excluded middle

p or $\sim$p

18. 수학적 귀납법

다음에 이 교재에서 이와같은 法則을 사용하여 증명한 예를 고찰하여 보기로 하자.

예 1. ${}^{\forall}x{}^{\forall}y{}^{\forall}z[x=y \Rightarrow x+z=y+z]$를 증명하여라.

〔證明〕

이것을 증명하기 위하여는 위의 Rule 15에 의하여

$a=b \Rightarrow a+c=b+c$

임을 증명하면 된다.

(1)	$a=b$	〔가정〕
(2)	${}^{\forall}x\ x=x$	〔論理規則〕
(3)	$a+c=a+c$	〔(2)〕
(4)	$a+c=b+c$	〔(1), (3)〕
(5)	$a=b \Rightarrow a+c=b+c$	〔(1), (4)〕
(6)	${}^{\forall}x{}^{\forall}y{}^{\forall}z[x=y \Rightarrow x+z=y+z]$	〔(1)～(5)〕

이것을 증명의 圖表로 만들면

$$\frac{\dfrac{\dfrac{(1) \qquad \dfrac{(2)}{(3)}}{(4)}}{(5)}}{(6)}$$

여기에서 論理學的 scheme이 적용된 것을 살펴보면

$(2) \longrightarrow (3)$	〔Rule 1〕
$(1), (3) \longrightarrow (4)$	〔Rule 2〕
$(4) \longrightarrow (5)$	〔Rule 5〕
$(5) \longrightarrow (6)$	〔Rule 15〕

예 2. ${}^{\forall}x{}^{\forall}y{}^{\forall}z[x=y \text{ and } y=z \Rightarrow x=z]$를 증명하여라.

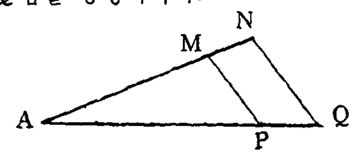
〔證明〕

(1)	$a=b$ and $b=c$	〔가정〕
(2)	$a=b$	〔(1)〕
(3)	${}^{\forall}x{}^{\forall}y[x=y \Rightarrow y=x]$	〔정리〕
(4)	$a=b \Rightarrow b=a$	〔(3)〕
(5)	$b=a$	〔(2), (4)〕
(6)	$b=c$	〔(1)〕
(7)	$a=c$	〔(5), (6)〕
(8)	$(a=b \text{ and } b=c) \Rightarrow a=c$	〔(1)－(7)〕
(9)	${}^{\forall}x{}^{\forall}y{}^{\forall}z[x=y \text{ and } y=z \Rightarrow x=z]$	〔8〕

證明圖表

$$\frac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{(1)}{(2)}[\text{rule } 11] \quad \dfrac{(3)}{(4)}[\text{rule } 1]}{(5)}[\text{rule } 5] \quad \dfrac{(1)}{(6)}[\text{rule } 11]}{(7)}[\text{rule } 2]}{(8)}[\text{rule } 5]}{(9)}[\text{rule } 15]$$

예 3. 다음 그림에서 $AM=AP$, $MN=PQ \Rightarrow AN=AQ$임을 증명하여라.



(註) 여기에서 AM 등은 $m(\overline{AM})$ 등을 나타내는 것이다.

〔證明〕

(1) $M \in \overline{AN}$ 〔도형〕

(2) $\forall x \forall y \forall z\,[y \in \overline{xz} \Rightarrow xy + yz = xz]$ 〔axiom A〕

(3) $M \in \overline{AN} \Rightarrow AM + MN = AN$ 〔 (2) 〕

(4) $AM + MN = AN$ 〔(1), (3)〕

(5) $P \in \overline{AQ}$ 〔도형〕

(6) $P \in \overline{AQ} \Rightarrow AP + PQ = AQ$ 〔 (2) 〕

(7) $AP + PQ = AQ$ 〔(5), (6)〕

(8) $AM = AP$ 〔가정〕

(9) $MN = PQ$ 〔가정〕

(10) $\forall x\ X = x$ 〔論理規則〕

(11) $AM + MN = AM + MN$ 〔(10)〕

(12) $AM + MN = AP + PQ$ 〔(8), (9), (11)〕

(13) $AN = AQ$ 〔(4), (7), (12)〕

證明圖表

$$\cfrac{\cfrac{(1)\ \cfrac{(2)}{(3)}\text{[rule 1]}}{(4)}\text{[rule 5]} \quad \cfrac{(5)\ \cfrac{(2)}{(6)}\text{[rule 1]}}{(7)}\text{[rule 5]} \quad \cfrac{(8)\ (9)\ \cfrac{(10)}{(11)}\text{[rule 1]}}{(12)}\text{[rule 2]}}{(13)}\text{[rule 2]}$$

이상에서 살펴본 예와 같이 우리가 당연하다고 생각되는 이와같은 성질도 사실은 다양한 論理의 推論에 의하여 증명됨을 설명하고 있다.

이와같이 論證에서 사용되는 여러개의 論理學的 scheme를 정해놓고 증명의 한 단계에서 다음 단계로 넘어 가는데 이 rule을 적용시키고 있는 것이다.

본래 論證에서는 논리적으로 타당한 진술을 해나가야 하기 때문에 한 단계에서 다음 단계로 넘어갈 때 그 이유를 분명히 규명하는 것은 매우 중요한 일이다.

이상에서 조사해 본 바와같이 UICSM의 교과서는 막연한 직관을 배제하고 엄밀한 論理的 取扱을 하고 있는 것이다.

이와같이 용어 하나 하나를 명확히 정의하고 공리체계를 도입하여 記號化하며 논리적 엄밀성을 강조하고 있는것은 매우 중요하다.

그러나 이 교재는 論理化 過程에서 지나치게 形式化하지 않았는가 느껴진다.

이것은 학생에게 지도할 때 매우 중요한 문제이다. 특히 公理系를 도입하여 지도할 때의 문제점 등은 생각해 보아야 할 점이다.

(2) Axiom 1. 모든 직선은 點의 nondegenerata set 이다.

Axiom 2. 두 點은 한 直線을 決定한다.

Axiom 3. 적어도 3개의 noncollinear point 가 존재한다.

Axiom4. 제 3의 直線에 平行인 두 직선은 平行이다.

Axiom 5. (a) $\forall X \forall Y\ \overline{XY} = \{Z : Z$는 X, Y 사이에 있다.$\}$

(b) $\forall X \forall Y\ \overline{XY} = \overline{XY} \cup \{X, Y\}$

(c) $\forall X \forall Y\ \overrightarrow{XY} = \overline{XY} \cup \{Z : Y \in \overline{XZ}\}$

(d) $\forall X \forall Y\ \overrightarrow{XY} = \{Z : Z \in \overleftrightarrow{XY} \text{ and } Z \fallingdotseq X\}$

(e) $\forall X \forall Y\ \overleftrightarrow{XY} = \overrightarrow{YX} \cup \overrightarrow{XY}$

Axiom 6. (a) $\forall X \forall Y \forall Z\,[Z \in \overline{XY} \Rightarrow$ X. Y. Z are collinear〕

(b) $\forall X \forall Y \forall Z\,[(X \neq Y$ and X.Y.Z are colinear$) \Rightarrow (X \in \overline{YZ}$ or $Z = X$ or $Z \in \overline{XY}$ or $Z = Y$ or $Y \in \overline{XZ})]$

Axiom 7. $\forall X \forall Y\ X \in \overline{XY}$

Axiom 8. $\forall X \forall Y\,[\overline{XY} \neq \phi \Rightarrow X \neq Y]$

Axiom 9. $\forall X \forall Y\ \overline{XY} = \overline{YX}$

Axiom 10. $\forall X \forall Y \forall Z\,[Y \in \overline{XZ} \Rightarrow Z \notin \overline{XY}]$

Axiom 11. $\forall X \forall Y\,[X \neq Y \Rightarrow (Z : Y \in \overline{XZ}) \neq \phi]$

Axiom 12. $X \forall Y \forall U \forall V\,[CY \in \overline{XU} \cap \overline{XV}$ and $V \neq U) \Rightarrow (V \in \overline{YU}$ or $U \in \overline{YV})]$

Axiom 13. $\forall X \forall Y \forall U \forall V\,[(Y \in \overline{XU}$ and $V \in \overline{YU}) \Rightarrow Y \in \overline{XV}]$

Axiom 14. $\forall X \forall Y \forall U \forall V\,[(Y \in \overline{XU}$ and $U \in \overline{YV}) \Rightarrow Y \in \overline{XV}]$

Axiom 15. 모든 직선의 補集合은 다음과 같은 두 集合(half-place)의 合集合이다.

(1) 直線과 만나지 않는 모든 segment의 양끝 점은 集合의 하나에 속하고

(2) 線分의 양 끝점이 集合의 하나에 속하면 線分의 모든 點은 이 集合에 속한다.

(3) Axiom A $\forall X \forall Y \forall Z\,[Y \in \overline{X \in} \Rightarrow m\ (\overline{XY}) +$

$m(\overline{YZ}) = m(\overline{XZ})$〕

Axiom B. $\forall X \forall Y \forall Z$〔$Y \notin \overline{XZ} \Rightarrow m(\overline{XY}) + m(\overline{YZ}) > m(\overline{XZ})$〕

여기에서 $m(\overline{AB})$를 간단히 AB로 나타내고 $\overline{AB}$는 點의 集合으로 생각하고 AB는 數로 간주한다.

AxiomC $\forall X \forall Y \forall x > 0$〔$Y \neq X$ ($Z \in \overrightarrow{XY}$ 이고 $XZ = x$인 오직 하나의 점 Z가 존재한다.)〕

Axiom D 임의의 3개의 점 noncollinear point X.Y.Z에 대하여 $0 < {}^\circ m(\angle XYZ) < 180$

Axiom E 임의의 두 점 X, Y와 $\overleftrightarrow{XY}$의 임의의 側 S 및 $0 < x < 180$인 임의의 수 x에 대하여 ${}^\circ m(h \cup \overrightarrow{XY}) = x$이고 S에 품기며 꼭지점이 X인 half-line h가 꼭 하나 존재한다.

Axiom F 임의의 3개의 noncollinear point X.Y.Z와 $\angle XYZ$의 내부에 속하는 임의의 點 $\overline{W}$에 대하여 ${}^\circ m(\angle XY\overline{W}) + {}^\circ m(\angle \overline{W}YZ) = {}^\circ m(\angle XYZ)$

Axiom G 임의의 3개의 noncollinear point X. $\overline{W}$.Z와 임의의 點 $Y \in \overline{XZ}$에 대하여

${}^\circ m(\angle XYW) + {}^\circ m(\angle WYZ) = 180$

(4) addition-Subtraction-Multiplication-division-Oppositing: reciprocating:

$\forall x \forall y \forall z\,(x+y)+z = x+(y+z)$

$\forall x \forall y \forall z\,(xy)z = x(yz)$

$\forall x \forall y\ x+y = y+x \quad \forall x \forall y\ xy = yx$

$\forall x \forall y \forall z\,(x+y)z = xz+yz$

$\forall x\ x+0 = x \qquad \forall x\ x+1 = x$

${}^{+}1 \neq 0$

$\forall x\ x+{}^{-}x = 0 \quad \forall x \forall y \neq 0\,(x \div y)y = x$

$\forall x \forall y\ x-y = x+{}^{-}y \quad \forall x \neq 0\ /x = {}^{+}1 \div x$

(5) (p1) $\forall x$〔$x \neq 0$ ($x \in p$ or $-x \in p$)〕

(p2) $\forall x$ not($x \in p$ and $-x \in p$)

(p3) $\forall x \forall y$〔($x \in p$ and $y \in p$) $\Rightarrow x+y \in p$〕

(p4) $\forall x \forall y$〔$x \in p$ and $y \in p$) $xy \in p$〕

(6) (N) $\forall x$〔$-x \in N \Rightarrow x \in p$〕

(7) (G) $\forall x \forall y$〔$y > x \Rightarrow y-x \in p$〕

(8) 〔LUBP〕 上界를 가지는 實數의 空이 아닌 集合은 上限을 가진다.

2. 프랑스

數學敎育의 現代化에 대하여는 유우럽의 OEEC (The organization for Economic Cooperation and Derelopement) 가맹국에서도 활발히 전개되어 가고 있다. 그런데 OEEC에서의 수학교육 현대화에 대한 方向은 "수학에 있어서의 새로운 생각 방법"에 관한 seminar에서 듀돈네(J.Dieudonné) 교수의 다음과 같은 4가지 提案으로 요약해도 좋을 것이다(〔5〕p.8).

(1) 現代數學의 대담한 導入

(2) 現代數學에의 접근을 위하여 재래의 敎材의 대담한 削除

(3) 論理의 엄밀성의 保障

(4) 代數的 構造와 現代的 方法의 重要視

그러면 OEEC의 가맹국중 하나인 프랑스에서는 교재를 어떻게 논리적으로 다루고 있는지 그 特徵을 살펴 보기로 하자.

첫째로 論理記號의 적극적인 사용이다. 즉 $\forall$, $\exists$, $\sim$, $\Rightarrow$, $\Longleftrightarrow$ 등의 사용으로 수학문장을 記號化하여 思考의 절약을 꾀하고 있다.

그 例로써 항등식은 기호 "$\equiv$"를 사용하여 나타내고 이것을 "$\forall$"를 사용하여 다시 등식으로 나타내고 있다.

(〔8〕) p. 62~p. 63)

즉 $(x+y)(x-y) \equiv x^2-y^2$

$(x+y)^2 \equiv x^2+2xy+y^2$

$(x-y)^2 \equiv x^2-2xy+y^2$ 을

$\forall x \forall y\,(x+y)(x-y) = x^2-y^2$

$\forall x \forall y\,(x+y)^2 = x^2+2xy+y^2$

$\forall x \forall y\ (x-y)^2 = x^2-2xy+y^2$으로 다시 설명하고 있다. 그리고

$$\frac{\begin{array}{c}\forall x\ P(x)\\ a \in R\end{array}}{\therefore P(a)}$$

의 推論에 의하여 얻어진 사실을 例로써 설명하고 이것을 항등식 하나 하나에 기술하고 있다. 즉

$$\frac{\forall x \forall y\,(x+y)^3 = x^3+3x^2y+3xy^2+y^3}{\therefore\ (a+1)^3 = a^3+3a^2+3a+1}$$

와 같이 엄밀한 推論에 의하여 유도하고 있다. (〔8〕)p. 62~63) 또 "방정식 $ax+b=0$을 풀어라"와 같은 文章을 $x \in R\ \exists x?\ ax+b=0$과 같이 記號化하고 이 풀이 과정을 엄밀히 다루고 있다.

예를 들면

$x \in R \ \exists x ? \ \sqrt{x+2} - \sqrt{x-1} = 1$ 에서

x의 變域 : $x \geqq -2$이고 $x \geqq 1$. 따라서 $x \geqq 1$

〈해석〉

이 식을 만족하는 $a \geqq 1$인 수 a가 존재한다면

$$\sqrt{a+2} - \sqrt{a-1} = 1$$

이것을 간단히 하면

$$(\sqrt{a+2} - \sqrt{a-1})^2 = 1$$

$$a+2+a-1-2\sqrt{(a+2)(a-1)} = 1$$

$$\sqrt{(a+2)(a-1)} = a$$

$$(a+2)(a-1) = a^2$$

$$a-2=0$$

〈종합〉

$x=2$를 대입하면

$$\sqrt{x+2} - \sqrt{x-1} = 2-1 = 1$$

따라서 수 2는 주어진 방정식을 만족한다.

([8] p. 94)

이와 같이 해석과정을 두고 무리방정식을 설정함으로써 무연근의 배제를 확실히 하고 있다.

둘째로 數學的 用語는 엄격한 定義에 의하여 사용하고 있다.

그리고 이 정의에서 유도할 수 있거나 이미 증명된 사실은 성질(propriétés)이나 결과(consequences)로써 約述하고 있다.

그 예는 ([8] p. 130) 등에서 쉽게 찾아 볼 수 있다.

*정의 : ABC는 이등변 삼각형 $\Longleftrightarrow$ AB=AC

propriétés

1. $AB=AC \Longleftrightarrow \hat{B} = \hat{C}$ (1)
2. AO는 수선 $\Longleftrightarrow \begin{cases} \text{AO는 높이} \\ \text{AO는 중선} \end{cases}$

conséquences

1. $\widehat{BAC}$ (2) $=1D$ (3) $\Rightarrow \widehat{ABC} < 1D$이고 $\widehat{ACB} < 1D$
2. $AB=AC \Rightarrow \hat{B} = \hat{C}$ 이고 $\hat{B} < 1D$

셋째로 엄격한 公理에 의하여 교재를 전개하고 있는 것이다.

그래서 도형편을 살펴보면 Euclid 기하는 거의 削除되고 그 대신 Vector 기하, 좌표기하, 사영기하 등이 철저히 지도 되고 있다.

이와같이 프랑스 교과서는 엄격한 용어의 정의 밑에서 논리적인 기호의 사용으로 철저히 논리적인 취급을 하고 있다.

3. 日 本

현행 일본 교재의 논리와 論證에 관한 내용은 우리 나라의 교과서와 많은 차이가 있지 않으므로 여기에서는 1973년으로 예정된 고등학교 수학교과과정 개편에 대비하여 발간된 實驗 敎科書의 내용을 조사해 보겠다.

이 교과서의 특징중 하나는 엄밀한 論證에 의하여 새로운 사실을 정리로 채택하고 이 정리를 증명하는 과정으로 교재를 구성해 나간다는 사실이다.

이 점에 있어서는 現代數學에서 指向하고 있는 것과 일치한다.

먼저 여기에서는 集合과 論理의 章에서의 指導目標, 用語, 記號에 관한 것을 살펴보자([9] p. 2)

	지 도 목 표	용 어 · 기 호
1. 변수	숫자와 수. 문자와 그것을 나타내는 내용이 다름을 실제 용법에서 구별 시킨다. 보통 변수에 대하여 그 정의역을 알게 한다.	등호=, 같다. 변수, 변역(정의역) 정점, 변수의 값
* 함수	간단한 예로써 함수가 되는 규칙, 정의역, 치역을 안다. 또 함수의 값을 구한다.	함수 f, f의 정의역 치역, f( ), →
2. 명제·함수	간단한 1변수의 명제함수에 대한 값을 구하고 대응표를 만든다. 명제와 명제가 아닌 것을 구별한다.	T, F, 命題, 眞, 僞 성립한다, 성립하지 않는다.
3. 조건	주어진 명제함수의 역대응을 만들고 T,F에 각각 대응하는 원소를 찾는다.	$\{x \mid c(x), x \in X\}$ 조건, 만족한다.

(1) $\hat{B}$, $\hat{C}$ 등은 ∠B, ∠C를 나타내는 기호이다.

(2) $\widehat{BAC}$ 등은 ∠BAC를 나타내는 기호이다.

(3) 1D는 1∠R, 2D는 2∠R 등을 나타내는 각의 측도이다.

	지 도 목 표	용 어 · 기 호
	어떤 원소가 주어진 조건을 만족하는지 어떤지를 알아 본다. 주어진 조건을 만족하는 집합의 원소를 구한다.	
4. 여집합과 조건의 부정	주어진 집합 E에서 어떤 집합의 여집합과 그것을 결정하는 조건을 찾는다. 간단한 조건에 대하여 그 부정을 알아본다.	전체집합 E, 여집합 M^c, 조건의 부정 $\overline{c(x)}$
5. "그리고"와 "또는"	「p(x) 그리고 q(x)」와 「p(x) 또는 q(x)」를 만족하는 집합을 도시한다. 또 p(x) q(x) 로써 부등식과 같은 조건을 생각한다. 특히, 이 경우에 있어서는 위의 집합을 구간으로 표시한다. 기호 ≦, ≦,을 정확히 사용한다.	그리고, 또는, ≧, ≦
6. 필요조건 충분조건	명제 "모든 x에 대하여 p(x)이면 q(x)"의 眞僞를 집합을 이용하여 알아 본다. 주어진 2개의 조건에서의 관계를 「필요」「충분」「동치」등의 말을 이용하여 정확히 표현한다. 명제의 對偶, 逆, 裏를 만든다. De Morgan의 法則이 성립하는 것을 집합을 이용하여 직관적으로 이해시킨다.	모든 x에 대하여 충분조건, 필요조건, 동치, $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$
7. 2변수 이상의 조건	2변수 x, y의 命題函數에 대하여 주어진 (x, y)에 대한 값을 구한다. 이하 1변수의 경우와 같이 취급한다. 특히 부등식의 예를 중심으로 한다. 이 경우는 주어진 조건을 만족하는 점 (x, y)의 집합을 庶標平面위에 도시하도록 한다.	p(x, y), 直積, A×B, graph, 영역

(1) Cantesian prodact라고도 한다.

위와 같은 論理의 기초 위에서 교재를 논리적으로 어떻게 취급하고 있는지 살펴보자.

첫째로 眞理表를 사용하여 合成命題의 眞僞를 밝히고 있다.

이것은 命題函數의 확장으로 유도된다.

둘째로 명제의 合成에 관한 것으로써 "or, and"에 해당하는 論理語를 사용하며, 전칭기호 "∀" 존재기호 "∃"를 이용하여 어떤 명제를 기호화하여 나타내고 있다.

이것은 학생의 사고를 절약하면서, 정확히 명제를 이해시킬 수 있는 것이다.

세째로 數學的 用語 엄밀한 定義에 의하여 사용하고 있으며 公理로써 받아들일 사실은 많은 例를 제시하고 충분히 이해시킨 후에 사용하고 있다.

그리고 연습문제는 다음 章에서 다룰 문제를 암시적으로 제시하고 있는 것이다.

넷째로 論證에 관한 것은 분명히 설명하여 처리하고 있다.

이를 테면

$$\begin{array}{l} \forall x\in u \ \ p(x) \\ \underline{\quad a\in u \qquad\qquad\qquad} \\ \ \therefore\ p(a) \end{array}$$

에서 p(a)는 이와같은 過程을 略하고 직관적으로 처리함을 분명히 하고 있다. 즉,

$$\begin{array}{l} \underline{\forall x \forall y \ \ (x+y)^2=x^2+2xy+y^2} \\ \quad \therefore\ (a+2)^2=a^2+4a+4 \end{array}$$

이므로 $(a+2)^2=a^2+4a+4$는 證明없이 그대로 이용하고 있다.

또 대우에 의한 증명과 논증에서의 삼단논법 등은 교재 전반에서 자주 사용되고 있다.

위에서 설명한 여러 특징은 수학교육의 현대화에서 바람직한 사실로써 받아들여 지는 것이다.

이와같이 日本의 수학교재는 대체로 논리적인 취급에서 엄밀성을 강조하고 있는 점은 재삼 생

각해 볼 만한 사실이다.

Ⅳ. 論證의 指導方法

1. 記號의 사용

A. 命題와 述語

수학의 목적은 命題의 眞僞를 조사하는 것이라고 말한다.

수학에서 命題라 하는 것은 어떤 사건에 대한 관심을 서술한 文章으로서 그것이 眞인지 僞인지 알 수 있는 것을 의미한다.

(1) 4는 짝수이다.

(2) 4는 素數이다.

위의 文章은 "4"에 대한 판단을 기술한 문장으로서 그 眞僞를 알 수 있다.

따라서 (1), (2)의 文章은 命題이다.

特히 (1)은 眞인 命題이고, (2)는 僞인 命題이다.

수를 문자로 나타내는 것과 같이 命題도 문자로 나타낸다.

命題 p가 眞일 때 "진리값은 T(true)"라고 말하고 命題 p가 僞일 때 "진리값은 F(false)라고 말한다.

이때 命題 p의 진리값을 $\tau(p)$로 나타내고 등호를 사용하여 다음과 같이 표시한다.

$\tau(p)=T$: 命題p의 진리값이 T이다.

$\tau(p)=F$: 命題p의 진리값이 F이다.

위의 보기에서 (1)의 命題를 p1, (2)의 명제를 p2로 나타내면 $\tau(p1)=T$, $\tau(p2)=F$이다.

(3) x는 3보다 크다.

이 文章은 그대로는 眞僞가 결정되지 않지만 x에 어떤 수를 대입하면 眞僞가 결정되기 때문에 命題가 된다.

위의 文章을 p(x)로 나타내면 x의 값에 따라 p(x)의 眞僞가 결정된다. 즉

$\tau(p(1)=F$, $\tau(p(3)$, $=F$, $\tau(p(5))=F$……

일반적으로 분자로써 표시된 변수를 포함하고 변수가 어떤 값을 취할 때 命題가 되는 文章을 命題函數라 한다.

이것은 함수값이 명제가 되는 函數라는 의미이다.

命題函數 p(x)는 "x는 p이다" 또는 "x는 p라는 성질을 갖는다"라고 읽고 p( )를 述語 또는 條件이라고 한다.

變數 x는 수 뿐만 아니라 수 이외의 어떤 대상도 될 수 있기 때문에 命題函數 p(x)를 생각할 때는 변수 x가 취할 수 있는 대상의 모임 즉 變域을 명확히 해 둘 필요가 있다.

변수가 2개 이상인 술어에서도 마찬가지로 생각할 수 있다.

B. 限定 記號

(1) 全稱記號 : $\forall$

"실수의 제곱은 양수이거나 0이다"라는 文章은 실수에서 일반적으로 성립하는 성질을 말한 命題이다.

여기에서 실수의 집합을 R이라 하고 $x\in R$이라 할 때 "x의 제곱은 양수이거나 0이다"를 p(x)로 표시하면 이 命題는 "모든 $x\in R$에 대하여 p(x)"라고 표현할 수 있고 "모든 $x\in R$에 대하여를 $\forall x\in R$과 같이 기호화 하면 $\forall x\in R$ p(x)가 된다.

일반적으로 述語 p(x)에서 x의 變域을 U라 하면 $\forall x\in U$ p(x): 모든 $x\in U$에 대하여 p(x)·라는 文章을 생각할 수 있다.

p(x)는 일반적으로 眞僞를 판단할 수 없는 文章이지만 $\forall x\in U$ p(x)는 眞僞를 판단할 수 있는 文章 즉 命題가 된다.

이와같은 命題를 全稱命題라 하고 "$\forall$"를 全稱記號라 한다.

또 $\forall x$는 "모든 x에 대하여" 또는 "임의의 x에 대하여" 라고 읽는다.

〈定義〉 $\forall x\in U$ p(x)의 진리값은 U의 모든 원소 x에 대하여 p(x)가 眞일때 T이고 또 그때에 한하여 T이다.

이 정의에 따라서 $\forall xEU$ p(x)의 眞僞는 집합 U가 무엇인가에 따라서 달라진다.

〔例〕 정수의 집합을 I, 자연수의 집합을 N이라 하면

$\tau(\forall x\in I\ x>0)=F$

$\tau(\forall x\in N\ x>0)=T$

여기에서 $\tau(\forall x\in N\ x>0)=T$를 간단히 $\forall x\in N$ $x>0$이라고 쓰고 x의 變域을 혼동할 염려가 없

을 때는 變域을 생략할 수도 있다.

이를 테면

$^{\forall}x\ x^2 \geq 0$, $^{\forall}x\,|x| \geq 0$ 등

항등식이나 절대부등식 이라고 말하는 등식, 부등식은 $^{\forall}x \in U$를 생략한 命題이다.

이를 테면 $x+y=y+x$는 덧셈의 연산에서 성립하는 중요한 성질인데 이것은

$^{\forall}x \in R\ ^{\forall}y \in R\ (x+y=y+x)$

를 의미하는 것이고 $x^2+y^2 \geq 2xy$는

$^{\forall}x \in R,\ ^{\forall}y \in R\ (x^2+y^2 \geq 2xy)$

를 의미하는 것이다.

또 공식이라고 불리우는 등식도 $^{\forall}x \in U$가 생략된 명제이다. 공식 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$은

$^{\forall}x \in R\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1$

을 의미하는 것이다.

(2) 存在記號 : $\exists$

"제곱해서 4가 되는 실수가 있다" 라는 명제는 모든 실수를 제곱하면 4가 된다는 말이 아니라 실수 중에는 제곱하면 4가 되는 것이 있다는 것을 의미한다.

"x를 제곱하면 4이다"라는 것을 술어 $p(x)$로 나타내면

$\tau(p(1))=F,\ \tau(p(2)=T, \tau(p(3))=F, \cdots\cdots$

가 되는데 $p(1), p(2), p(3)\cdots\cdots$의 命類중 眞인 命題가 있다는 것이다.

이와같이 命題를 $^{\exists}x \in R\ p(x)$로 나타내고 "$\exists$"를 存在記號라 한다.

일반적으로 술어 $p(x)$에서 變數 x의 變域을 U라 하면

$^{\exists}x \in U\ p(x)$: 적당한 x가 있어서 $p(x)$라는 命題를 만들 수 있다.

〔定義〕 $^{\exists}x \in U\ p(x)$의 진리값은 $p(x)$를 眞인 命題로 만드는 원소 $x \in U$가 존재하면 T이고, 그와같은 원소 $x \in U$가 없으면 F이다.

이 정의에 의하여 $^{\exists}x \in U\ p(x)$의 眞僞는 U가 무엇인가에 따라서 달라진다.

〔例〕 정수의 집합을 I, 자연수의 집합을 N이라 하면

$\tau(^{\exists}x \in N\ \ x^2=-x)=F$

$\tau(^{\exists}x \in I\ x^2=-x)=T$

위에서 $\tau(^{\exists}x \in I\ x^2=-x)=T$인 것을 간단히

$_{\exists}X \in I\ x^2=-x$

라고 쓰며 일반적으로 $\tau(^{\exists}x \in U\ p(x)=T$일 때 $^{\exists}x \in U\ p(x)$로 쓴다.

方程式 또는 條件不等式이라고 불리우는 등식, 부등식은 $^{\exists}x \in R$가 생략한 문장이다.

이와같은 것은 解는 존재하는 x의 값을 구하는 것이다.

이를테면 방정식 $x^2+2x=6x-3$은 $^{\exists}x \in R\,(x^2+2x=6x-3)$의 의미이고 이 방정식의 解는 $x^2+2x=6x-3$을 眞인 命題로 만드는 x의 값을 구하는 것이다.

또 條件不等式 $x^2-2x>x+4$는 $^{\exists}x \in R\,(x^2-2x>x+4)$의 의미이고 이것의 解는 $x^2-2x>x+4$를 眞인 命題로 만드는 x의 값을 구하는 것이다.

또 方程式 또는 不等式이 不能이라는 것은

$\tau(^{\exists}x \in U\ p(x))=F$

인 등식 또는 부등식 $p(x)$를 말하는 것이다.

이를 테면 $\tau(^{\exists}x \in R\ \ (x-2=x+3))=F$ 이므로 방정식 $x-2=x+3$은 不能이라고 한다.

C. 連結詞

(1) 否定 : $\sim$

命題 p의 否定을 $\sim p$로 쓰고 "p가 아니다"로 읽는다.

예를 들면

p:2는 무리수 이다

의 否定은

$\sim$p:2는 무리수가 아니다.

가 된다.

命題 p가 眞이면 命題 $\sim p$는 僞이고 命題 p가 僞이면 命題 $\sim p$는 眞이다.

즉, $\tau(p)=T$이면 $\tau(\sim p)=F$이고 $\tau(p)=F$이면 $\tau(\sim p)=T$이다.

이것을 表로 만들면 다음과 같다.

$\tau(p)$	$\tau(\sim p)$
T	F
F	T

限定記號가 들어 있는 命題의 否定은 다음과 같다.

〔定理〕

(1) $\sim(^{\forall}Xp(x) \equiv (1)\ \exists x \sim p(x)$

(2) $\sim(^{\exists}xp(x))\equiv{}^{\forall}x\sim p(x)$

(證明).

(1) $\sim(^{\forall}xp(x))$와 $\exists x\sim p(x)$의 진리값이 일치함을 보이자.

$\sim(^{\forall}xp(x))$의 진리값이 T이면 $^{\forall}xp(x)$의 진리값은 F이므로 어떤 원소 u에 대하여 p(u)는 僞인 명제이다.

따라서 $\sim p(u)$는 眞이다.

즉, $\sim p(x)$가 眞인 x가 존재하므로 $^{\exists}x\sim p(x)$는 眞이다.

다시 말하면 $^{\exists}x\sim p(x)$의 진리값은 T이다.

$\sim(^{\forall}xp(x))$의 진리값이 F이면 $^{\forall}x\ p(x)$의 진리값은 T이다.

따라서 임의의 원소 u에 대하여 p(U)는 眞인 명제이므로 임의의 원소 u에 대하여 $\sim p(U)$는 僞인 命題이다.

즉, $^{\exists}x\sim p(x)$의 진리값은 F이다.

(2) 도 마찬가지 방법으로 증명한다. (2)▨

例를 들면 $^{\forall}x(x+x=2x)$의 否定은 $^{\exists}x(x+x\neq 2x)$이고 $^{\exists}x(x^2=1)$의 否定은 $^{\forall}x(x^2\neq 1)$이다.

(2) 合接 : $\wedge$

P, Q가 命題일 때 "P이고 Q"인 命題를 P와 Q의 合接이라 하고 "P∩Q"로 나타낸다.

P와 Q의 진리값이 모두 T일 때 또 그때만 P∧Q의 진리값은 T이다.

즉, P∧Q의 진리값은 다음 表와 같이 정의한다

$\tau(P)$	$\tau(Q)$	$\tau(P\wedge Q)$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	F

〔例〕 $\tau(2+2=4\wedge 3+2=7)=F$

$\tau(\pi$는 무리수이다 $\wedge\pi>0)=T$

(3) 離接 : $\vee$

P와 Q가 命題일 때, "P이거나 Q"인 命題를 P와 Q의 離接이라고 하고 "P∨Q"로 나타낸다. P∨Q의 진리값은 P와 Q의 진리값이 모두 F일 때면 F이고 그 이외는 T이다.

즉, 다음 표와 같이 정의 한다.

$\tau(P)$	$\tau(Q)$	$\tau(P\vee Q)$
T	T	T
T	F	T
F	T	T
F	F	F

〔例〕 $\tau(2+2=4\vee 5<3)=T$

$\tau(\pi$는 유리수이다. $\vee\pi<0)=F$

〔定義〕

(1) $\sim(P\wedge Q)\equiv\sim P\vee\sim Q$

(2) $\sim(P\vee Q)\equiv\sim P\wedge\sim Q$

〔證明〕

(1) $\tau(\sim(P\wedge Q))=\tau(\sim P\vee\sim Q)$임을 밝히자.

$\tau(\sim(P\wedge Q)=T$이면 $\tau(P\wedge Q)=F$

즉, $\tau(P)=F$이거나 $\tau(Q)=F$이다.

$\tau(P)=F$이면 $\tau(\sim P)=T$이고

$\tau(Q)=F$이면 $\tau(Q)=T$이므로

$\tau(\sim P)=T$이거나 $\tau(\sim Q)=T$이다

즉, $\tau(\sim P\vee\sim Q)=T$이다.

$\tau(\sim(P\wedge Q))=F$이면 $\tau(P\wedge Q)=T$이다.

즉, $\tau(P)=T$이고 $\tau(Q)=T$이다. 따라서 $\tau(\sim P)=F$이고 $\tau(\sim Q)F$이므로 $\tau(\sim P\vee\sim Q)=F$이다.

(2)의 증명도 마찬가지이다. ▨

(4) 條件文 : $\rightarrow$과 雙條件文 : $\longleftrightarrow$

P와 Q가 2개의 命題일 때 "P이면 Q"인 命題를 條件文이라 하고 "P→Q"로 나타낸다. P→Q의 진리값은 다음 표와 같이 정의 한다.

$\tau(P)$	$\tau(Q)$	$\tau(P\rightarrow Q)$
T	T	T
T	F	F
F	T	T
F	F	T

〔例〕 $\tau(2\neq 1+1\rightarrow\pi$는 무리수이다$)=T$

$\tau(2=1+1\rightarrow\pi$는 유리수이다$)=F$

$\sim P\vee Q$의 진리값은 P→Q의 진리값과 일치함은 진리표를 이용하여 바로 증명할 수 있다.

(1) 두명제가 同値일 때 "≡"의 記號를 사용한다. (p. 16 참조)

(2) ▨의 기호는 증명이 끝났을 때 사용하는 것이다.

이것은 $P \rightarrow Q$와 $\sim P \vee Q$가 동치임을 보이는 것이다.

〔定理〕 $P \rightarrow Q \equiv \sim P \vee Q$

(證明)

생략 함.

두개의 조건문 $P \rightarrow Q$와 $Q \rightarrow P$의 合接 $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$를 $P \leftrightarrow Q$로 나타내고 이것을 雙條件文이라고 한다.

雙條件文의 진리표는 條件文과 合接의 정의에서 바로 다음과 같이 구할 수 있다.

$\tau(P)$	$\tau(Q)$	$\tau(P \leftrightarrow Q)$
T	T	T
T	F	F
F	T	F
F	F	T

여러가지 命題를 연결사 $\sim$, $\wedge$, $\wedge$, $\rightarrow$, $\longleftrightarrow$을 이용하여 결합한 것을 合成命題라 하고 이命題의 眞僞는 그것을 구성하는 하나 하나의 命題의 眞僞에 의하여 결정된다.

두 명제의 진리값이 일치할 때, 두 명제를 同値라 하고 기호 $\equiv$로 나타낸다.

합성 명제에는 처음에 주어진 명제와 혼동을 피하기 위해서 성분명제(3)는 소문자로 나타내고 그의 변역은 T, F인 것으로 생각하여 命題變數로 보고 앞으로의 진리표를 만들기로 하겠다.

즉, 命題變數 $p, q, r \cdots\cdots$을 獨立變數로 하고 이것을 連結詞로 결합한 函數 $P(p, q, r \cdots)$를 命題論理函數라 하겠다.

2. 論證의 法則

수학의 目的을 命題의 眞僞를 조사하는 것이라고 한다면 수학에서는 하나의 命題가 옳은 것임을 밝히기 위하여 몇개의 眞인 命題를 근거로 해서 어떤 命題가 眞임을 論理的으로 유도하는 과정이 필요하다.

이때 어떤 命題가 眞임을 論理的으로 유도하는 것을 推論이라고 하며 推論에는 몇가지 原理가 필요한 것이다. 즉,

수학의 證明을 만드는 예술이라고 할 때 수학자는 증명을 만들기 위하여 몇개의 중요한 原理를 필요로 한다.

이것은 마치 음악가나 미술가가 作品을 창조하기 위하여 몇개의 중요한 原理를 필요로 하는 것과 같은 것이다.

이 原理는 일상생활에서 반드시 성립한다고 할 수는 없지만 잘 정리되어 있는 것이어야 한다.

여기에서는 推論에 필요한 몇가지 법칙을 살펴 보겠다.

A. 恒眞命題(tautology)

命題 $p \wedge q \rightarrow P$의 진리값을 조사하면 다음 표와 같다.

p	q	p	$\wedge$	q	$\rightarrow$	p
T	T	T	T	T	T	T
T	F	T	F	F	T	T
F	T	F	F	T	T	F
F	F	F	F	F	T	F
		1	2	1	3	1

(註) 밑에 있는 숫자는 진리표를 만드는 순서임.

이것은 p, q의 진리값에 관계없이 $p \wedge q \rightarrow p$의 진리값은 항상 T임을 보이고 있다.

變數 $p, q, r \cdots$의 진리값에 관계없이 命題 $F(p, q, r \cdots)$가 항상 T인 진리값을 가질 때 $F(p, q, r \cdots)$을 恒眞命題(tautology)라고 한다.

命題 $F(p, q \cdots) \rightarrow G(p, q \cdots)$가 恒眞命題 일 때 命題 $F(p, q \cdots)$는 命題 $G(p, q \cdots)$를 論理的으로 函意한다고 하고 기호 $F(p, q \cdots) \Rightarrow G(p, q \cdots)$로 나타낸다.

이와같은 기호를 사용하면 앞의 예에서 $p \wedge q$는 P를 論理的으로 函意하고 $p \wedge q \Rightarrow P$가 된다.

$p \cap q \Rightarrow P$를

$$\frac{p \wedge q}{\therefore p}$$

로 나타내고 이와같은 것을 推論形式이라고 한다

〔1〕 Modus ponens: $(p \rightarrow q) \wedge p \Rightarrow q$

$(p \rightarrow q) \wedge p \rightarrow q$의 眞理表를 만들면

(다음호에 계속)

(3) $p \cup q$, $p \cap q$, $p \rightarrow q$, $p \rightarrow q$ 등에서 p, q는 성분 명제이고 $p \cup q$ 등의 명제는 합성명제가 된다.
(4) "S_1, $S_2 \cdots S_n$에서 $P \rightarrow Q$임을 증명한다는 의미이다.