論文 73-10-5-6

論 文

Complementary Analysis in Reduced Dimension (of Mutual Inductance Imbedded Network)

李 太 遠* · 安 秀 桔**
(RHEE, Tae Weon · ANN, Souguil)

要 約

一般的으로 電氣回路의 解法은 node analysis 나 loop analysis 의 어느 한 쪽만 行하고 나머지는 該當 branch 定數를 通하여 必要한 conjugate quantity 를 求하는 것이 通例이다. mutual inductance 가 들어 있는 branch 들에서는 이 두가지中의 하나만으로는 不可能하여 complementary analysis 를 通하여 두가지 variable 을 다 求하여야 한다. 이 complementary analysis 의 경우 우리는 network variable 의 한편을 알고 있으므로 方程式의 次元數를 mutual inductance branch 의 個數로 줄여서 取扱할 수 있다.

Abstract

In general, solution of electric networks requires both node and loop analysis, in which node pair voltages and loop currents are treated as network variables, but the conjugate quantities of these variables (the branch currents and node pair voltages respectively) are to be obtained through additional solving operation. In case of networks with magnetic coupling, however, the coupling keeps the conjugate variables mutually dependent and its final solution requires further calculation. In this paper is analyzed the method of obtaining the conjugate quantities through treatment of the problem in a subspace with dimensions of number of magnetically coupled branches.

序 論

Network analysis 의 方法은 state analysis 外에 loop basis 및 node basis 等의 方法이 確立되어 있어서 實際的으로 別 問題가 없고 A matrix, circuit incidence matrix 와 cut-set matrix 에 依해서 對象回路의 實際構成에 따라 달리 하는 便法이 아닌 一律的인 方法을 使用할 수 있고 따라서 電子計算機에 計算을 맡길 수도 있게 되었다. Fundamental branch to loop incidence matrix B와 Fundamental cut-set matrix Q사이의 關係도 규명되어 있다.

* 正會員, 中央大學校 工科大學 電子工學科
** 正會員, 서울工大 電子工學科

그러나 우리가 願하는 network variable 中 一次的인 計算으로 나오는 것은 loop basis 에서는 loop current, node basis 에서는 node pair voltage 만이어서 loop basis 에서 branch voltage, node basis 에서 branch current 等을 求하려면 얻어진 結果로부터 다시 計算을 하여야 한다. 一般的으로 이 complementary analysis 는 比較的 容易하다. Topological constraint 에 依해서 cross term 을 갖는 이 變數들이 우리가 세로 구하고자 하는 conjugate variable (branch voltage 에 對해서는 branch current, branch current 에 對해서는 branch voltage)에 對해서는 自己 branch만의 單獨的인 影響을 받고 있어서 conjugate variable pair 들은 서로 disjoint 이기 때문이다.

그러나 該當 component가 mutual inductance일 때에는 이들은 disjoint가 아니고 이들 mutual inductance branch들 사이에 如前히 cross term가 存在하기 때문에 node pair電壓을 알고서 branch電流를 求하는 것과 loop電流를 알고서 node pair電壓을 求하는 것은 自己 branch 定數만 알고서는 行하여 질 수 없다. 結果的으로 모든 network variable을 알기 위해서는 node analysis와 loop analysis 어느 한편만 가지고는 network analysis를 完結했다고 말할 수가 없어서 各各이 서로 complementary analysis의 役割을 갖고 있다.

Loop analysis와 node analysis

branch의 數가 n_b, 一次獨立인 loop(一例, mesh)의 數가 $n_l(=n_b-n_n+1)$로서 獨立된 loop의 數와 node pair의 數의 合計는 항상 n_b이고 한편이 增加하면 한편이 減少하게 되어 있어서(第一圖 參照) n_l의 增加는 node pair를 減少 즉 node pair voltage들 사이에는 constraint가 많아지고 따라서 Q matrix의 rank는 줄어지지만 同時에 B matrix의 rank는 커진다.

Node pair voltage에 對한 constraint의 增加는 端子사이의 電位差가 自由로운 狀態로부터 connection이 많아짐에 따라 branch電壓의 共有가 많아지고 loop가 많아지는데 反對로 loop數의 減少는 電流에 對한 constraint를 增加시키게 되어 node pair voltage사이에는 constraint가 적어 진다는 뜻이 되어 다음과 같이 두가지의 極端의 境遇로부터의 離脫을 말하게 된다.

1. 모든 電位差에 constraint가 없고 따라서 branch들은 自由이거나 한 Vertex만 連結되어 있다.(第二圖 (a))

2. 모든 電流에 constraint가 없고 따라서 모든 node는 一點으로 모여있다.(第二圖 (b))

따라서 node analysis의 見地로 보면 獨立 loop의 數가 nullity가 되어 Q matrix는 n_n-1의 rank를 갖고 loop analysis의 見地에서 보면 node pair의 數가 nullity가 되어 B matrix는 $n_b-(n_n-1)=n_l$의 rank를 갖는다.

Datum node에 對한 他 node의 電位差가 形成하는 (n_n-1次元의) Voltage vector를 V_n라 하고 $[I_s-[Y_b]E_s]$를 current equivalency vector (n_b次元)라고 불러 I_{beq}라 表示하면

$$V_n=[[Q]\,[Y_b]\,[Q]^t]^{-1}\,[Q]\,I_{beq} \qquad (1)$$

와 같이 하여 node voltage vector V_n을 求할 수가 있고 이 vector의 各各의 電壓 座標軸에 對한 投影이 各 node의 電壓이 된다. 같은 모양으로 loop current(n_l次元)를 I_l라고 表示하고 $[E_s-[Z_b]I_s]$를 voltage equivalency vector V_{beq}라 하면

$$I_l=[[B]\,[Z_b]\,[B]_t^{-1}\,[B]\,V_{beq} \qquad (2)$$

와 같이 하여 loop current vector I_l를 求할 수 있고 이 vector의 各各의 電流座標軸에 對한 投影이 各 loop電流가 된다.

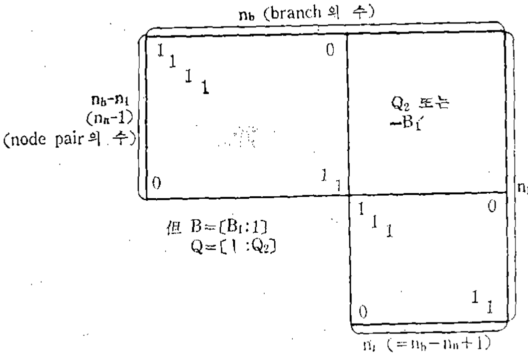
이와 같이 하여 우선 一次的인 解가 얻어진 셈이나 全體의 network variable이 求해진 것이 아니어서 node analysis의 경우에는 이미 求한 바 node pair voltage로부터 branch voltage를 먼저 求하고

$$V_b=[Q]^t\,V_n \qquad (3)A$$

이것으로부터 branch current를 求하게 되며 loop analysis의 경우에는

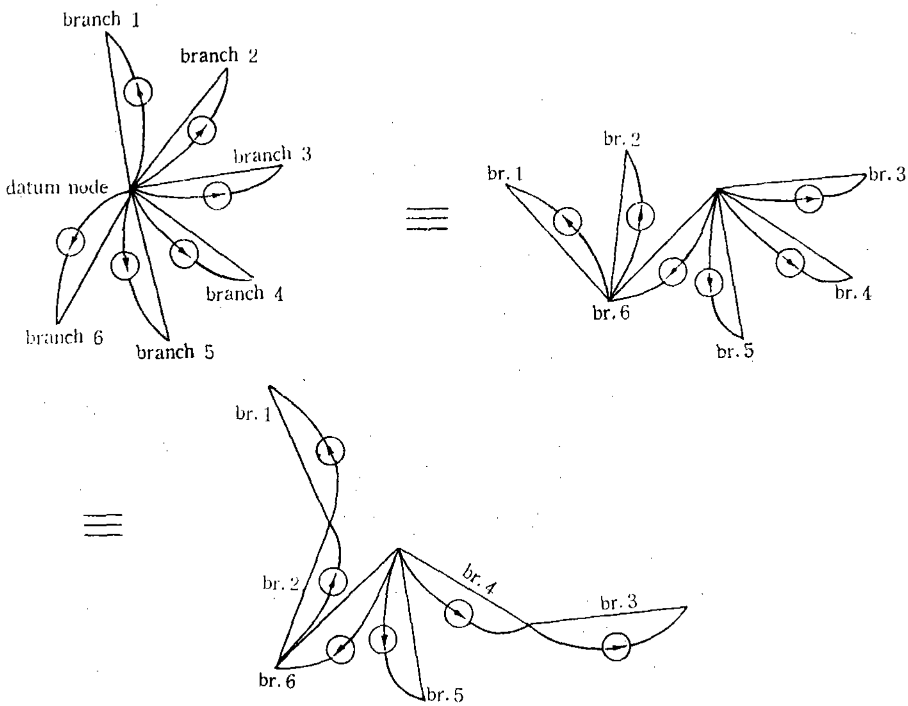
$$I_b=[B]^t I_l \qquad (3)B$$

의 式에 依해서 먼저 branch current를 求한 다음 이것으로부터 branch voltage를 求하게 된다.

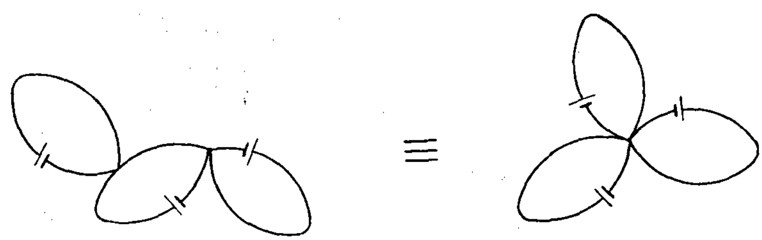


第一圖 B matrix와 Q matrix의 相互關係

Mutual Inductance Branch의 경우



第二圖 (a) node pair 구속이 없는 경우



第二圖 (b) Loop 구속이 없는 경우

上記한 바 後半의 手法은 該當 branch가 mutual Inductance를 包含하지 않고 있을 경우에는 conjugate variable 들 사이에 오로지 該當 branch의 回路定數만이 介入하고 있어서 計算이 容易하나 mutual inductance가 있을 경우에는 他 branch의 電流나 兩端電壓을 알아야 풀수가 있어서 node analysis의 경우에는 branch current를 計算하지 못하고 loop analysis의 경우에는 loop current(또는 branch current)만 알았지 node voltage를 모르기 때문에 다시 node analysis는 loop analysis를 loop analysis는 node analysis를 complementary analysis로서 行하여야 한다.

또한 mutual inductance를 갖는 branch에 包含되어 있는 電源에 對한 driving point immittance의 경우에도 같은 모양으로 두가지 analysis를 다해야만 計算이 될 수 있다.

Reduced Dimension Complementary Analysis

Loop나 node basis로 처음 analysis를 完了하여 network variable의 半을 計算하고 나머지 半을 求하기 위하여 그 complementary analysis를 行할때 우리는 이미 branch voltage나 branch current를 알고 있기 때문에 形式上 topological constraint를 除去하여 n_b dimension으로 돌아가서 各 branch마다에 關한 式을 세울 수 있는데 그때 impedance matrix $[Z_b]$와 admittance matrix $[Y_b]$는 各各 (4)式과 (5)式이 된다.

$$\begin{pmatrix} j\omega[L] & 0 & 0 \\ 0 & [R] & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{j\omega}\left[\frac{1}{C}\right] \end{pmatrix} I_b = V_b \qquad (4)$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{j\omega}[\Gamma] & 0 & 0 \\ 0 & [G] & 0 \\ 0 & 0 & j\omega[C] \end{pmatrix} V_b = I_b \qquad (5)$$

이 두式에서 各各의 matrix는 $[Z_b]$ 및 $[Y_b]$로서 이들은 (1)式과 (2)式에 이미 나온바와 같이 各各의 branch의 定數이고 $[L]$ 및 $[\Gamma]$를 除外한 나머지 四個의 matrix는 Diagonal matrix이어서 이들에 該當된 branch들은 서로 disjoint되어 있어서 獨立的인 取扱이 可能하였던 것이다 I_b와 V_b의 n_b個 成分은 loop를 또는 node를 共有하고 있는 것끼리는 같은 값이 되어서 一次獨立이 아니고 I_b는 成分中 n_n-1個가 一次從屬이고 V_b는 n_b-n_n+1個가 一次從屬이다.

上述한 바 (4) 및 (5)式에서 서로 disjoint한 branch에 關해서는 complementary analysis가 이미 알려져 있는 바와 같이 自己 branch의 admittance나 impedance에 依한 곱셈이나 나눗셈만 하면 곧 求할 수 있는 것이기 때문에 complementary analysis에서 除外하고 dimension을 축소하여 (4) 및 (5)式에서 $[L]$ 및 $[\Gamma]$部分에 該當하는 電壓空間과 電流空間만 생각하면 되고 그러한 경우에 聯立式은 다음과 같이 된다.

$$[L]\, I_{bl} = \frac{V_{bl}}{j\omega} \qquad (6)$$

$$[\Gamma]\, V_{bl} = j\omega I_{bl} \qquad (7)$$

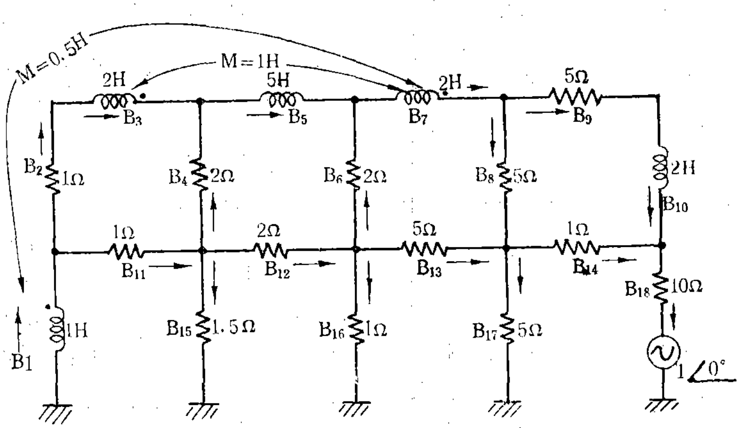
但 I_{bl}과 V_{bl}은 各各 I_b와 V_b의 Inductance 空間에 對한 投影 vector이고 inductance 空間의 次元을 갖었고 一次 analysis에 依해서 求해진 結果를 쓸 수 있다.

• •

第3圖에 나타난 바와 같은 回路의 第1, 第3 및 第7 branch는 서로 電磁結合이 되어 있고 나머지는 topological한 見地以外에 있어서는 서로 disjoint한 素子들이다. 이 回路의 Y_b matrix는 第1, 第3 및 第7 branch에 該當되는 素子들 사이에만 cross term이 있다. 이경우 Q matrix와 그 transverse matrix에 依해서 topological contstraint transform($[Q][Y_b][Q]^t$)를 行하여 V_n을 풀면 第4圖와 같이 그 解가 求해지는데 이때의 周波數는 1KHz이다. node 1, 3 및 node 5, 7의 電位를 알게 되었으므로 branch 1, 3 및 branch 7의 電流는 第5圖와 같이 reduced dimension complementary analysis에 依해서

$$\left.\begin{aligned} & j6280I_1 + j3140I_3 = 0.01137\angle -0.07^\circ \\ & j3140I_2 + 6280I_3 = 0.4\times10^{-4}\angle -90^\circ \\ & j3140I_1 + j6280I_2 + j12560I_3 = 0.199\angle 0.05^\circ \end{aligned}\right\} (8)$$

와 같이 되며 이것이 complementary loop analysis와 reduced dimension의 聯立方程式이다. 이 (8)式의 解는

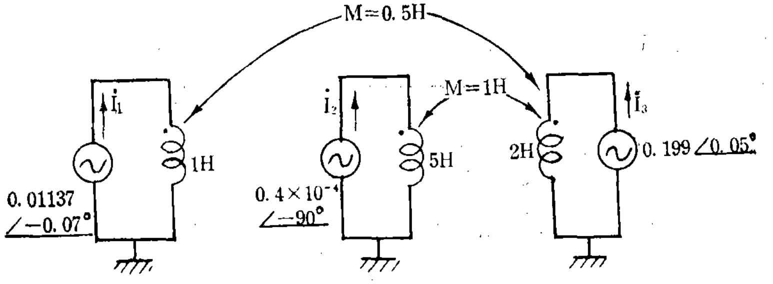


第 3 圖 回路網의 例

```
EXECUTION
```

```
FREQ =   0.10000000E 04

       NODES              NODE VOLTAGES

MAG     1- 4  0.11367606E-01  0.11367583E-01  0.11367712E-01  0.11367619E-01
PHA           0.17993142E 03  0.17999337E 03  0.17979351E 03  0.17992230E 03

MAG     5- 8  0.26524525E-01  0.26524405E-01  0.22531142E 00  0.19703832E 00
PHA           0.17986239E 03  0.17996966E 03 -0.17996933E 03 -0.17998703E 03

MAG     9-10  0.25358468E 00  0.26489418E 00
PHA          -0.17998413E 03 -0.17998916E 03


    BRANCHES              BRANCH CURRENTS

MAG     1- 4  0.10484125E-04  0.12293327E-04  0.12293328E-04  0.12775773E-04
PHA           0.90084762E 02  0.90069290E 02  0.90076904E 02 -0.89933151E 02

MAG     5- 8  0.48245681E-06  0.24827884E-04  0.25310339E-04  0.56546349E-02
PHA          -0.90085556E 02 -0.89944107E 02 -0.89947082E 02 -0.17984582E 03

MAG     9-12  0.56546656E-02  0.56547615E-02  0.18092382E-05  0.75783971E-02
PHA          -0.10247144E 00 -0.10246969E 00 -0.89705047E 02  0.53972955E-02

MAG    13-16  0.34102782E-01  0.67855864E-01  0.75784130E-02  0.26524405E-01
PHA           0.19473135E-01  0.43853987E-02  0.17992230E 03  0.17996966E 03

MAG    17-18  0.39407655E-01  0.73510557E-01
PHA          -0.17998703E 03 -0.38343723E-02


    BRANCHES              BRANCH VOLTAGES

MAG     1- 4  0.11367606E-01  0.12293327E-04  0.39654092E-04  0.25551547E-04
PHA          -0.08395361E-01  0.90069290E 02 -0.89921936E 02 -0.89933151E 02

MAG     5- 8  0.15156829E-01  0.49655769E-04  0.19878703E 00  0.28273180E-01
PHA          -0.85721343E-01 -0.89944107E 02  0.52916787E-01 -0.17984582E 03

MAG     9-12  0.28273329E-01  0.11309523E-01  0.18092382E-05  0.15156794E-01
PHA          -0.10247145E 00 -0.10246969E 00 -0.89705047E 02  0.53972955E-02

MAG    13-16  0.17051389E 00  0.67855864E-01  0.11367619E-01  0.26524405E-01
PHA           0.19473135E-01  0.43853987E-02  0.17992230E 03  0.17996966E 03

MAG    17-18  0.19703832E 00  0.26489418E 00
PHA          -0.17998703E 03 -0.17998916E 03
```

第 4 圖 第3圖의 回路網의 解



第5圖 Reduced dimension의 回路圖

$I_1=0.105\times10^{-4}\angle90°$

$I_2=0.123\times10^{-4}\angle90°$

$I_3=0.253\times10^{-4}\angle-90°$

이들은 第3圖에서 全體의 回路變數에 對해서 loop analysis로써 求한 값과 一致한다.

結　　論

mutual inductance를 包含한 一般的인 電氣回路는 node analysis나 loop analysis 하나만 가지고 모든 network variable을 求할 수가 없다. 그러나 이미 求해서 알게된 network variable의 값을 活用하여 mutual inductance의 個數로 聯立方程式의 規模를 줄여서 complementary analysis를 便利하게 할 수 있다.

參考文獻

1. Rohrer, R. A. "Circuit theory, an introduction to the state variable approach" McGraw Hill, New York, 1968
2. Huelsman, L. P., "Circuits, Matrices and Linear Vector Spaces," McGraw Hill, New York, 1963
3. 安秀桔, "Computer를 利用한 回路設計" 1971年度 電子工學會 seminar print (1971. 11)
4. 安秀桔, "Isolation of mutual inductances by unitary transformation."
   1972年度 電子工學會 秋季學術大會 論文集 (1972, 10)