논 문

論文 73-10-1-1

非線形制御系에 있어서 評價補助函數適用에 關한 研究

"Study on Adaptation of Parameteric Funition in Performance Index for Non-linear Control System Design"

梁 興 錫*·金 庚 基**

(Heung Suk Yang, Kyong Ki Kim)

要 約

非線形制御系의 最適制御는 一般的으로 解析的인 方法에 依하여 그解를 求하기 困難하다. 그뿐만 아니라 問題對象에 關한 完全한 數學的模型構成이 困難한 경우도 많다. 本論文에서는 非線形制御系의 設計에 있어서 最適方策을 求하는 過程에서 補助的인 手段으로 評價函數內에 補助函數를 導入하여 最適問題의 解를 求하는 方法을 提示하였다. 評價函數는 積分二次形의 問題를 取扱하여 그 補助函數를 適切히 選定하여 所期의 應答特性을 얻을 수 있음을 밝혔고 몇가지 例를 取扱하여 이러한 補助函數의 有用性을 具體的으로 考察하였다.

Abstract

It is often difficult, or almost impossible, in most cases to obtain the optimal solution to the non-linear control systems by analytical method. In this paper, the authors have treated with the technique of parameteric adaptation which is introduced into the performance index, in order to circumvent the difficulties arising in search of optimal policy for the non-linear feedback control systems. This approach is shown to provide the advantage of making it possible to design the non-linear feedback contol system even if the design specifications are not completely discribed in mathematical form. This is fundamentally due to a cetain degree of freedom in design, which this method allows the designer in establishing the performance index. The effectiveness and feasibilities of this concept are demonstrated by working out some illustrative examples with the performance index of integral quadratic form.

1. 緒 論

非線形制御對象은 一般으로 數學的인 記述을 하기 어렵고 또 그 制御機能에 관한 評價函數(performace index)를 完全히 數式으로 規定하기 困難한 경우도 많다. 또 評價函數가 設定되었을 경우에도 그 最適制御問題의 解를 求하기가 쉽지 않은 경우가 많다.

이點에 對하여 制御系設計에 있어서 自由度를 갖도록 評價函數(performance index)를 選定하면 效果的方法이 될것이므로 評價函數設定에 있어서 補助函數(parametric function)를 導入하여서 求하여지는 解의 定性的 定量的性質을 檢討하고 最適制御問題에서의 適用時의 效果를 考察

* 正會員, 서울大學校 工科大學

** 正會員, 漢陽大學校 工科大學

하였다.

2. 問題의 設定

最適制御에 있어서 一般的으로 制御對象과 評價函數는 다음과 같이 주어진다.

$$\left.\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{x}}(\sigma)&=\mathbf{f}[\boldsymbol{x}(\sigma),\ \boldsymbol{m}(\sigma),\ \sigma],\ t<\sigma\\ \boldsymbol{x}(\sigma=t)&=\bar{\mathrm{x}}(t)\end{aligned}\right\}\tag{2.1}$$

$$J=\int_t^T L[\boldsymbol{x}(\sigma),\ \boldsymbol{m}(\sigma),\ \sigma;\lambda]d\sigma+F[\boldsymbol{x}(T);\mu]\tag{2.2}$$

但 $\boldsymbol{x}(\sigma)$는 n 次元狀態벡터, $\boldsymbol{m}(\sigma)$는 r 次元의 制御벡터이며, σ는 時間, λ와 u는 任意의 parameter 벡터이다.

λ와 μ는 設計上 任意로 選定하는 parameter 函數이며 函數 L와 F가 特殊한 形式일때와 $[T-t]$의 값이 크지 않을때는 이 問題를 比較的 쉽게 풀 수 있으나, 一般으로 그 解를 求하기는 困難하다. 따라서 L와 F를 比較的簡單한 形式으로 擇하고 λ와 μ를 現在時間 t까지의 制御過程에 따라 그値가 變化하는 函數 즉 $\lambda=\lambda[\boldsymbol{x}(\tau),\boldsymbol{m}(\tau);\ t_o\leq\tau\leq t]$, $\mu=\mu[\boldsymbol{x}(\tau),\ \boldsymbol{m}(\tau);\ t_o\leq\tau\leqq t]$이라고 設定하고 이를 應用하여 制御問題를 檢討하기로 한다.

3. 連續制御系에 對한 檢討

3.1. 二次形式評價函數를 갖는 最適制御

制御對象의 模型으로 線形系인 경우 즉

$$\left.\begin{aligned}\dot{x}(\sigma)&=\boldsymbol{A}(\sigma)\boldsymbol{x}(\sigma)+\boldsymbol{B}(\sigma)\boldsymbol{m}(\sigma),\ t<\sigma\\ \dot{x}(\sigma=t)&=\bar{\mathrm{x}}(t)\end{aligned}\right\}\tag{3.1}$$

일때를 考察하기로 한다.

但 $\boldsymbol{A}(\sigma)$는 $n\times n$ 行列, $\boldsymbol{B}(\sigma)$는 $n\times r$ 行列이고 $\boldsymbol{x}(t)$는 實時間 t에서 實測된 制御對象의 狀態量이다.

制御對象인 (3.1)式의 解 $\boldsymbol{x}(\sigma)$, $(t<\sigma)$는 現在의 制御對象의 狀態推移와 반드시 一致하는 것이 아니고 制御對象의 未來狀態를 나타내는 數學的模型이며, $\bar{\mathrm{x}}(t)$는 實時間 t에서의 實測値이므로 觀測에 隨伴하는 雜音이 없을때의 現在狀態를 나타내는 量이다.

이제 實時間 t에서 制御對象의 狀態 $\bar{\mathrm{x}}(t)$가 觀測되었고 最少化하려는 評價函數가 積分二次形式인 다음式

$$J[\boldsymbol{x}(t),\ \boldsymbol{m}(\sigma);\ T-t]=\int_t^T[\boldsymbol{x}^T(\sigma)\ \boldsymbol{F}(\bar{\mathrm{x}}(t))\boldsymbol{x}(\sigma)+\boldsymbol{m}^T(\sigma)\ \boldsymbol{G}(\bar{\mathrm{x}}(t))\ \boldsymbol{m}(\sigma)]d\sigma\tag{3.2}$$

으로 주어졌을 경우를 생각한다.

但 $\boldsymbol{F}$와 $\boldsymbol{G}$는 實時間 t에서 觀測된 狀態量 $\bar{\mathrm{x}}(t)$만의 函數인 $n\times n$ 및 $n\times r$인 正定値對稱行列(positive, definite, symmetric matrix)이다. T는 設計上 任意로 定할 수 있는 量이다.

그러므로 評價函數(3.2)式은 그 荷重函數(weighting function) $\boldsymbol{F}$와 $\boldsymbol{G}$가 實時間에서 觀測된 狀態量에 依하여 決定되는 形式이며, (2·1)式에서의 λ는 (3.2)式에서의 $\boldsymbol{F}$와 $\boldsymbol{G}$에 該當된다.

評價函數(3.2)式을 最少化하는 制御벡터 $\boldsymbol{m}(\sigma)$는 σ의 全領域 $t\leq\sigma\leq T$에 對하여 求할 수 있으나 制御過程의 進行에 따라 時時刻刻 變化하므로 $t=t+\Delta t$일때에 $\bar{\mathrm{x}}(t)$의 値는 變化하고 따라서 $\boldsymbol{F}$와 $\boldsymbol{G}$의 値도 變化하므로 實時間 $\sigma=t$에서만 $\boldsymbol{m}(\sigma)$는 意味를 갖는다.

3.2. 最適制御 $m^*(t)$의 決定

實時間 t에서 制御對象에 作用하는 最適制御 $\boldsymbol{m}^*(t)$를 決定하기 위하여 $t\leq\mu\leq T$로 定義된 補助時間變數 μ를 여기에 導入하기로 한다.

이제 函數 V^*를 다음과 같이 定義하기로 한다.

$$V^*[\boldsymbol{x}(\mu),\ \bar{\mathrm{x}}(t);\ T-\mu]=\underset{m(\sigma)}{\mathrm{Min}}\int_\mu^T[\boldsymbol{x}^T(\sigma)\cdot(\boldsymbol{F}\bar{\mathrm{x}}(t))\boldsymbol{x}(\sigma)+\boldsymbol{m}^T(\sigma)\boldsymbol{G}(\bar{\mathrm{x}}(t))\boldsymbol{m}(\sigma)]d\sigma\tag{3.3}$$

上式에 R. Bellman의 Dynamic Programming의 方法[4]을 適用하면 다음과 같은 V^*에 關한 方程式이 成立한다.

$$\underset{m(\mu)}{\mathrm{Min}}\Big[\boldsymbol{x}^T(\mu)\boldsymbol{F}[\bar{\mathrm{x}}(t)]\boldsymbol{x}(\mu)+\boldsymbol{m}^T(\mu)\boldsymbol{G}(\bar{\mathrm{x}}(t))\boldsymbol{m}(\mu)+\left(\frac{\partial V^*}{\partial\boldsymbol{x}(\mu)}\right)^T\{\boldsymbol{A}(\mu)\boldsymbol{x}(\mu)+\boldsymbol{B}(\mu)\boldsymbol{m}(\mu)\}\Big]+\frac{\partial V^*}{\partial\mu}=0\tag{3.4}$$

따라서 上式을 풀면, 最適制御 $m^*(\mu)$는

$$m^*(\mu)=-G^{-1}(\bar{x}(t))B^T(\mu)\ P(\bar{x}(t);\ T-t)x(\mu)$$
$$t\leq\mu\leq T \qquad (3.5)$$

이 된다. 但 $P(\bar{x}(t);\ T-\mu)$는 다음式

$$\frac{d}{d\mu}P+A^T(\mu)P+PA(\mu)+F(\bar{x}(t))$$
$$-PB(\mu)G^{-1}(\bar{x}(t))B^T(\mu)P=0 \qquad (3.6)$$

에서 P에 對한 終端條件

$$\left.\begin{array}{l} P(\bar{x}(t);\ T-\mu)=0 \\ \mu=T \end{array}\right\} \qquad (3.7)$$

에서 얻는 對稱的인 解이다.

여기서 制御벡터 $m^*(\mu)$가 意味를 갖는것은 μ가 實時間 t와 같을때 뿐이므로 實時間 t에서 制御對象에 加하여야할 最適制御 $m^*(t)$는

$$m^*(t)=-G^{-1}(\bar{x}(t)\cdot B^T(t)\ P(\bar{x}(t);\ T-t)\cdot\bar{x}(t) \qquad (3.8)$$

이 된다. 上式은 確實히 非定常 非線形 歸還制御를 意味한다. 이러한 制御를 實現하는데 있어서의 難關은 (3.8)式을 (3.7)式의 條件下에 實時間으로 直刻 $P(\bar{x}(t);\ T-t)$를 求하지 않으면 아니된다는 點이다.

다음으로 制御對象의 模型(3.1)式이 定常일때, 즉 $A(\sigma)=A$, $B(\sigma)=B$이고 $T=\infty$이거나 T가 매우 큰값으로 주어질때는 微分方程式 (3.6)式을 풀지않고 代數方程式을 푸는 問題가 된다[5]. 즉 $\mu\to\infty$일때 (3.6)式에서

$$\frac{d}{d\mu}P(\bar{x}(t);T-\mu)\to 0$$

가 되므로

$$A^TP(\bar{x}(t))+P(\bar{x}(t))A$$
$$-P(\bar{x}(t))BG^{-1}(\bar{x}(t))B^TP(\bar{x}(t))$$
$$+F(\bar{x}(t))=0 \qquad (3.9)$$

이 된다. 上式은 代數方程式이며, 非線形이므로 一般解는 求하기 困難한 경우가 많다.

이제 (3.9)式의 解를 $P_s(\bar{x}(t))$이라고 하면 (3.8)式에 代入할때 그 最適制御 $m^*(t)$는

$$m^*(t)=-G^{-1}(\bar{x}(t))B^TP_s(\bar{x}(t))\bar{x}(t) \qquad (3.10)$$

이 된다. 上式은 分明히 正常非線形制御를 意味한다.

3.3. 例 1

Z. V. Rekasius는 어떤 制御對象에서 速度 또는 加速度의 緩飽和特性을 얻을 目的으로 非二次形式의 評價函數를 設定하고 近似最適制御를 提示하였다[6]. 그 制御對象으로

$$\left.\begin{array}{l} \dot{x}_1=x_2 \\ \dot{x}_2=-x_2+m \end{array}\right\} \qquad (3.11)$$

을 想定하고 速度 x_2가 크게 되는 것을 抑制할 目的으로 評價函數

$$I=\int_0^\infty(x_1^2+x_2^4+m^2)d\sigma$$

를 設定하고 이것을 最少化하는 制御 m를 求하는 問題를 取扱하였다. 이에 對한 嚴密解(exact solution)를 求하는 것은 實際로 不可能하므로 近似最適制御方式에 따라 近似最適制御 m를

$$m(x_1,x_2)=-x_1-0.732x_2$$
$$-x_2(0.0671x_1^2-0.115x_1x_2+0.267x_2^2) \qquad (3.13)$$

로 算定하여 緩飽和特性을 求 하였다.

이제 이 制御對象에 對하여 前述한바의 補助變數를 갖는 評價函數를 適用하여 緩飽和特性을 얻게 됨을 檢討하고저 한다. 最少化하고저하는 評價函數를

$$J=\int_t^\infty\{\dot{x}_2^2(\sigma)+f[x_2(t)]\dot{x}_2^2(\sigma)\quad+m^2(\sigma)\}d\sigma \qquad (3.14)$$

이라고 하자. 觀測된 速度 $x_2(t)$가 클때 $f(x_2)$의 값이 커지도록 만들어, $x_2^2(\sigma)$에 큰荷重(weight)이 걸리도록 設定한다. 또 速度 $x_2(t)$의 값이 적어질때는 $f(x_2)$의 값도 적어 지도록 $f(x_2)$를 構成한다.

(3.9)式의 $P[\bar{x}(t)]$를 다음과 같은 matrix

$$P[\bar{x}(t)]=\begin{pmatrix} p_{11}[\bar{x}(t)] & p_{12}[\bar{x}(t)] \\ p_{21}[\bar{x}(t)] & p_{22}[\bar{x}(t)] \end{pmatrix}$$

이라고 하면, (3.9)式은

$$\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix}$$
$$-\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$
$$-\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{12} & p_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & f[x_2(t)] \end{pmatrix} \qquad (3.15)$$

라고 쓸 수 있다.

P가 正定値(positive definite)가 되도록 各要素 p_{ij}를 만들려면,

$$\left\{\begin{array}{ll} p_{11}[x_2(t)]=\sqrt{3+f[x_2(t)]} \\ p_{12} \qquad\quad =1 \\ p_{22}[x_2(t)]=-1+\sqrt{3+f[x_2(t)]} \end{array}\right\} \tag{3.16}$$

이 될것이다.

따라서 最適制御 m^*는 (3.10)式에서

$$m^*(t)=-x_1(t) \quad -\{-1+\sqrt{3+f[x_2(t)]}\}x_2(t) \tag{3.17}$$

이 된다. 이제 가령 $f(x_2)=x_2{}^4$이라고 놓으면 (3.13)式의 Rekasius 近似最適制御보다 더욱 緩漫한 飽和特性을 얻게 된다.

例 2. 簡單한 非線形制御對象으로

$$x=ax+cx^3+bm \tag{3.18}$$

인 경우를 考察하기로 한다.

$x=0$을 正常動作點(stationary operating point)이라하면 그 近傍에서의 線形模型은 近似的으로

$$x=ax+bm \tag{3.19}$$

이라고 놓을 수 있다.

上式 (3.19)의 線形近似模型에 對하여 最少化하고저하는 評價函數를

$$I=\int_0^\infty \frac{1}{2}(x^2+m^2)d\sigma \tag{3.20}$$

이라 하면, 그 最適制御 m^*는

$$m^*=-\frac{a+\sqrt{a^2+b^2}}{b}x \tag{3.21}$$

이 된다. 이 制御量 m^*를 (3.18)式의 非線形制御對象에 適用하면, $|x|$의 값이 클때 適當치 못하다. 즉 $|x|$의 값이 클때 系의 應答이 遲延되고 또 初期値 $|x_0|$의 값이 클때 系의 應答은 發散이 된다.

따라서 評價函數를 다음과 같이

$$J=\int_t^\infty\{[1+f[x(t)]]x^2(\sigma) \quad +m^2(\sigma)\}d\sigma \tag{3.22}$$

이라고 修正하여 設定하고 補助變數 $f(u)$를 求하여 보기로 한다.

$f(x)$는 $x(t)$의 적을때 (3.19)式의 近似模型이 實在系(3.18)와 매우 近似하므로, 差는 0에 近接하고 또 $x(t)$의 값이 클때에는 그差도 커지고 應答도 遲延되므로 $x^2(\sigma)$에 對한 荷重(weight)을 크게 하지 않으면 아니되고 $f(x)$의 값이 x의 값에 따라 커지도록 $f(x)$를 設定하여야 한다.

(3.22)式을 最少化하는 制御 m^*를 求하면

$$m^*(t)=-\frac{a+\sqrt{a^2+b^2\{1+f[x(t)]\}}}{b}x(t) \tag{3.23}$$

이 된다.

이제 $f[x(t)]$를 $f[x(t)]=8x^4(t)$으로 擇하면 實在系(3.18)式의 應答은 線形近似模型보다 많이 改善되고 $f(x)$를 適當히 選定하여 가면 보다 最適制御에 近接한 制御를 求할 수 있다.

一般으로 制御對象을 記述하는 數學模型은 實在制御對象을 完全히 記述하기 어렵다. 定常動作點인 平衡點(equilibrium point)의 近傍에서 近似的인 線形模型을 만들기는 쉬우나 實在의 制御對象은 반드시 어떤 非線形特性을 內包하므로 線形模型으로 求한 最適制御는 이로因하여 支障이 있다[7)8)].

本論文에서는 線形近似模型과 實在의 非線形制御對象과의 사이에 생기는 差異를 補償키위한 適當한 評價函數를 設定하는데 補助變數를 適用하여 그 有用性을 究明하는데 重點을 두었다.

4. 離散値制御系에 對한 檢討

連續系에 있어서 評價函數에 補助變數를 包含시켜 設定하고 最適制御를 定式化함에 있어서 線形制御對象과 二次形式評價에 限定하여 그有用性을 檢討하였으나 制御對象을 線形으로 假定하기 어려울 경우가 많으므로 이제 非線形 制御對象을 檢討코지 한다.

이러한 問題는 連續系로 取扱하기 어려우므로 離散的方式으로 定式化하여 D.P.에 依하여 數値的인 解를 求하는 解法은 可能하다[9)].

그러나 이러한 方法은 쌤플 周期와 制御區間에 對應하는데 所要段數 N가 커지면 그 數値解를 求할때 큰 記憶容量을 具備한 計算機를 使用하여야 한다.

따라서 實用的인 面에서 困難하므로 여기서 最終値評價規範에 따라 離散系에 對하여 그 評價函數를 設定하고 그 效果를 檢討코저 한다.

4.1. 最終値評價規範에 따르는 最適制御問題의 定式化

制御對象으로서 다음과 같은 非線形系

$$\left.\begin{array}{l} x_{k+1}=f(x_k,\ m_k) \\ x_{k=0}=\bar{x}_i \end{array}\right\} \qquad (4.1)$$

但 $x_k=x(k\Delta)$

$m_k=m(k\Delta)$

Δ=샘풀周期

$f(x_k, m_k)$는 n 次元의 vector 函數이며

k는 模型上의 時間, i는 實時間에 對한 表示이다.

여기서 制御對象의 狀態變數 $\bar{x}_i=\bar{x}(t)$는 直接觀測할 수 있는 것으로 假定한다. 또制御 vector m는 實際로 制約이 되는 경우가 많으므로

$$m_k \epsilon M \qquad (4.2)$$

로 制約한다. 여기서 M는 r 次元 vector 空間으로 有界閉集合이다.

이제 評價函數는 다음과 같은 形式으로 設定하기로 한다.

$$J_k=\Lambda_i(x^T{}_{i+k}\Phi(\bar{x}_i)x_{i+k}) + \sum_{j=0}^{k-1} m^T{}_{i+j}\Psi(\bar{x}_i)m_{i+j}\Delta \qquad (4.3)$$

但 Λ_i는 正値 scalar 函數(positive scalar function)

$\Phi_i(\bar{x}_i)$=荷重函數로서 $(n\times n)$의 正定値인 對稱行列(positive definite, symmetic matrix)

$\Psi_i(\bar{x}_i)$=荷重函數(weighting function)으로서 $(r\times r)$의 正定値對稱行列

$\Phi_i(\bar{x}_i)$와 $\Psi_i(\bar{x}_i)$는 實時間에 實測된 制御對象의 狀態量$\bar{x}_i$에 陽으로(explicitly) 關係되는 函數로서 補助函數의 役割을 한다.

이 評價函數 (4.3)式을 最小化하는 最適制御를 $D.P.$를 適用하여 函數方程式을 풀면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} V^*{}_{k-j}(x_{i+j}, \bar{x}_i) &= \underset{\{m_{i+j}\}\epsilon M}{\mathrm{Min}} \{m^T{}_{i+j}\Psi_i(\bar{x}_i)m_{i+j}\Delta \\ &\quad + V^*{}_{k-j-1}(x^{i+j+1}, x_i)\} \\ &\quad (j=0, \cdots k-1) \end{aligned} \qquad (4.4a)$$

$$V_o{}^*(x_{i+k}, \bar{x}_i)=\Lambda_i(x^T{}_{i+k}\Phi_i(\bar{x}_i)x_{i+k}) \qquad (4.4b)$$

但

$$V^*{}_{k-j}(x_{i+j}, \bar{x}_i)= \underset{\{m_{j+i}\}\epsilon M}{\mathrm{Min}}\ J_k \quad (0\leq j\leq k-1) \qquad (4.5)$$

評價函數 (4.3)은 制御終點時間을 $N=i+k$로 하는 最終値評價規範

$$I_f=\Lambda(x^T{}_{i+j}\cdot\Phi\cdot x_{i+k}) \qquad (4.6)$$

및 制御하는데 消費하는 energy

$$I_e=\sum_{j=0}^{k-1} m^T{}_{i+j}\Psi\cdot m_{i+j}\Delta \qquad (4.7)$$

을 包含하여 記述한 形式

$$I_k=\Lambda(x^T{}_{i+k}\Phi\cdot x_{i+k}) + \sum_{j=0}^{k-1} m^T{}_{i+k}\Psi\cdot m_{i+k}\Delta,\ (i<k) \qquad (4.8)$$

을 擴大한 것이다. (4.8)式에서 Φ와 Ψ는 實時間 i와 制御對象의 狀態 $\bar{x}_i$에 無關하다.

(4.3)式의 評價函數는 制御過程의 進行에 따라 그 內容이 變化하여 간다. 이 變化는 實測狀態 $\bar{x}_i$에 陽으로(expliatly) 依存한다. 또 評價函數 (4.3)式에서 k를 必要以上으로 크게 하면 最適化計算이 複雜하게 되며 $\Phi(\bar{x}_i)$와 $\Psi(\bar{x}_i)$가 미치는 程度만큼의 效果가 없다. 따라 k를 必要한 最小値로 할때의 缺點은 $\Phi(\bar{x}_i)$와 $\Psi(\bar{x}_i)$의 構造決定으로 補償하면 된다.

(4.8)式의 評價函數에서는 $k=N-i$인 制御終點時間 N는 決定的 役割을 한다.

그러므로 (4.3)式과 같은 補助函數를 構成하여 導入한 評價函數를 適用하면 數值計算上 必要한 計算機의 記憶容量을 減少시킬 수 있을 것이다.

또 離散系의 最適化計算에 있어서 (4.3)式의 k가 이에 對應하는 (4.1)式의 次元 n과 같거나 또 이에 1를 加한 값인 n+1과 같으면 最適制御方策을 解析的으로 誘導할 수 있는 경우도 있다. 이경우에도 (4.3)式의 評價規範은 (4.8)式의 規範에 比하여 制御系의 設計에 보다 有用하고 效果的이다.

4.2. 例3

制御對象이 다음과 같은 方程式

$$x_{i+1}=(1+a\Delta)x_i+c\Delta x^3{}_i+\Delta m_i \qquad (4.9)$$

으로 되었을때를 考察하기로 한다. 여기서 a와 c는 系의 特性을 나타내는 parameter로서 定數이

다.

評價函數로서 다음 形式의 規範을 取하기로 한다.

$$J_k=\phi(x_i)\ x^2{}_{i+k}+\sum_{j=0}^{k-1}\phi(x_i)m^2{}_{i+j}\Delta \qquad (4.10)$$

但 $\varphi(x_i)$와 $\phi(x_i)$는 補助函數로서 設計目標에 맞도록 任意調整할 수 있는 函數이다.

이제 (4.9)式이 成立하면서 (4.10)式이 最少化되는 制御方策은 다음과 같이 計算하여 求하면 될 것이다.

$k=1$에 對하여 (4.10)式에서

$$J_1=\phi(x_i)x^2{}_{i+1}+\phi(x_i)_1m_i^2\Delta$$
$$=\varphi(x_i)\{(1+a\Delta)x_i+c\Delta x^3{}_i+\Delta_1m_i)\}^2$$
$$+\phi(x_i)_1m^2{}_i\Delta$$

$$\frac{\partial J_1}{\partial m_i}=2\{\varphi(x_i)\,[(1+a\Delta)x_i+c\Delta x_i{}^3+\Delta_1m_i]\Delta$$
$$+\phi(x_i)_1m_i\Delta\}=0$$

$$\therefore\ {}_1m_i=-\frac{\varphi(x_i)}{\varphi(x_i)\Delta+\phi(x_i)}\{(1+a\Delta)x_i$$
$$+c\Delta x^3{}_i\}$$
$$=-\sigma(\varphi,\phi)\ \{(1+a\Delta)x_i+c\Delta x^3{}_i\} \qquad (4.11)$$

$$但\quad \sigma(\varphi,\phi)=\frac{\varphi(x_i)}{\varphi(x_i)\Delta+\phi(x_i)}$$

또 $k=2$에 對하여 다음式이 成立한다.

$$\{(1+a\Delta)x_i+c\Delta x^3{}_i\}-\{\phi+(1+a\Delta)^2\Delta\sigma\}z$$
$$-4c(1+a\Delta)\Delta^2\sigma z^3-3c^2\Delta^3\sigma z^5=0 \qquad (4.12)$$

上式을 z에 關하여 풀고 物理的意味를 檢討하여 z의 값을 擇하면

$${}_2m_i=\{z-(1+a\Delta)x_i+c\Delta x^3\}/\Delta \qquad (4.13)$$

이 된다. m_i에 對하여 (4.11)式 또는 (4.12)式을 擇하여 (4.9)式의 制御系에 適用하면 그림 (1)과 같이 制御系의 閉回路가 構成된다.

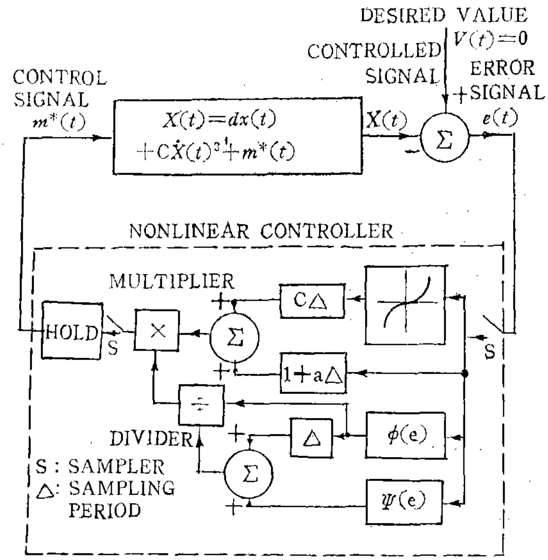

그림 1. 非線形 샘플値制御系의 構成

Fig. 1. Configuration of Non-limear Sampled-Data Control System

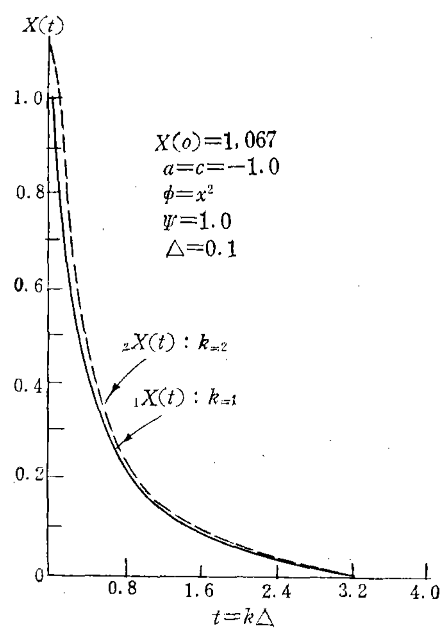

그림 2. 系應答의 比較

Eig. 2. Comparison of System Response

이제 $\varphi=x^2$, $\phi=1$ 인 경우 制御方策 (4.11)式과 (4.12)式에 對하여 各各 그 應答 x를 計算하여 그 特性을 檢討하여 보면 그림 2와 같이 나타난다. 但, $x(0)=1.067$. $a=c=-1.0$ $\varphi=x^2$, $\phi=1.0$, $\Delta=0.1$으로 取하고 (4.11)式의 ${}_1m_i$에 對한 應答을 ${}_1x(t)$, (4.13)式의 ${}_2m_i$에 對한 應答을 ${}_2x(t)$로 表示하였음.

그림 (2)에서 ${}_1x(t)$과 ${}_2x(t)$의 波形은 거의 同一하나, 系의狀態의 初期値에서 順次로 制御量 ${}_km_i$를 計算하는 節次에 있어서 後者의 경우인 (4.13)式의 制御方策이 前者의경우인 (4.11)式의 方策보다 훨씬 複雜하다. 따라서 狀態의 값을 反

復計算하면서 可變 補助函數의 값을 調整하여 가는 試行誤差的인 制御方策이 本方式이므로 (4.11)式의 制御方策이 보다 有利하다.

4.3 例4.

制御信號에 制約이 있는 二階非線形制御對象이 다음과 같은 方程式으로 주어졌을 때를 考察키로 한다.

$$\left.\begin{aligned} x_{1,\,i+1}&=x_{1,\,i}+f(x_{2,\,i})\Delta \\ x_{2,\,i+1}&=G(\Delta)x_{2,\,i}+D(\Delta)m_i \end{aligned}\right\} \quad (4.14a)$$

$$\text{但}\quad \left.\begin{aligned} &G(\Delta)x_{2,\,i}+D(\Delta)m_i\equiv z \\ &f(z)=L:(z>L) \\ &\quad =Z:(-L<z<L) \\ &\quad =-L:(z<-L) \end{aligned}\right\} \quad (4.14b)$$

$$\left.\begin{aligned} G(\Delta)&=\exp(-a\Delta) \\ D(\Delta)&=\frac{b}{a}\{1-\exp(-a\Delta)\} \end{aligned}\right\} \quad (4.14c)$$

制御量 m_i의 크기는 다음과 같은 制約이 있다.

$$|m_i|\leq M \qquad (M:\text{正의 定數}) \quad (4.15)$$

最少化하고저 하는 評價函數를

$$J_{k=2}=\varphi(x_{1,\,i})\ x^2{}_{1,\,i+2}+\beta\Delta(m^2{}_i+m^2{}_{i+1}) \quad (4.16)$$

$$\text{但}\ \phi(x_{1,\,i})=\beta,\quad (i>0)$$

이라고 하고 最適制御方策을 求하기로 한다. 이에 對한 必要條件을 最適性의 原理에서 誘導하면 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} &\beta m_i+\varphi(x_{1,\,i})\ D(\Delta)\ f'(z)\{\Delta\cdot \\ &\quad f(x_{2,\,i+1})+x_{1,\,i+1}\}=0 \qquad (4.17a) \\ &\quad |m_i|\leq M \end{aligned}$$

$$\text{但}\quad \left.\begin{aligned} f'(z)&=1\ :\ |z|\leq L \\ &=0\ :\ |z|>L \end{aligned}\right\} \quad (4.17b)$$

$$z\equiv G(\Delta)x_{2,\,i}+D(\Delta)m_i$$

(4.17a)式에 (4.14a)式에 代入하고 $f'(z)=1$로 代置하면

$$\begin{aligned} m_i=&-\frac{\varphi D}{\varphi D+\beta}\ \{x_{1,\,i}+f(x_{2,\,i})\Delta \\ &+G\Delta x_{2,\,i}\}\equiv w_i \qquad (4.18) \end{aligned}$$

가 된다. 따라서 m_i의 制約條件은 다음과 같이 생각할수 있다.

$$\left.\begin{aligned} \hat{m}_i&=M \qquad (w_i>M) \\ &=w_i \qquad (|w_i|\leq M) \\ &=-M \quad (w_i<-M) \end{aligned}\right\} \quad (4.19)$$

上式에서 $f'(z)=1$ 이라고 假定한것이므로 m_i가 (4.14b)式에서 얻어지는 不等式

$$-G(\Delta)x_{2,\,i}+L\geq D(\Delta)m_i\geq G(\Delta)x_{2,\,i}-L \quad (4.20)$$

을 滿足할때에는 最適方策 $m^*{}_i$는 $m^*{}_i=\hat{m}_i$ 이며 (4.19)式으로 주어진다.

萬一 (4.17a)式에서 $f'(z)=0$ 이라고 하면 $\beta m_i=0$ 이므로 $m_i=0$ 가 된다. 이 m_i의 값은 또 (4.20)式을 滿足하여야 되므로 最適解는 (4.20)式에서 等式을 成立시킬 때의 値가 된다.

$$\left.\begin{aligned} m^*{}_i=&\frac{\{G(\Delta)x_{2,\,i}-L\}}{D(\Delta)}: \\ &(D(\Delta)\ \hat{m}_i<-G(\Delta)x_{2,\,i}-L) \\ =&\frac{\{G(\Delta)x_{2,\,i}+L\}}{D(\Delta)}: \\ &(D(\Delta)\hat{m}_i>-G(\Delta)x_{2,\,i}+L) \end{aligned}\right\} \quad (4.21)$$

이 된다.

따라서 最適制御方策은 z의 領域에 따라 (4.19)式 또는 (4.21)式으로 주어진다. (4.18)式에서 w_i의 값은 $\varphi(x_{1,\,i})$과 $\phi(x_{1,\,i})=\beta$의 값에 따라 調整할 수 있으므로 φ와 ϕ를 調定함으로써 所期의 應答을 갖는 制御系를 構成할 수 있다.

5. 結 論

本論文에서는 制御系의 設計方法으로 實際的立場에서 當面하는 最適制御의 問題點을 檢討하고 이 難點을 補償하는 方法으로서 評價規範을 擴大하여 그 構造에 있어서 自由度를 주기 위하여 補助變數를 導入하여 評價函數를 設定하고 그 効果를 檢討하였고, 이 方法에 對한 非線形 設計上의 有用性을 提示하였고 또 數學的으로 明確히 表現키 어려운 要素를 包含한 경우 數値計算으로 處理하기 위한 simulation 問題에도 効果的인 方策임을 究明하였다.

制御方策 決定이 쉽게 되고 諸設計條件을 滿足하는 評價函數形式을 設定함으로서 最適制御理論에 依한 數學的處理 段階까지 定式化하기 어려운 制御設計 問題를 効果的으로 取扱할 수 있음을 究明하였다

參考文獻

1) A.M. Letor: Engineering Phylosophy of Optimu-

ization in the Problem of Analytical Design of Optimal Controllers: IFAC. pp 12A1～12A7, June (1966)

2) H. Chestnut: Survey Paper on System Engineering in Industry; ibid.

3) Norum, V.D.: Sub-interval Optimization Technique to Control System Design: Hughes Aerospace Tech. Res. Report. S.S.D. 50065R Aug(1960)

4) C.W. Merriam Ⅲ: Optinization Theory and the Design of Feedback Control systems; MacGraw Hill, (1964)

5) R. E. Kalman: Contributions to Theory of Optiomal Control, Bal. Sot. Mat. Mex. pp 102～120 (1960)

6) Z.V. Rekasius: Suboptimal Design of Intentionally Non-linear Controllers; IEEE Trans. Vol. A.C-11. No.4 pp 380～386, Oct (1964)

7) Schwartz L.: Near-Optimal Control of Non-Linear Dynamic S ystem with Quadratic Performance Index, Hughes As. Tech. Res. Peport. SSD6075R, Dec (1965)

8) A.K. Nath. & James, Burghar: Suboptimal Control for Quadratic Cost Function.

9) R. Bellman & S. Dreyfus: Applied Dynamic Programining., Princeton U. Press (1962)