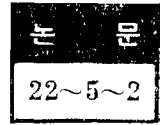


신호흐름 線圖에 의한 Linear Programming의 새 解法



A General Flow Graph Technique for the Solution of Linear Programming Systems

고 명 삼* · 홍 석 교**
(Myoung Sam Ko, Suk Kyo Hong)

Abstract

This paper deals with Linear Programming by Signal Flow Graph technique which is different from that of Mason and Coates.

The objective function is regarded as variable, and slack variable node, artificial variable node and objective function variable (constant) node are newly defined, which shows the process for optimization of solution very intuitively.

Also methods for solving L.P. and examples with subject to $Ax \leq b$, $Ax = b$ and $Ax \geq b$ are presented.

1. 序 論

Mason¹⁾²⁾에 의해 제시된 신호흐름線圖(Signal Flow Graph)는 발표된후 工學問題, 특히 시스템의 傳達函數 特性解析에 많은 도움을 주었다.

그 이유의 하나로 신호 흐름 線圖는, 연구하려는 시스템의 여러 變數사이의 關係를 直感的인 方法으로 나타낼수 있는 점을 들수있다. 또 Coates³⁾는 Mason의 公式를 약간 變形하여 一般 代數方程式의 解를 구하는 公式를 만들었고, Desoer⁴⁾에 의해 그 公式이 신호 흐름 線圖를 이용한 최적의 方法임이 證明되었다.

그후 많은 사람들이 여러 分野에 이 신호 흐름 線圖의 개념을 도입시키는데 성공하였다.

그 결과 制御工學은 물론 시스템 및 回路理論, 심지어는 經濟분야의 복잡한 문제를 다루는 일에도 신호 흐름 線圖는 利用되고 있다.⁵⁾⁶⁾⁷⁾

本 論文에서는 이 신호 흐름 線圖의 개념을 利用하여 等式 혹은 不等式의 제약조건을 만족하면서 目的函數의 값을 最大(혹은 最小)로 하는 線形計劃 問題⁸⁾⁹⁾의 解를 구해 보고자 한다.

2. 定義 및 問題設定

정의 1: 신호 흐름 線圖란 방정식 $\sum_{j=1}^m a_{ij}x_j = b_i$ ($i=1, \dots, m$)로 주어지는 시스템을 나타내는 方向을 가진 그래프이다. 여기서 각 常數 b_i 는 常數마디 (node)로 表示되고, 變數 x_j 는 變數마디로 表示된다. 또 만약 $a_{ij} \neq 0$ 인 경우 마디 x_j 에서 마디 b_i 로 향하는 이득 (gain) a_{ij} 를 갖는 方向을 가진 가지 (branch)가 存在한다. 각 마디는 '○'로 表記한다.

정의 2: 目的函數 變函 마디란 目的函數를 變數로 취급했을 경우 이에 對應되는 신호 흐름 線圖상의 마디를 의미하며, 目的函數 常數 마디란 目的函數의 값을 나타내는 常數 마디를 의미하고, 이들마디를 '●'로 表記한다.

정의 3: 슬랙변수 마디란 L.P.에서의 슬랙변수 (slack variable)에 대응되는 마디를 의미하여 '◇'로 表記한다.

정의 4: 人工變數 마디란 L.P.에서의 人工變數 (artificial variable)에 대응되는 마디를 의미하며 '□'로 表記한다.

정의 5: 基本마디란 나가는 가지가 단 한개이고 그 이득이 1인 마디를 의미하여, 여기에는 目的函數變

* 정회원 : 서울공대 전기공학과 부교수(공학박사)

** 정회원 : 서울대학교 대학원 전기공학과(박사과정)

數 마디, 슬랙변수 마디, 인공변수 마디등이 포함되며 기본마디가 모여 베이스 (basis)를 형성한다.

정의 6 : 가지 a_{ik} 에 대한 가지제거(branch reduction)란 마디 x_k 에서 나가는 가지중 a_{ik} 의 이득을 1로 하고 그외의 가지는 전부 제거하는 것을 의미한다. 이때 모든 상수 마디 b_i 및 가지이득 a_{ij} 는 각각 b'_i, a'_{ij} 로 바뀐다.

$$\begin{aligned} \text{단 } b'_i &= b_i - \frac{a_{ik}}{a_{ik}} b_i & i=1, \dots, m \quad (i \neq l) \\ b'_l &= \frac{b_l}{a_{lk}} \\ a'_{ij} &= a_{ij} - \frac{a_{ij}}{a_{ik}} a_{jk} & i=1, \dots, m \quad (i \neq l) \\ & & j=1, \dots, n \\ a'_{lj} &= \frac{a_{lj}}{a_{lk}} & j=1, \dots, n \end{aligned}$$

이 과정을 신호흐름 線圖로 表示하면 그림 1에서 그림 2로 된다.

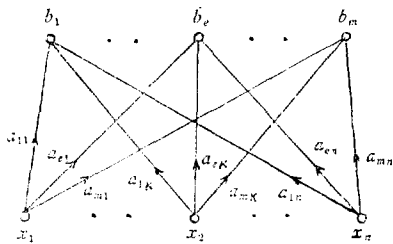


그림 1. 방정식 $\sum a_{ij} x_j = b_i$ 의 신호흐름 線圖
Fig. 1. Signal flow graph of eq. $\sum a_{ij} x_j = b_i$

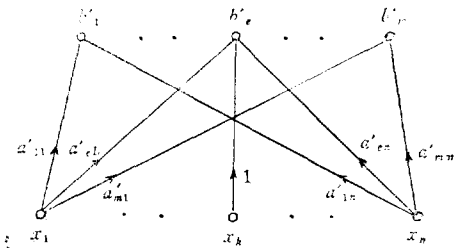


그림 2. 가지 a_{ik} 에 대한 가지제거
Fig. 2. Branch reduction of branch a_{ik}

문제 설정

제약조건이 $Ax \leq b, x \geq 0$

단

$$a = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}, c = [c_1 \dots c_n], x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

로 주어지는 경우 目的函數 cx 를 最大로 하는 x 를 구 하되

- a) $Ax \leq b$
- b) $Ax = b$
- c) $Ax \geq b$

의 세가지 경우로 나누어 取扱한다.

3. 本 論

等式 혹은 不等式으로 주어진 제약조건에 슬랙변수, 人工變數를 도입하고 目的函數를 變數化하여 초기 可能基底解(basic feasible solution)로 부터 최적해를 구하는 과정을 신호 흐름 線圖를 利用하여 구한다.

a) 제약조건이 $Ax \leq b$ 로 주어지는 경우 슬랙변수를 도입하고 目的函數를 變數化하면 주어진 선형계획 문제는 식(1)과 같이 되고 이것을 신호흐름 線圖로 表示하면 그림 3과 같이 된다.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} &= b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n &+ x_{n+m} = b_m \quad (1) \\ -c_1x_1 - \dots - c_nx_n &+ z = b_{m+1} (=0) \end{aligned}$$

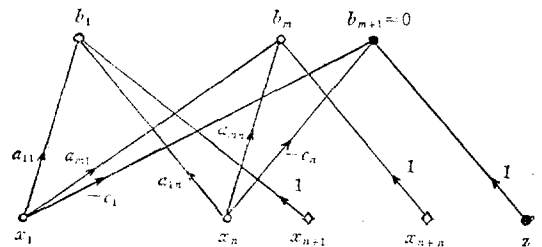


그림 3. 식(1)의 신호흐름 線圖
Fig. 3. Signal flow graph of eq. (1)

L.P.의 數學的 解法인 심플렉스법(simplex method)에서 새로 베이스가 될 변수와 베이스에서 나갈 변수를 정하는 과정은 目的函數 Z를 변수로 취급했을 경우에는 다음과 같이 된다.

처음에 베이스로 슬랙변수를 取하면 해는 $x_1 = \dots = x_n = 0, x_{n+1} = b_1, \dots, x_{n+m} = b_m$ 이고 Z의 값은 0이다. Z의 값을 증가시키기 위해 $x_1 \dots x_n$ 을 0에서 각각 증가시키면 계수 C_i 중 正의 수로 가장 큰 값에 대응하는 x_i 를 증가시키는 것이 Z의 값을 가장 크게 증가시킨다. 따라서 $C_i (i=1, \dots, n)$ 중 正의 수로 가장 큰 수를 C_k 라 하면 변수 x_k 는 새로 베이스가 된다.

변수 x_k 가 새 베이스가 되면 베이스에서 나오는 변수가 있어야 하는데 이 변수는 변수 x_k 의 값을 0에서 증가시킬때 제일 먼저 0이 되는 변수를 택한다. 다시 말하면

$$\min_i \frac{b_i}{a_{ik}} = \frac{b_l}{a_{lk}}$$

라 하면, b_i 을 값으로 갖는 변수가 베이스에서 나와야 한다. 이때 같은 값을 갖는 변수가 둘 이상 있으면 첨자가 적은 변수를 택한다.

이 과정을 신호 흐름 선도를 사용하여 나타내면 그림 3에서 새로 기본 마디가 될 마디는 목적함수 상수 마디 b_{m+1} 로 들어오는 가지중 負數로 가장 큰 이득을 갖는 가지가 연결된 변수 마디(x_k 마디)가 된다. 그리고 이 마디에서 나오는 가지중 가지이득과 상수 마디의 값과의 비 즉 b_i/a_{ik} 가 최소가 되는 상수 마디를 b_i 라 하면 이 b_i 마디와 연결된 기본 마디는 베이스에서 나와야 한다.

새로 베이스가 될 마디와 베이스에서 나갈 마디가 선정되었으면 새로 베이스가 될 마디를 기본마디로 만들어 주어야 한다.

즉 x_k 마디에서 나오는 가지중 이득이 a_{ik} 인 가지만 이득을 1로 하고, 다른 가지는 전부 제거하면 x_k 마디는 기본마디가 된다. 이 새로운 베이스를 만드는 과정은 바로 앞에서 정의한 가지 a_{ik} 에 대한 가지 제거가 된다.

가지제거를 하여 얻어진 새로운 가능기저해에서 목적함수 상수 마디로 들어오는 가지의 이득이 전부 正의 수가 되면 이 가능기저해는 최적해가 되고 負의 이득을 갖는 가지가 있으면 목적함수의 값이 더 커지는 새로운 가능기저해를 앞에서 제시한 방법으로 찾아 최적해를 구한다.

이상의 결과를 요약하면 신호흐름 선도에 의한 L.P.의 해법은 다음의 4단계로 나눌수 있다.

제 1 단계 : 새로 기본 마디가 될 마디 선정

목적함수 상수마디로 들어오는 가지중 이득이 負로 가장 큰 값을 갖는 가지가 나오는 마디(x_k 마디)

제 2 단계 : 베이스에서 나갈 마디선정.

x_k 마디에서 나가는 가지중

$$\min_i \frac{b_i}{a_{ik}} = \frac{b_r}{a_{rk}}, a_{rk} > 0$$

라 하면 b_r 마디와 연결된 기본마디 슬랙변수 마디일 경우 x_{n+r} 마디).

제 3 단계 : 가지 a_{rk} 에 대한 가지제거.

제 4 단계 : 새로운 해가 최적해인지 판별.

목적함수 상수 마디로 들어오는 가지의 이득이 전부 正의 수이면 최적해, 負의 수인 가지가 있으면 <제 1단계>부터 다시 최적해를 구한다.

예제 1. $Z=2x_1+3x_2$

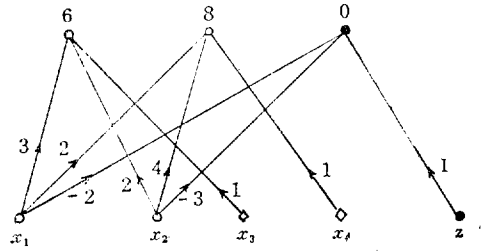
$$3x_1+2x_2 \leq 6$$

$$2x_1+4x_2 \leq 8$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

에서 Z 를 최대로 하는 x_1, x_2 를 구한다.

슬랙변수를 사용하여 신호흐름 선도로 나타내면 그림 4가 된다.



$$x_1=0 \quad x_2=0 \quad x_3=6 \quad x_4=8 \quad z=0$$

그림 4. 초기 가능기저해

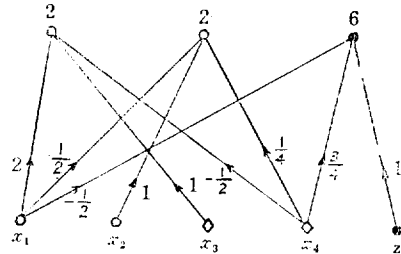
Fig. 4. Initial basic feasible solution

여기에 신호흐름 선도를 적용시키면

제 1 단계 : x_2 마디 ($-3 < -2$)

제 2 단계 : x_4 마디 ($8 < 6/2$)

제 3 단계 : 그림 5



$$x_1=0 \quad x_2=2 \quad x_3=2 \quad x_4=0 \quad z=6$$

그림 5. 둘째 가능기저해

Fig. 5. second basic feasible solution

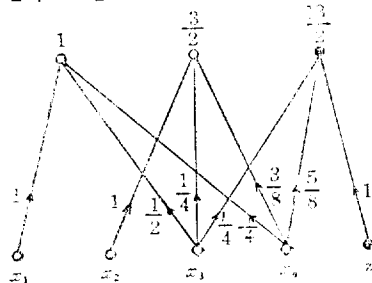
제 4 단계 : $-1/2 < 0$, 최적해가 아니므로.

제 1 단계부터 다시 행한다.

제 1 단계 : x_1 마디

제 2 단계 : x_3 마디

제 3 단계 : 그림 6



$$x_1=1 \quad x_2=\frac{3}{2} \quad x_3=0 \quad x_4=0 \quad z=\frac{13}{2}$$

그림 6. 최적해

Fig. 6. Optimum solution

제 4 단계 : 최적해

$$\text{해 : } x_1=1, x_2=\frac{3}{2}, Z=\frac{13}{2}$$

이상의 결과를 L.P.의 재래식해법의 하나인 기하학적 線圖에 의거 그해를 구하면

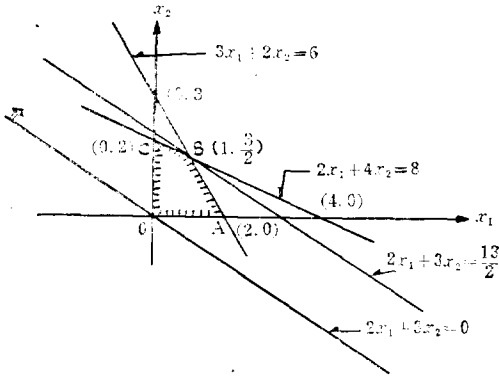


그림 7. 기하학적 그래프에 의한 해
Fig. 7. Solution by geometric graph

그림 7에서의 알수있는 바와같이 최적해는 B點 즉 $x_1=1, x_2=\frac{3}{2}$ 이고 이때의 목적함수 Z의 값은 $\frac{13}{2}$ 이 된다.

이 결과는 본 신호흐름 線圖에 의한 해법의 정당성을 입증한다. 특히 신호흐름 線圖에서 해가 처음 원점 0에서 C點, 그리고 B點으로 변하는 과정을 直視할 수 있음을 알 수 있다.

b) 제약조건이 $Ax=b$ 로 주어지는 경우 인공변수를 도입하고 목적함수를 변수화하면 제약조건은 식(2)와 같이 되고 신호흐름 線圖는 그림 8이 된다.

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + x_{n+1} &= b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n &+ x_{n+m} = b_m \end{aligned} \quad (2)$$

$$-c_1x_1 - \dots - c_nx_n + Mx_{n+1} + \dots + Mx_{n+m} + Z = b_{n+1} (=0)$$

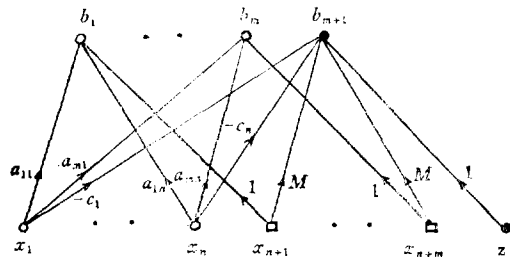
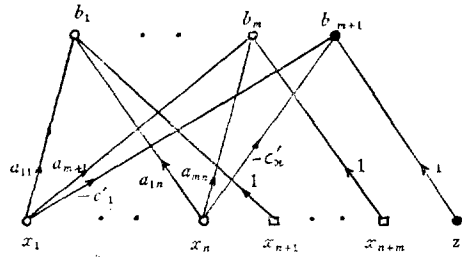


그림 8. 식(2)의 신호흐름 線圖
Fig. 8. Signal flow graph of eq. (2)

일차가능기저해를 인공변수로 잡기위해 인공변수 마디를 기본마디로 만들어주어야한다. 이득M을 갖는 가치를 전부제거하기 위해 각 인공변수 마디에서 목적함수 상수 마디로 나가는 가치에 가지제거를 적용하면

그림 9와 같이 된다.



단 $b'_{n+1} = -(b_1 + \dots + b_m)M$, $c'_i = c_i + (a_{i1} + \dots + a_{in})M$, $i=1, \dots, n$
그림 9. 일차 가능기저해
Fig. 9. Initial basic feasible solution

Z의 값을 최대로 하기 위해서는 우선 x_{n+1}, \dots, x_{n+m} 을 0으로 만들어야 한다. 다시 말하면 기본 마디인 인공변수 마디를 베이스스에서 전부 나가게 하면 된다. 이 인공변수 마디를 베이스스에서 제거시키는 과정은 $Ax \leq b$ 인 경우와 거의 같은 방법이고, 새로 기본마디가 될 마디선정 즉 제1단계에서 약간의 차이가 있다.

목적함수의 값에 M의項이 들어 있는 경우에 이 M을 제거하기 위해 제 1단계의 새로 기본마디가 될 마디를 목적함수 상수마디로 향하는 가지중 이득에 M의 항이 포함되고 그의 계수가 負數로 가장 큰 수를 갖는 가치가 나오는 마디로 선정해야한다.

또 인공변수마디는 베이스스에서 나올과 동시에 신호흐름 線圖에서 제거되고 모든 인공변수 마디가 제거 되면 (a)에서 설명한 신호흐름 線圖法에 의해 최적해를 구한다.

예제 2. $Z = x_1 + 2x_2 + 3x_3$
 $x_1 + x_2 + 3x_3 = 20$
 $3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 30$
 $x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0$

에서 Z를 최대로 하는 x_1, x_2, x_3 를 구한다.

인공변수를 사용하여 신호흐름 線圖로 나타내면 그림

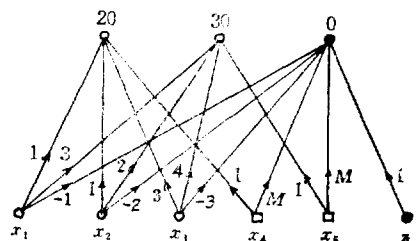
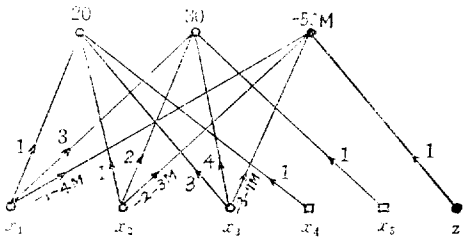


그림 10. 예제 2의 신호흐름 線圖
Fig. 10. Signal flow graph of example 2



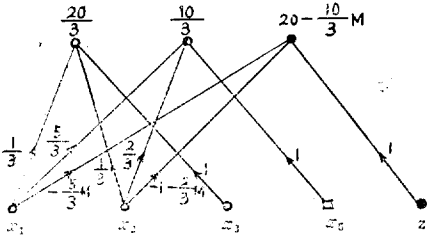
$x_1=0 \quad x_2=0 \quad x_3=0 \quad x_4=20 \quad x_5=30 \quad z=-50M$

그림 11. 일차 가능기저해
Fig. 11. Initial basic feasible solution

10가 되고 인공변수 마디를 기본마디로 만들면 그림 1과 같이 된다.

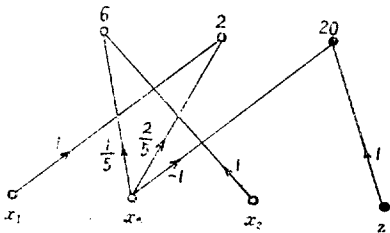
여기에 신호흐름 線圖法을 적용시켜 해를 구하면 그림 12, 그림 13, 그림 14에서 최적해를 얻는다.

해 : $x_1=0, \quad x_2=5, \quad x_3=5, \quad Z=25$



$x_1=0 \quad x_2=0 \quad x_3=\frac{20}{3} \quad x_4=0 \quad x_5=\frac{10}{3} \quad z=20-\frac{10}{3}M$

그림 12. 이차 가능기저해
Fig. 12. Second basic feasible solution

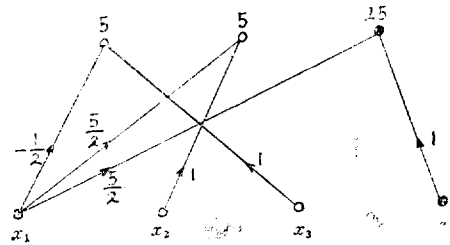


$x_1=2 \quad x_2=0 \quad x_3=6 \quad z=20$

그림 13. 삼차 가능기저해
Fig. 13. Third basic feasible solution

수학적 고찰 : 위 문제를 심플렉스법으로 푸는 경우의 기저해(basic solution)는

$x_1=0, \quad x_2=5, \quad x_3=5$ 와
 $x_1=2, \quad x_2=0, \quad x_3=6$ 및



$x_1=0 \quad x_2=5 \quad x_3=5 \quad z=25$

그림 14. 최적해
Fig. 14. Optimum solution

$x_1=-10, \quad x_2=30, \quad x_3=0$ 의 세가지 이다.
세가지 중 가능해(feasible solution)는 $(0, 5, 5)$ 와 $(2, 0, 6)$ 의 둘뿐이다.

이 둘중 $(0, 5, 5)$ 가 최적해가 되는 것은 Z의 값을 계산해 보면 곧 알 수 있다.

(c) 제약조건이 $Ax \geq b$ 로 주어지는 경우
슬랙변수를 도입하면

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n - x_{n+1} &= b_1 \\ \vdots & \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n - x_{n+m} &= b_m \\ -c_1x_1 - \dots - c_nx_n + Z &= b_{m+1} \end{aligned} \quad (3)$$

가 된다.

$b_i \quad (i=1, \dots, m)$ 중 최대치를 b_k 라 하면 식(3)은 다음의 식(4)로 고칠수 있다.

$$\begin{aligned} (a_{k1}-a_{11})x_1 + \dots + (a_{kn}-a_{1n})x_n + x_{n+1} - x_{n+k} &= b_k - b_1 \\ \vdots & \\ a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n - x_{n+k} &= b_k \\ (a_{k1}-a_{m1})x_1 + \dots + (a_{kn}-a_{mn})x_n - x_{n+k} + x_{n+m} &= b_k - b_m \\ -c_1x_1 - \dots - c_nx_n + Z &= b_{m+1} \end{aligned} \quad (4)$$

식(4)에서 K번째 식에 인공변수를 도입하면 식(5)가 되고 이것을 신호흐름 線圖로 나타내면 그림 15가 된다.

$$\begin{aligned} (a_{k1}-a_{11})x_1 + \dots + (a_{kn}-a_{1n})x_n + x_{n+1} - x_{n+k} &= b_k - b_1 \\ \vdots & \\ a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n - x_{n+k} + x_{n+m+1} &= b_k \\ (a_{k1}-a_{m1})x_1 + \dots + (a_{kn}-a_{mn})x_n - x_{n+k} + x_{n+m} &= b_k - b_m \\ -c_1x_1 - \dots - c_nx_n + Mx_{n+m+1} + Z &= b_{m+1} \end{aligned} \quad (5)$$

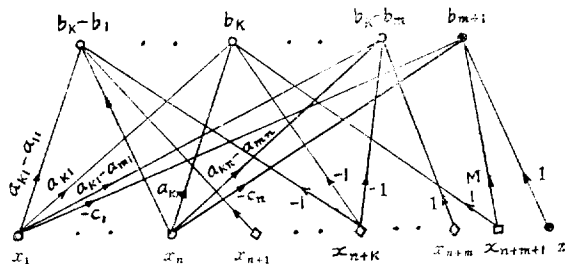


그림 15. 식(5)의 신호흐름 線圖
Fig. 15. Signal flow graph of eq. (5)

그림 15에서 슬랙변수 $x_{n+1} \dots x_{n+k-1}$, $x_{n+k+1}, \dots, x_{n+m}$ 와 인공변수 x_{n+m+1} 을 일차 가능기저해로 보고 앞의 (a), (b)에서 설명한 신호흐름 線圖法을 적용하여 최적해를 구한다.

예제 3. $Z = -6x_1 - 8x_2$
 $3x_1 + 2x_2 \geq 2$
 $2x_1 + 4x_2 \geq 3$
 $x_1, x_2 \geq 0$

에서 Z 를 최대로 하는 x_1, x_2 를 구한다.

슬랙변수 및 인공변수를 도입하면

$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 4x_2 &- x_4 = 3 \\ 6x_1 + 8x_2 &+ Z = 0 \end{aligned}$$

에서

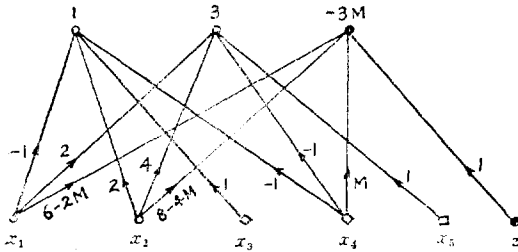
$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 &= 1 \\ 2x_1 + 4x_2 &- x_4 + x_5 = 3 \\ 6x_1 + 8x_2 &+ Mx_5 + Z = 0 \end{aligned}$$

가 된다.

여기에서 x_3, x_5, Z 를 일차가능기저해로 잡아 신호흐름 線圖로 나타내면 그림 16가 된다.

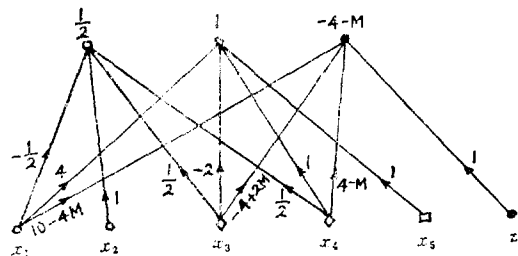
앞에서 기술한 신호흐름 線圖法을 적용하여 풀던 그림 17, 그림 18에서 최적해를 얻는다.

해 : $x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = \frac{5}{8} \quad Z = -\frac{13}{2}$



$x_1=0 \quad x_2=0 \quad x_3=1 \quad x_4=0 \quad x_5=3 \quad z=-3M$

그림 16. 일차 가능기저해
 Fig. 16. Initial basic feasible solution



$x_1=0 \quad x_2=\frac{1}{2} \quad x_3=0 \quad x_4=0 \quad x_5=1 \quad z=-4-M$

그림 17. 이차 가능기저해
 Fig. 17. Second basic feasible solution

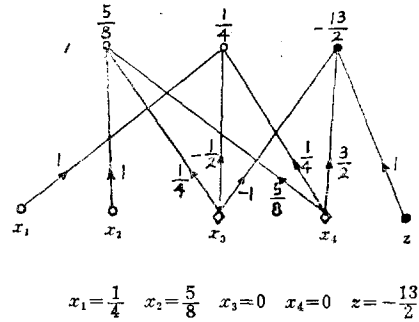


그림 18. 최적해
 Fig. 18. Optimum solution

한편 동일문제를 기하학적 線圖에 의거 그해를 구하면

$x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = \frac{5}{8} \quad Z = -\frac{13}{2}$

가 되어 신호흐름 線圖에 의한 方法과 동일한 결과와 되었음을 알 수 있다.

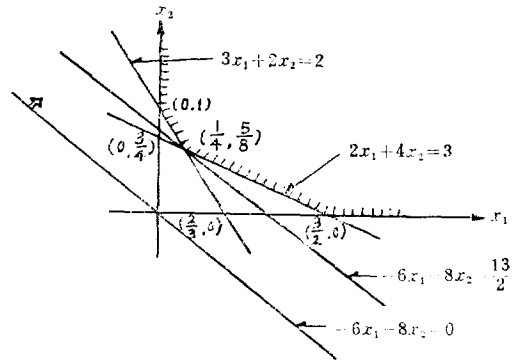


그림 19. 기하학적 그래프에 의한 해
 Fig. 19. Solution by geometric graph

4. 結 論

Mason, Coates 등이 제시한 신호흐름 線圖에 의한 대수방정식 해법을 선형계획문제해법에까지 그 이론을 확대발전시켰다.

즉 본 신호흐름 線圖法에서는 목적함수를 변수로 취급하였고, 새로운 베이스를 만드는 과정을 가지제거를 사용하여 간단히 하였으며, 기본마디를 정의하여 해가 최적화 되는 과정과 목적함수의 변화를 直視의으로 알아 볼 수 있게 하였다.

또 슬랙변수 마디, 인공변수 마디, 목적함수 상수마디 등 특이한 마디를 정의하여 신호흐름 線圖의 사용용 L.P.에까지 확장시켰다.

앞으로 整數線形計劃問題 등 線形計劃의 모든 문제에 이 신호흐름線圖의 기법을 적용시켜 해를 구하는 방법이 더욱 연구되면 신호흐름 線圖는 선형계획문제의 해결에 많은 도움을 주게 될 것이다.

참 고 문 헌

- 1) S.J. Mason, Feedback Theory-Some Properties of Signal-Flow Graphs, Proc. IRE, Vol41, pp. 1144~1156, September 1953.
- 2) S.J. Mason, Feedback Theory-Further Properties of Signal-Flow Graphs, Proc. IRE, Vol44, pp.920~926, July 1956.
- 3) C.L. Coates, Flow Graph Solutions of Linear Algebraic Equations, IRE Trans. on CT, Vol CT-6, pp.170~187, June 1959.
- 4) C.A. Desoer, The Optimum Formula for the Gain of a Flow Graph or a Simple Derivation

- of Coates' Formula, Proc. IRE, Vol48, pp.883~889, May 1960.
- 5) Y. Chow & E. Cassignol, Linenr Signal-Flow Graphs and Applications, John Wiley & Sons, Inc., 1962.
- 6) S.P. Chan & H.N. Mai, A Flow Graph Method for the Analysis of Linear Systems, IEEE Trans. on CT, Vol CT-14, pp.350~354, September 1967.
- 7) J.B. Compton & D.E. Moody, Flowgraphing Executive Problem, IEEE Trams on Engineering Management, VolME-12, pp.143~148, December 1965.
- 8) S.I. Gass, Linear Programming, McGraw-Hill Inc., 1969.
- 9) G. Hadly, Linear Programming, Addison-Wesley Publishing Company, Inc., 1962.
- 10) F.S. Hillier & G.J. Lieberman, Operations Research, Holden-Day, Inc., 1968.