논문 22~2~8

靜的系統의 統計的 퍼래미터 推定에 있어 最尤度法과 Bayes式方法과의 比較硏究

A Comparative Study of Maximum Likelihood Method with Bayesian Approach in Statistical Parameter Estimation of Static Systems

한 만 춘*, 최 경 삼**
(Man Choon Han, Kyong Sam Choi)

Abstract

The comparative study of maximum likelihood estimation with Bayesian approach was made by statistical & computational methods in center of *a priori* information of static systems and the effect of *a priori* information on the accuracy of the estimation was also analyzed.

Through the numerical computations of some examples by digital computer, we concluded that maximum likelihood method is better than Bayesian estimation except for almost certain *a priori* informations.

The study may therefore contribute in identification problems of dynamical systems connected with *a priori* informations.

1. 緖 論

간단한 on-off制御器는 물론이거니와 產業에 利用되는 計算機制御시스템, 社會의 制御機構, 그리고 數많은 制御루프(loop)를 가진 生體에 이르기 까지 一般的으로 制御動作에 있어서 어데인가 不確定한 共通要素를 各各 지니고 있다. 이 不確定한 要素는 各 系統에 있어서 豫測할 수 없는 外亂의 結果이거나, 또는 그 系統 內部로 부터 發生되는 固有한 것일 것이다. 이러한 不確定性은 饋還制御를 通하여 改善시킬 수 있으나 完全한 改善은 不可能함으로 어떤 限界가 存在한다. 그러나 商品의 熾熱한 競爭은 보다 良質의 商品을 要求하게 되고, 宇宙探索에 있어서는 더욱 高度의 精密度를 要하게 되므로 饋還制御만으로서는 完全한 成果를 期待하기 어렵게 되었다. 이러한 要求에 따라 不確定性의 限界를 더욱 改善하기 위하여 最適制御, 適應制御및 計算機制御의 分野가 연구개발되었다. 一般的으로 플랜트(plant)를 最適狀態로 制御하기에 앞서 그 系統에 대한 知識, 즉 그 프로세스(process)의 次元, 狀態 및 퍼래미터 等을 正確히 알 필요가 있다. 따라서 系統 同定*(system identification), 푸로세스의 모델化(process modeling) 및 프로세스의 퍼래미터推定 等이 必要하게 된다.

本 論文에서는 靜的線形系統(linear static systems)을 對象으로 統計的 方法으로써 尤度函數를 最大로 하는 最尤度推定法(maximum likelihood estimation)과 Bayes의 危險率函數를 最少로 하는 Bayes式推定法(Bayesian estimation)에 依한 퍼래미터推定値와 分散을 事前情報를 中心으로 比較檢討하고 特히 $\hat{x}$와 Λ_x를 정확히 모르는 境遇, 퍼래미터推定精度에 미치는 影

* 정회원 : 연세대학교 산업대학원장(당학회회장, 공학박사)
** 정회원 : 홍익대학교 공과대학조교수(공학박사)

* 識別, 認知등으로도 번역되나 本 論文에서는 同定이라 한다.

響을 解析하였다. 事前情報를 正確히 알 때에는 最尤度推定보다 Bayes式推定이 推定精度가 높으나, 事前情報를 잘 모를 때에는 어느 것이 推定精度가 높은가를 糾明하기가 매우 困難하다. 이 點에 着眼하여 事前情報가 正確하지 않을 때의 Bayes式推定과 最尤度推定의 精密度를 計數型電子計算機(CDC 3300)를 利用하여 數値計算을 하므로서 比較 解析하였다.

2. 퍼래미터의 推定의 基本理論

靜的系統(static system)의 퍼래미터推定法에는 Bayes式推定法, 最尤度推定法및 最少自乘推定法 等이 있으나 本稿에서는 Bayes式推定法과 最尤度推定法에 關하여 考察한다.

(1) Bayes式推定

未知의 퍼래미터 벡터 $\boldsymbol{x}$와 觀測벡터 $\boldsymbol{z}$의 關係(線形이던 非線形이던)가 設定되고 $\boldsymbol{z}$가 測定되었을 때, 어떤 評價基準에서 $\boldsymbol{x}$의 最適推定値를 求하는 問題를 生覺한다. 지금 $\boldsymbol{z}$가 測定되었을 때, $\boldsymbol{x}$의 條件附確率密度函數를 $P(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z})$라 하면 Bayes의 危險率函數[2),(3)] $B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})$는 式(1)과 같다.

$$B(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})=\iint_{-\infty}^{\infty} C(\boldsymbol{x},\hat{\boldsymbol{x}})\ P(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})d\boldsymbol{x}d\boldsymbol{z} \tag{1}$$

分散이 最少가 되도록 評價基準을 擇하면 評價函數는 式(2)와 같다.

$$C(\boldsymbol{x},\hat{\boldsymbol{x}})=||\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}}||^2 \tag{2}$$

따라서 評價函數가 式(2)인 때 Bayes危險率을 最少로 하는 것은 곧

$$J(x,\hat{x})=\int_{-\infty}^{\infty}(\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}})^T(\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}})P(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z})d\boldsymbol{x} \tag{3}$$

式(3)의 J를 最少로 하는 것과 같으므로 이 條件을 滿足하는 推定値는 式(4)와 같다.

$$\hat{\boldsymbol{x}}_1=\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{x}P(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z})d\boldsymbol{x} \tag{4}$$

여기서 $P(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z})$를 最大로 하는 즉, 事後密度函數(*a posteriori* density function)를 最大로 하는 $\hat{\boldsymbol{x}}_1$를 最大 아빠스떼리어리 推定値(maximum *a posteriori* estimate) 또는 最確推定値(most probable estimate)[(4)]라 한다.

考慮對象을 靜的線形系統으로 하면 $\boldsymbol{x}$와 $\boldsymbol{z}$와의 關係는

$$\boldsymbol{z}=H\boldsymbol{x}+\boldsymbol{n} \tag{5}$$

但, $\boldsymbol{z}$: M次元測定벡터

H : $M\times N$行列

$\boldsymbol{x}$: 推定할 N次元퍼래미터벡터

$\boldsymbol{n}$: M次元雜音벡터

式(7)과 같고, $\boldsymbol{n}$은

$$\left.\begin{aligned}E\{\boldsymbol{n}\}&=0\\ \mathrm{var}\{\boldsymbol{n}\}&=\Lambda_n\end{aligned}\right\} \tag{6}$$

式(6)의 統計的 性質을 갖는 正規性 랜덤變數이고, X는

$$\left.\begin{aligned}E\{\boldsymbol{x}\}&=\bar{x}\\ \mathrm{var}\{\boldsymbol{x}\}&=\Lambda_x\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

와 같이 事前分布가 正規性이며, $\boldsymbol{x}$와 $\boldsymbol{n}$은 確率的獨立(mutual stochastic independence)이고, $E\{\boldsymbol{z}\boldsymbol{z}^T\}$이 正則(nonsingular)이며 M≧N라 假定한다.

Bayes定理에 依하여

$$P(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z})=P(\boldsymbol{x})P(\boldsymbol{n})/P(\boldsymbol{z}) \tag{8}$$

이고, $\boldsymbol{x},\boldsymbol{n}$이 正規分布이므로 式(8)로부터 式(9)가 成立한다.

$$P(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z})=G\ \exp\left\{-\frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}}^*)^TP^{-1}(\boldsymbol{x}-\hat{\boldsymbol{x}}^*)\right\} \tag{9}$$

$$\text{但,}\quad G=\frac{1}{(2\pi)^{M/2}}\frac{|H\Lambda_xH^T+\Lambda_n|^{1/2}}{|\Lambda_x|^{1/2}|\Lambda_n|^{1/2}} \tag{10}$$

$$P=\Lambda_x^{-1}+H^T\Lambda_n^{-1}H)^{-1}$$

$$\hat{\boldsymbol{x}}^*=P(H^T\Lambda_n^{-1}\boldsymbol{z}+\Lambda_x^{-1}\bar{x}) \tag{11}$$

이 式에서 $P(\boldsymbol{x}|\boldsymbol{z})$를 最大로 하는 推定値는 $\hat{\boldsymbol{x}}^*$이고, 分散行列은 式(10)의 P임을 알 수 있다.

測定雜音이 白色性正規分布일 때 測定雜音의 分散은 式(12)와 같으므로

$$\Lambda_n=\sigma_n^2\ I_M \tag{12}$$

但, I_M : $M\times M$單位行列

Λ_{x1}, P^p를 式(13),(14)와 같이 定義하면

$$\Lambda_{x1}\triangleq\frac{1}{\sigma_n^2}\Lambda_x \tag{13}$$

$$P^p\triangleq\frac{1}{\sigma_n^2}P \tag{14}$$

式(10)과 (11)은 式(15)및 (16)과 같다.

$$\left.\begin{aligned}P^p&=(\Lambda_{X1}^{-1}+H^TH)^{-1}\\ \hat{\boldsymbol{x}}^*&=P^p(H^TZ+\Lambda_{X1}^{-1}\bar{x})\end{aligned}\right\} \tag{15}$$

$$\left.\begin{aligned}P^p&=\Lambda_{X1}-\Lambda_{X1}H^T(H\Lambda_{X1}H^T+I_M)^{-1}H\Lambda_{X1}\\ \hat{\boldsymbol{x}}^*&=\bar{x}+P^pH^T(Z-H\bar{x})\end{aligned}\right\} \tag{16}$$

一段推定問題를 多段推定問題(multi-stage estimation problem)로 擴張시키기 爲하여 k번 째의 測定벡터와 未知퍼래미터벡터와의 關係는 式(5)으로 부터 式(17)과 같다.

$$\boldsymbol{z}_k=\boldsymbol{h}_k\boldsymbol{x}+\boldsymbol{n}_k \tag{17}$$

$$\text{但,}\quad \boldsymbol{z}_k=[z_1,\cdots,z_k]^T,\ H_k=\begin{pmatrix}\boldsymbol{h}_1\\ \vdots\\ \boldsymbol{h}_k\end{pmatrix},\ \boldsymbol{n}_k=\begin{pmatrix}n_1\\ \vdots\\ n_k\end{pmatrix}$$

k段까지 測定한 데이터를 使用했을 때의 $\boldsymbol{x}$의 推定値와 分散을 各各 $\hat{x}^p_K$, P^p_K라하면 式(15)로 부터 式(18)이 된다.

$$\left.\begin{aligned}&\hat{x}^P_K(H^T_K z_K+\Lambda_{X1}^{-1}\bar{x})\\&P_K{}^P=(H^T{}_K H_K+\Lambda^{-1}{}_{X1})^{-1}\end{aligned}\right\}\tag{18}$$

$k+1$번째의 測定値를 알고 $\hat{x}^P{}_{K+1}$를 求하기 爲하여

$$H_{K+1}\triangleq\begin{pmatrix}H_K\\ \cdots\cdots\\ h^T{}_{K+1}\end{pmatrix}\qquad z_{K+1}\triangleq\begin{pmatrix}z_K\\ \cdots\cdots\\ z_{K+1}\end{pmatrix}$$

로 定義하여 整理하면 式(19)및 (20)이 成立한다.

$$P^P{}_{K+1}=P^P{}_K-P^P{}_K h_{K+1}(h^T{}_{K+1}P^P{}_K h_{K+1}+1)^{-1}h^T{}_{K+1}P^P{}_K\tag{19}$$

$$\hat{x}^P{}_{K+1}=\hat{x}^P{}_K+P_K h_{K+1}\ (h^T{}_{K+1}P^P{}_K h_{K+1}+1)^{-1}(z_{K+1}-h^T{}_{K+1}\hat{x}^P{}_K\tag{20}$$

(2) 最尤度推定

Bayes式推定은 事前情報로서 $P(x|z)$를 必要로 하였으나 $P(x)$를 모르는 境遇의 最適推定은 퍼래미터 x와 標本測定 z間의 函數, 즉 尤度函數(likelihood function)[5]

$$L(z,x)=P(z|x)\tag{21}$$

를 퍼래미터에 對하여 最大로 하는 x를 推定하는 것이다. 따라서

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial L}{\partial x}\Big|_{x=\hat{x}^L}=O\\&\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}<O\end{aligned}\right\}\tag{22}$$

式(22)를 滿足하는 $\hat{x}^L$를 最尤度推定値로 定義한다.

式(5)의 경우, $P(z|x)$는 Bayes定理에 依하여

$$P(z|x)=\frac{P(x,z)}{P(x)}\tag{23}$$

이고,

n이 正規分布이므로 式(23)은 式(24)와 같다.

$$P(z|x)=\frac{1}{(2\pi)^{M/2}|\Lambda_n|^{1/2}}\exp\left[-\frac{1}{2}Q(z,x)\right]\tag{24}$$

但, $Q(z,x)=(z-Hx)^T\Lambda^{-1}{}_n(z-Hx)$

$P(z|x)$를 最大化하는 것은 $Q(z,x)$를 最少化하는 것이므로 $\hat{x}^L$과 $\mathrm{Var}(\hat{x}^L)$은 式(25),(26)과 같다.

$$\hat{x}^L=(H^T\Lambda^{-1}{}_n H)^{-1}H^T\Lambda^{-1}{}_n z\tag{25}$$

$$\mathrm{var}\{\hat{x}^L\}=(H^T\Lambda_n{}^{-1}H)^{-1}\tag{26}$$

式(12)와같이 雜音의 分散이 白色性正規分布인 경우에 式(24)의 Q는 式(27)이 되므로

$$Q(z,x)=||z-Hx||^2\tag{27}$$

Q를 最少化하여 x의 값을 推定하는 問題는 測定誤差의 노름(norm)을 最少化하는 問題, 즉 最少自乘法에 依한 推定問題로 된다. 最少自乘法에 依한 最適推定値 $\hat{x}_3$의 分散은 式(25)과 (26)으로 부터 $\Lambda_n=I_M$인 境遇이므로 式(28)이 된다.

$$\left.\begin{aligned}&\hat{x}_3=(H^TH)^{-1}H^Tz\\&\mathrm{var}\{\hat{x}_3\}=(H^TH)^{-1}\end{aligned}\right\}\tag{28}$$

Bayes推定法과 比較하기 爲하여 式(13),(14)와 같이 $P^L{}_K=\sigma_n{}^{-2}\mathrm{var}\{\hat{x}^L\}$ 일 때 多段推定의 境遇, 推定値와 分散은 式(25)와 (26)으로 부터 式(29),(30)이 된다.

$$\hat{x}^L{}_K=P^L{}_K H^T{}_K Z_K\tag{29}$$

$$P^L{}_K=(H^T{}_K H_K)^{-1}\tag{30}$$

$k+1$段의 最尤度推定値를 誘導하기 爲하여, 式(30)으로 부터

$$P^L{}_{K+1}=[(P_K{}^L)^{-1}+h_{K+1}h^T{}_{K+1}]^{-1}$$

行列逆算補助定理에 따라

$$P^L{}_{K+1}=P^L{}_K-P^L{}_K h_{K+1}(h^T{}_{K+1}P^L{}_K h_{K+1}+1)^{-1}h^T{}_{K+1}P^L{}_K\tag{31}$$

이므로

$$\hat{x}^L{}_{K+1}=(H^T{}_{K+1}H_{K+1})^{-1}H^T{}_{K+1}z_{K+1}\tag{32}$$

式(32)에 式(31)을 代入하여 整理하면 式(33)이 된다.

$$\hat{x}^L{}_{K+1}=\hat{x}^L{}_K+P^L{}_K h_{K+1}(h^T{}_{K+1}P^L{}_K h_{K+1}+1)^{-1}(z_{K+1}-h^T{}_{K+1}\hat{x}^L{}_K\tag{33}$$

Bayes式推定에서 x에 對한 分散을 모를때 즉 $\Lambda^{-1}{}_X\to 0$인 경우 式(19)과 (20)은 式(31),(33)과 一致한다.

3. 事前情報가 推定精度에 미치는 影響

(1) 事前情報가 正確한 境遇

事前情報가 正確한 境遇, 式(19),(31)에 依하여 Bayes式推定이 最尤度推定보다 精密함을 알 수 있다. 또한 雜音에 對한 統計的 性質을 전혀 모를 때의 最少自乘推定보다 $P(n)$을 알 때의 最尤推定이보다 正確함을 式(26)과 (28)로 부터 알 수 있다. 그러나 雜音에 對한 分散이 單位行列인 境遇에는 最少自乘法에 依한 推定量과 最尤度推定量과 一致한다. 또한 Bayes式推定의 境遇, 推定量에 對한 分散을 全혀 모를 때는 最尤度推定의 結果와 같게된다. 要約하면 式(34)와 같이 쓸 수 있다.

$$\mathrm{Var}\{\hat{x}_3\}\geq \mathrm{Var}\{\hat{x}^L\}\geq \mathrm{Var}\{\hat{x}^P\}\tag{34}$$

(2) 事前情報가 不正確한 境遇

實地로 雜音에 對한 統計的 性質을 正確하게 아는것은 쉬운 일이 아니다. 本 節에서는 確實하지 않은 Λ_{X1}, $\bar{x}$ 및 Λ_n을 각각 Λ_{X0}, $\bar{x}_0$ 및 Λ_{n0}로 하여 Bayes式推定과 最尤度推定에서의 分散을 各各 解析하고 比較 檢討한다.

a. Bayes式推定과 最尤度推定과의 比較

事前情報가 不正確할 때의 Bayes式推定値를 $\bar{x}^{PC}$라 하면 式(11)로 부터

$$\hat{x}^{PC}=(H^T\Lambda^{-1}{}_{n0}H+\Lambda^{-1}{}_{X0})^{-1}(H^T\Lambda^{-1}{}_{n0}z+\Lambda^{-1}{}_{X0}\bar{x}_0)\tag{35}$$

인데

$$E\{\hat{x}^{PC}\}=\bar{x}+(H^T\Lambda_{n0}{}^{-1}H+\Lambda_{X0}{}^{-1})$$

$$\times \Lambda_{X0}^{-1}(\bar{x}_0-\bar{x}) \tag{36}$$

이므로 事前情報가 不正確할 때의 Bayes式推定値 $\hat{x}^{PC}$는 $\Lambda_{X_0}\rightarrow\infty$이거나 $\bar{x}_0=\bar{x}$인 境遇에 限하여 不偏推定量이 되고, 一般的으로는 不偏推定이 아니다. 이 때 誤差는

$$x-\hat{x}^{PC}=(H^T\Lambda^{-1}{}_{n_0}H+\Lambda^{-1}{}_{X_0})^{-1}[\Lambda^{-1}{}_{X_0}(x-\bar{x}_0) -H^T\Lambda^{-1}{}_{n_0}n] \tag{37}$$

이므로 $\hat{x}^{PC}$의 自乘平均誤差 $M\{\hat{x}^{PC}\}$는 式(38)과 같다.

$$M\{\hat{x}^{PC}\}=P^{PC}\{\Lambda_{X_0}^{-1}[\Lambda_X+(\bar{x}_0-\bar{x})(\bar{x}_0-\bar{x})^T] \Lambda_{X_0}^{-1}+H^T\Lambda^{-1}{}_{n_0}\Lambda_n\Lambda^{-1}{}_{n_0}H\}P^{PC} \tag{38}$$

但, $P^{PC}=(H^T\Lambda_{n_0}^{-1}H+\Lambda_{X0}^{-1})^{-1}$

따라서 $\hat{x}^{PC}$의 分散은 式(39)가 된다.

$$\mathrm{var}\{\hat{x}^{PC}\}=P^{PC}[\Lambda_{X0}^{-1}\Lambda_X\Lambda^{-1}{}_{X0} +H^T\Lambda_{n_0}\Lambda_n\Lambda_{n_0}^{-1}H]P^{PC} \tag{39}$$

式(10)과 式(38)을 比較해 보면 $\Lambda_n=\Lambda_{n_0}$, $\Lambda_X=\Lambda_{X_0}$ 및 $\bar{x}=\bar{x}_0$일 때에는 같고, 그 外에는 恒常 $\hat{x}^{PC}$에 對한 分散이 크다.

$$\mathrm{var}\{\hat{x}^{PC}\}\geqq\mathrm{var}\{\hat{x}^P\} \tag{40}$$

雜音에 對한 確率分佈函數가 正確지 않을 때의 最尤度推定値를 $\hat{x}^{LC}$라 하면 式(25)로 부터 式(41)이 된다.

$$\mathrm{var}\{\hat{x}^{LC}\}=(H^T\Lambda_{n_0}^{-1}H)^{-1}H^T\Lambda_{n_0}^{-1}\Lambda_n \Lambda_{n_0}^{-1}H(H^T\Lambda_{n_0}^{-1}H)^{-1} \tag{41}$$

$\Lambda_n=\Lambda_{n_0}$인 때 式(41)은 式(25)와 같고 그 外는 $\hat{x}^{LC}$에 對한 分散이 크다.

$$\mathrm{var}\{\hat{x}^{LC}\}\geqq\mathrm{var}\{\hat{x}^L\} \tag{42}$$

最尤度推定은 $E\{\hat{x}^L\}=\bar{x}$이므로 恒常 不偏推定이나, Bayes式推定은 $\bar{x}=\bar{x}_0$, 또는 $\Lambda_X\rightarrow\infty$인 條件에 限해서 不偏推定임을 알 수 있다.

式(34),(40),(42)를 通하여 不分明한 것은 $\mathrm{var}\{\hat{x}^L\}$와 $\mathrm{var}\{\hat{x}^{PC}\}$의 關係이다.

$$\mathrm{var}\{\hat{x}^L\}\geqq\mathrm{var}\{\hat{x}^P\}\leqq\mathrm{var}\{\hat{x}^{PC}\} \tag{43}$$

式(38)은 $\Lambda_X=\Lambda_{X_0}\rightarrow\infty$이고, $\Lambda_n=\Lambda_{n_0}$일때에 限하여 式(26)과 一致한다. 그러나 이 外의 一般的인 境遇에는 解析的으로 규명하기 곤란하다.

b. $\hat{x}^L{}_{K+1}$과 $\hat{x}^{PC}{}_{K+1}$의 比較解析

推定値에 대한 事前情報가 不正確할 때의 Bayes式推定値는 3개의 變數를 내포함으로 모든 경우에 대하여 最尤度推定値와 일반적인 比較解析은 어려운 문제이다.

본 논문에서는 計數型電子計算器를 이용한 數値計算을 通하여 事前情報가 不定確한 경우의 Bayes式推定法과 最尤度推定法을 비교하기 위하여 n을 白色正規性雜音, $\Lambda_{n_0}=\Lambda_n$으로 가정하고, 推定値와 分散을 Λ_n으로 各各 規準化한다. 이 問題를 다음의 두 가지 境遇로 나누어 생각할 수 있다.

① $\bar{x}$는 알고 分散을 모르는 境遇

② $\bar{x}$와 Λ_X를 둘 다 모르는 境遇

①은 不偏推定의 境遇로서 式(12)와 같이 Λ_{X_0}를 表示할 수 있다.

$$\Lambda_{X0}=B^2I_N \tag{44}$$

따라서 B를 任意로 變化시켜 $\hat{x}^{PC}{}_K$와 $\hat{x}^L{}_K$을 比較한다.

②의 境遇에는 不正確한 事前平均値 $\bar{x}_{01}$, $\bar{x}_{02}$, $\cdots\bar{x}_{0N}$, 各 誤差가 B로 表示될 때 式(45)로 쓸 수 있음으로 역시 B를 파래미터로하여 推定한 $\hat{x}^{PC}{}_K$와 $\hat{x}^L{}_K$를 比較한다. 比較方法은 自乘誤差行行,

$$\left.\begin{aligned}\bar{x}^T{}_0&=[\bar{x}_1+B,\cdots\bar{x}_N+B]\\ \Lambda_{X0}&=B^2I_N\end{aligned}\right\} \tag{45}$$

$$Ce\triangleq(x-\hat{x})(x-\hat{x})_T \tag{46}$$

ce의 트레이스(trace)로서 比較한다. 여기서 $\hat{x}^{PC}{}_K$의 多段推定問題는 x_0를 變化시켜 $\hat{x}^{PC}{}_{K+1}$을 反復計算하는 문제이므로 式(18),(19)및 (20)으로 부터 다음과 같다.

$$\left.\begin{aligned}\hat{x}^{PC}{}_{K+1}&=\hat{x}^{PC}+P^{PC}{}_Rh_{R+1}(h_{K+1}{}^TP^{PC}{}_Kh_{K+1}\\&\quad+1)^{-1}(z_{K+1}-h^T{}_{K+1}\hat{x}^{PC}{}_K)\\ P^{PC}{}_{K+1}&=P^{PC}{}_K-P^{PC}{}_Kh_{K+1}{}^TP^{PC}{}_Kh_{K+1}\\&\quad+1)^{-1}h_{K+1}{}^TP^{PC}{}_K\hat{x}^{PC}{}_K=P^{PC}{}_K(H^T{}_Kz_K\\&\quad+\Lambda^{-1}{}_{X0}\bar{x}_0\end{aligned}\right\} \tag{47}$$

$$P^{PC}{}_K=(H^T{}_KH_K+\Lambda^{-1}{}_{X0})^{-1}$$

4. 例　　題

靜的線形系統의 파래미터推定 例로서 다음과 같은 離散値形觀測方程式을 生覺한다.

$$z_K=h^TX+n_k \tag{48}$$

但, $h=[k,1]$

$X=[b_1,b_2]$

파래미터의 眞値를 各各 $b_1=1.5$, $b_2=2.5$로 하고 時間 k가 變化할 때 이에 對應되는 z_K값을 測定하여 z_K로 부터 x를 推定한다. 本 例題에서는 x가 2次元벡터이므로 H_2는 $\left[\begin{smallmatrix}1&1\\1&2\end{smallmatrix}\right]$인 2×2行列이 되고 n_k를 正規性 雜音

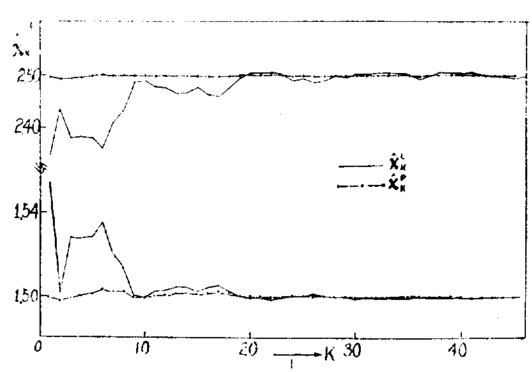

그림 1. $\hat{x}^L{}_K$와 $\hat{x}^P{}_K$의 비교곡선

Fig. 1. Curves of $\hat{x}^L{}_K$ and $\hat{x}^P{}_K$

으로 하여 $\Lambda_n=(0.1)^2I_2$로서 比較的 强한 雜音이 隨伴되었을 때 推定値의 事前分散과 平均이 各各 $\Lambda_X=(0.05)^2I_2$, $x=[1.5, 2.5]^T$인 境遇, 먼저 事前情報가 正確할 때의 最尤度推定과 Bayes式推定을 相互比較하기 爲하여 式(33),(20)을 使用해서 k를 50까지 反復시켜 計數型電子計算機로 x를 推定한 結果는 그림 1과 같다.

事前情報를 正確히 모르는 境遇로서 ①의 境遇에는 B=0.05~0.95까지, ②의 境遇에는 $B=0.0001\sim1.0$까지 增加시켜 X_0와 Λ_{X0}의 여러가지 값에 대하여 式(47)로 부터 $\hat{x}^{PC}_{K+1}$를, 式(33)으로 부터 $\hat{x}^{L}_{k+1}$을 各各 50번 反復計算하고, Ce의 트레이스 tr(Ce)를 最尤度推定과 Bayes式推定에 대하여 各各 計算해서 比較하도록 프로그램을 作成하였다. 本 프로그램은 主 프로그램과 行列演算을 爲한 9個의 副프로그램으로 構成하였으며 flow chart는 그림 2와 같다.

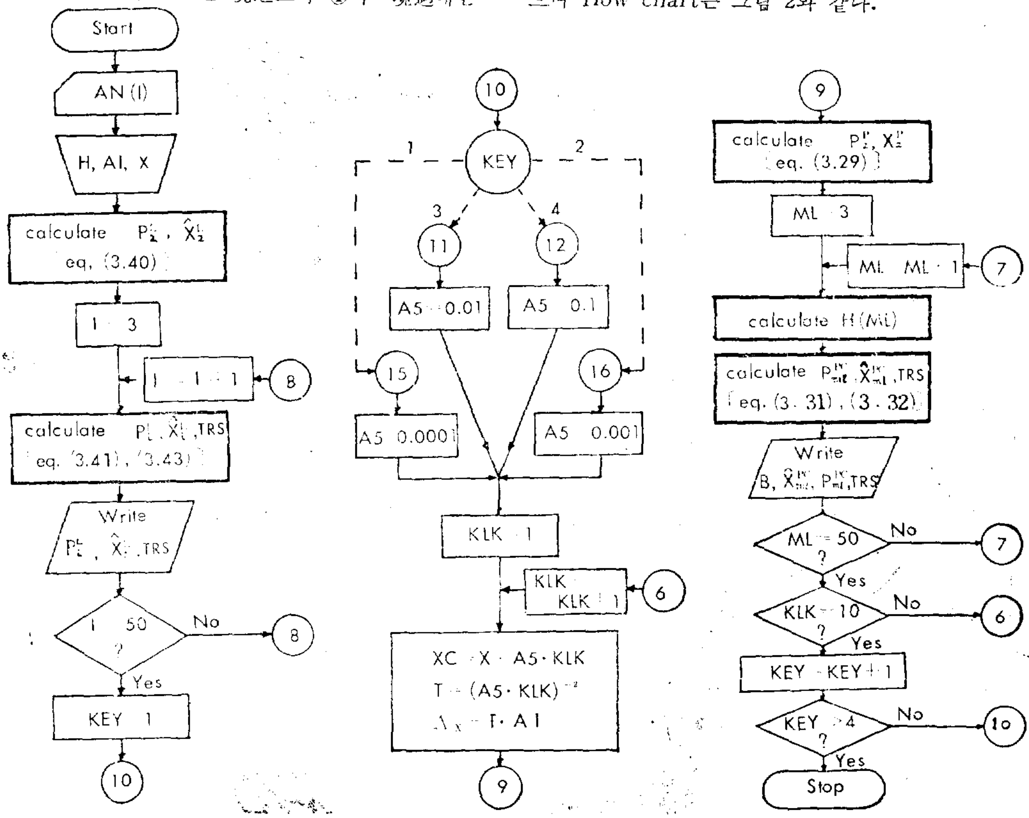

그림 2. 靜的線形系統의 $\hat{x}^L_K$과 $\hat{x}^{PC}_K$를 비교하기 위한 flow chart

Fig. 2. Flow chart for the computation of $\hat{x}^L_K$ & $\hat{x}^{PC}_K$ in the 2nd order linear static system.

①의 境遇 計算한 結果는 表 1과 같고, ②의 境遇에 計算한 Bayes式推定 結果를 最尤度推定과 比較하여 그림 3및 4에 圖示하였다.

表 1. $\hat{x}^L_k$와 事前平均이 旣知일때의 $\hat{x}^{PC}_k$

		x₁(1)	x₁(50)	x₂(1)	x₂(50)
最尤度推定値		1.5366	1.4994	2.3707	2.5085
Bayes式推定値	B	x₁(1)	x₁(50)	x₂(1)	x₂(50)
	0.05	1.4994	1.4996	2.4996	2.5002
	0.15	1.4960	1.4996	2.4970	2.5018
	0.25	1.4912	1.4995	2.4931	2.5036
	0.35	1.4868	1.4995	2.4892	2.5050
	0.45	1.4837	1.4995	2.4855	2.5060

	0.55	1.4817	1.4994	2.4822	2.5066
	0.65	1.4806	1.4994	2.4792	2.5071
	0.75	1.4802	1.4994	2.4762	2.5074
	0.85	1.4803	1.4994	2.4733	2.5076
	0.95	1.4808	1.4994	2.4705	2.5078

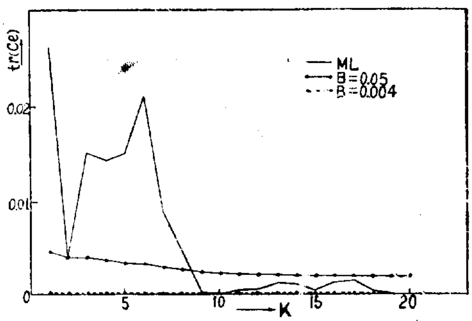

그림 3. tr (Ce)曲線
Fig. 3. Curves of tr (Ce)

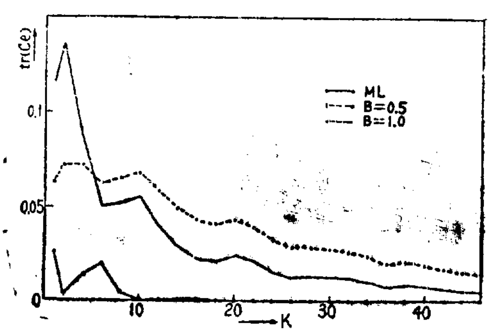

그림 4. tr (Ce) 線曲
Fig. 4. Curves of tr (Ce)

表 1에서와 같이 事前平均을 알고 그 分散을 모르는 境遇는 最尤度法보다 Bayes 式推定法이 良好함을 볼 수 있다. 그러나 $\bar{x}$와 Λ_X를 다 모르는 境遇의 $\bar{x}_0$와 Λ_{X0}를 式(45)로 表示하여 B를 0.0001~1.0까지 變化시켜 $\bar{x}_0$와 Λ_{X0}에 對한 $\hat{x}^{PC}_K$와 tr(Ce)를 反復計算한 結果, B가 0.0001~0.002까지의 $\hat{x}^{PC}_K$는 $\hat{x}^L_K$ 보다 精密히 推定되었고, B가 0.01 以上으로 增加하면 分明히 最尤度推定値가 良好하였다. B가 0.003~0.009 사이에서는 $\hat{x}^{PC}_K$와 $\hat{x}^L_K$이 不規則하여 判別할 수 없었다. 그 理由는 $\Lambda^{-1}_n=(0.1)^{-2}I_2$으로 比較的 測定雜音을 强하게 주었음으로 z에 雜音이 많이 包含되었기 때문이다.

이러한 數値計算例를 通하여 事前情報가 不正確한 境遇, Bayes式推定値 $\hat{x}^{PC}_K$가 $\hat{x}^L_K$보다 良好하려면 $\bar{x}_0$를 約 0.1% 以內로 正確히 알아야 함을 알았다. 偏差區間에 臨界區間을 內包시키면 約 0.5% 以內가 되어야 할 것이다.

4. 結　　論

本 論文에서는 推定値에 對한 事前情報를 中心으로 Bayes式推定法과 最尤度推定法을 解析하고 特히 事前情報가 不正確한 境遇에 計數型電子計算機를 利用한 數値解析을 通하여 이 두 推定法을 比較研究하였다.

事前平均과 分散을 모르는 境遇의 數値計算例에서 $B=0.002$ 以下에서만 $\hat{x}^{PC}$가 $\hat{x}^L$보다 正確히 推定된 點으로 보아 $\bar{x}_0$가 相當히 正確하지 않으면 오히려 最尤度推定法이 Bayes式推定法보다 良好하다는 것을 알 수 있었다.

그러므로 推定値의 事前平均과 分散이 比較的 正確하지 못할 때에는 Bayes式推定法보다 最尤度推定法을 使用하는 것이 좋다.

참 고 문 헌

1) R. Deutsch: Estimation Theory Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1965

2) D. Middleton R. Esposito: Simultaneous Optimum Detection & Estimation of Signals in Noise Trans. IEEE, Vol. IT-14, No.3, 1968, 434/444

3) I.J. Good: The Estimation of Probabilities: An Essay on Modern Bayesian Methods The M.I.T. Press, Cambridge, 1965

4) Y.C.Ho C. K. Lee ; A Bayesian Approach to Problems in Stochastic Estionmation & Control Trans. IEEE, Vol. AC—9, 1964, 333—39

5) S.S. Wilks ; Mathematical Statistics, 2nd Ed. Wiley & Sons, New York, 1962