Bull. Korean Math. Soc.
Vol. 9 (1972), pp. 101-109

Couple Category에 關하여

任 昌 求

1. 序 言

1966年에 J.R. Isbell 教授가 category의 構造 [1]에 關한 論文을 發表한 것을 契機로 이 方面의 硏究가 現在 活潑히 進行되고 있다. category의 完備性 (completeness) 및 完備化 (completion)에 關한 理論이 category의 構造論의 主軸이 되고 있다.

Category의 完備化의 理論에 관한 많은 結果가 [1], [3], [4], [5]에 發表되어 있으며 이 完備性과 完備化의 硏究에 많이 活用되고있는 couple category 論은 J.R. Isbell [1] 教授가 2節에서 說明한 grounding 및 cogrounding과 그들의 conjugate 사이의 關係를 硏究하는 데서 부터 始作되었으며 그에 대한 硏究結果가 [1], [2]에 斷片的으로 紹介되어 있다.

本論文에서 定理 1을 證明하고 couple category의 基本性質에 관한 定理를 體系的으로 整理하고 證明하였으며 아울러 J.R. Isbell 教授가 提起한 未解決問題를 紹介하고자 한다.

여기서 ∞를 uncountable strongly inaccessible cardinal number라 하고 集合 S의 濃度를 $|S|$로 表示할 때 $|S|<\infty$, $|S|=\infty$, $|S|>\infty$에 따라 各各 S를 *small*, *large*, *extraordinary* 集合이라 한다.

모든 集合을 對象(object)으로 하고 그들 사이의 寫像을 射(morphism)로 하는 集合들의 category를 **Sets**로 表示하고 모든 small 集合을 對象으로 하고 역시 그들 사이의 寫像을 射로 한 category를 **S**로 表示한다.

2. Coupling과 Couple

Category **C**는 모든 射의 集合이 small 일때 *small category*라 하고 또 **C**가 많아도 ∞個의 對象을 갖고 任意의 두개의 對象사이의 射의 集合(즉 Homo-Set)이 small이면 **C**를 *ordinay category*라 한다. 특히 Homo-Set 만이 small 일때 **C**를 *legitimate category*라 한다.

C의 對象들의 class를 $|\mathbf{C}|$로 **C**의 dual category를 $\mathbf{C}^*$로 各各 表示한다.

反變函手(contravariant functor) $G:\mathbf{D}\to\mathbf{Sets}$에 대하여 共變函手(covariant functor) $G^*: \mathbf{D}^* \to \mathbf{Sets}$ 가

$$G^*(X) = \mathrm{Nat}(G, h_X),$$

(但 $h^X = \mathrm{Hom}_C(X, -)$, $h_X = \mathrm{Hom}_C(-, X)$ 이며 $\mathrm{Nat}(G, h_X)$ 는 函手 G 에서 h_X 까지의 모든 自然變換 (Natural transformation)의 集合이다)

이고 $\mathbf{C}$ 에서의 射 $f: X \to Y$ 와 $\varphi \in \mathrm{Nat}(G, h_X)$ 에 대하여

$$[G^*(f)](\varphi) = h_{(f)} \cdot \varphi \quad (\text{但 } h_{(f)}: h_X \to h_Y)$$

를 만족할 때 G^*를 G의 共軛函手 (conjugate functor)라 한다.

函手 $G: \mathbf{C}^* \to \mathbf{Sets}(\mathbf{S})$ 및 $H: \mathbf{C} \to \mathbf{Sets}(\mathbf{S})$ 를 各各 $\mathbf{C}$ 의 *cogrounding* (*ordinary grounding*), *grounding* (*ordinary grounding*)이라 한다.

$\mathbf{C}$ 가 small category 일 때 모든 cogrounding (ordinary cogrounding)을 對象으로 하고 그들 사이의 自然變換을 射로 가지는 category 를 $\mathbf{Cat}(\mathbf{C}^*, \mathbf{Sets})$ $(\mathbf{Cat}(\mathbf{C}^*, \mathbf{S}))$ 로 表示하고 雙對的으로 모든 grounding (ordinary grounding) 들의 category 를 $\mathbf{Cat}(\mathbf{C}, \mathbf{Sets})$ $(\mathbf{Cat}(\mathbf{C}, \mathbf{S}))$ 로 表示한다.

(定義 1) $\mathbf{C}$ 의 cogrounding (ordinary cogrounding) G 와 grounding (ordinary grounding) H 에 對하여 函數

$$m: \bigcup_{(X,Y) \in |C| \times |C|} G(X) \times H(Y) \to \bigcup_{(X,Y) \in |C| \times |C|} \mathrm{Hom}_C(X, Y)$$

이 $\mathbf{C}$ 에서의 射 $g: W \to X$, $h: Y \to Z$ 및 $(p, q) \in G(X) \times H(Y)$ 에 대하여

$$m(p, q) \in \mathrm{Hom}_C(X, Y)$$

이고

$$m(G(g)(p), H(h)(g)) = h \cdot m(p, q) \cdot g$$

를 만족할 때 이 m 을 G 와 H 의 *coupling* 이라 한다.

(補助定理 1) Category $\mathbf{C}$ 의 ordinary cogrounding G 와 ordinary grounding H 의 coupling m 과 $q \in H(Y)$, $p \in G(X)$ 에 대하여 關係式

$$[\mu_Y(q)]_X(p) = m(p, q) \tag{1}$$

에 依해서 決定되는 自然變換 $\mu: H \to G^*$ 사이에 1對1對應이 존재 한다. 또 雙對的으로 m 과 $['\mu_X(p)]_Y(q) = m(p, q)$ 에 依하여 決定되는 自然變換 $'\mu: G \to H^*$ 사이에 1對1對應이 존재한다.

〔證明〕 G 와 H 의 두개의 *coupling* m, m' 에 대하여 주어진 關係式 (1)을 만족하는 自然變換를 각각 μ, $\bar{\mu}$ 라 하고 $\mu = \bar{\mu}$ 라 하면 明白히 $m = m'$ 이다.

한편 任意의 自然變換 $\nu: H \to G^*$ 와 $p \in G(X)$, $q \in H(Y)$ 및 $f: W \to X(\in \mathbf{C})$ $g: Y \to Z(\in \mathbf{C})$ 에 대하여

$$n: \bigcup_{(X,Y)} G(X) \times H(Y) \to \bigcup_{(X,Y)} \mathrm{Hom}_C(X, Y)$$

이고

$$n(p, q) = [\nu_Y(q)]_X(p)$$

라 하자. 그러면

$$\begin{array}{ccccc} G(W) & \xrightarrow{[\nu_Y(q)]_W} & h_Y(W) & \xrightarrow{[h_{(g)}]_W} & h_Z(W) \\ \uparrow G(f) & & \uparrow h_Y(f) & & \uparrow h_Z(f) \\ G(X) & \xrightarrow{[\nu_Y(q)]_X} & h_Y(X) & \xrightarrow{[h_{(g)}]_X} & h_Z(X) \end{array} \qquad \text{(可換)}$$

$$\begin{array}{ccc} H(Y) & \xrightarrow{\nu_Y} & G^*(Y) = \mathrm{Nat}(G, h_Y) \\ H(g)\downarrow & & \downarrow G^*(g) \\ H(Z) & \xrightarrow[\nu_Z]{} & G^*(Z) = \mathrm{Nat}(G, h_Z) \end{array} \qquad \text{(可換)}$$

$$\begin{aligned} n(G(f)(p), H(g)(q)) &= [\nu_Z(H(g)(q))]_W(G(f)(p)) \\ &= [h_{(g)}\nu_Y(q)]_W(G(f)(p)) \\ &= h_Z(f)\cdot[h_{(g)}]_X\cdot\{[\nu_Y(q)]_X(p)\} \\ &= h_Z(f)\{g\cdot n(p,q)\} \\ &= g\cdot n(p,q)\cdot f \end{aligned}$$

따라서 n은 ν에 對應하는 G와 H의 coupling이다. 이리하여 m과 μ 사이에 1對1 關係가 있음을 알 수 있다. 나머지 部分은 雙對的으로 證明된다.

(定義 2) Category **C**의 ordinary cogrounding $'F$, ordinary grounding F' 및 $'F$와 F'의 coupling m_F로된 작 $('F, F', m_F)$를 **C** 上의 *grounding couple*이라 한다.

(例 1) $p \in h_X(W)$, $q \in h^X(Z)$에 대하여 $m(p,q) = qp$라 할 때 $\overline{X} = (h_X, h^X, m)$는 한 **C**上의 grounding couple이다. 이것을 *principal couple* 이라 한다.

(例 2) $G: \mathbf{D}^* \to \mathbf{S}$와 G의 共範函手 $G^*: \mathbf{D} \to \mathbf{S}$ 및 $p \in G(X)$, $q \in G^*(Y)$에 대하여 $m(pq) = q_X(p)$라 할때 (G, G^*, m)도 **C**上의 grounding couple 이다.

(定義 3) 두개의 **C** 上의 grounding couple $F = ('F, F', m_F)$와 $J = ('J, J', m_J)$에 對하여 自然變換 $'\eta: 'F \to 'J$와 $\eta': J' \to F'$이 다음 關係式

$$m_J(('\eta_X(p), q)) = m_F((p, \eta'_Y(q))) \quad (\text{但 } p \in 'F(X),\ q \in J'(Y))$$

를 만족 할때 이들의 작 $('\eta, \eta')$를 *conjoint transformation* 이라 한다. $\eta = ('\eta, \eta')$를 F에서 J 까지의 射로 정하고 $\eta: F \to J$로 表示한다. 또 $K = ('K, K'\ m_K)$와 $\xi = ('\xi, \xi'): J \to K$에 대하여 $\xi\cdot\eta = ('\xi\cdot'\eta, \eta'\cdot\xi')$를 η와 ξ의 *composition* 으로 정한다.

(例 3) **C** 上의 두개의 principal couple $\overline{C} = (h_C, h^C, m_C)$와 $\overline{C'} = (h_{C'}, h^{C'}, m_{c'})$ 및 自然變換 $h_{(f)}: h_C \to h_{C'}$, $h^{(f)}: h^{C'} \to h^C$에 대하여 (但 $f: C \to C' \in \mathbf{C}$) $p \in h_C(X)$, $q \in h^{C'}(Y)$라 할때

$$m_{C'}([h_{(f)}]_X(p), q) = m_{C'}(f\cdot p, q) = q\cdot(f\cdot p)$$
$$m_C(p, [h^{(f)}]_Y(q)) = m_C(p, qf) = (qf)\cdot p$$

이므로 $(h_{(f)}, h^{(f)}) : \bar{C}\to\bar{C}'$는 conjoint transformation 이다.

3. Couple Category

Category **C** 上의 grounding couple $F=('F, F', m_F)$는 $\mu : F'\to('F)^*$ 및 $\bar{\mu} : 'F\to(F')^*$가 單射일때 *separated* couple 이라 한다.

(定義 4) **C** 上의 grounding couple 를 對象으로 하고 그들 사이의 conjoint transformation 을 射로 하는 category 를 *couple category* 라 하고 **Co(C, S)** 로 表示한다.

例컨데 順序集合 **A** 를 category 로 생각할 때 **A** 의 雙對順序集合을 **A***라 하면 $'F : \mathbf{A}\to\mathbf{S}$, 와 $F' : \mathbf{A}^*\to\mathbf{S}$ 및 $\mu : \mathbf{F}'\to'\mathbf{F}^*$에 대하여 $[\mu_Y(q)]_X(p) = m(p, q)$인 m을 coupling 으로 하는 모든 grounding couple 은 **Co(A, S)** 를 이룬다.

또 **C** 의 principal couple 全體는 **Co (C, S)** 의 full subcategory 이다.

(補助定理 2) **Co(C, S)** 의 두개의 conjoint transformation

$$\begin{matrix}\xi=('\xi, \xi'),\\ \eta=('\eta, \eta'),\end{matrix} : X=('X, X', m_X)\to Y=('Y, Y', m_Y)$$

가 주어지고 X가 separated 이고 $'\xi='\eta$ 이면 $\xi=\eta$ 이다.

(證明) 補助定理 1 에 依하여 X의 coupling m_X 에 對하여 關係式 (1)을 만족하는 自然變換 $\mu : X'\to('X)^*$가 唯一하게 존재한다.

가정에 依하여 X는 separated 이므로 μ는 單射이다. 또 Y의 coupling m_Y 에 대하여도 關係式을 (1)을 만족하는 自然變換 $\mu : Y'\to('Y)^*$가 唯一하게 존재한다.

ξ와 η는 conjoint transformation 이므로 $a\in'X(A)$ $b\in Y'(B)$에 대하여

$$m_X(a, \eta_B'(b)) = m_Y('\xi_A(a), b)$$

따라서

$$[\mu_B(\eta_B'(b))]_A(a) = [\bar{\mu}_B(b)]_A\ ('\xi_A(a))$$

한편

$$['\xi^*\cdot\bar{\mu}]_B : Y'(B)\to('Y)^*(B)\to('X)^*(B)$$

에 대하여

$$['\xi^*\cdot\bar{\mu}]_B(b) = \bar{\mu}_B(b)\cdot\xi' = [\mu\cdot\xi']_B(b)$$

이므로

$$\mu\cdot\xi' = '\xi^*\cdot\bar{\mu}.$$

같은 方法으로

$$\mu\cdot\eta' = '\eta^*\cdot\bar{\mu}$$

가정에 依해서 $'\xi^* = '\eta^*$ 이므로 $\mu\cdot\xi' = \mu\cdot\eta'$ 이다. 따라서 $\eta' = \xi'$ 이고 $\xi = \eta$ 이다.

(定理 1) $\mathbf{Co}(\mathbf{C}, \mathbf{S})$의 두개의 grounding couple $X = ('X, X', m_X)$, $Y = ('Y, Y', m_Y)$에 대하여 X가 Y의 retract 이고 Y가 separated 이면 X도 separated 이다.

(證明) X가 Y의 retract 이므로 $\eta = ('\eta, \eta') : X \to Y$ 에 대하여 $\tau\cdot\eta = 1_X$ 인 $\tau = ('\tau, \tau') : Y \to X$가 존재한다. 補助定理 2의 證明에서와 같이 다음 關係式

$$'\bar{\mu}\cdot{}'\eta = \eta'^*\cdot{}'\mu \qquad \text{즉} \qquad \begin{array}{ccc} 'X & \xrightarrow{'\mu} & (X')^* \\ \downarrow{\scriptstyle '\eta} & & \downarrow{\scriptstyle \eta'^*} \\ 'Y & \xrightarrow[{'\bar{\mu}}]{} & (Y')^* \end{array} \qquad (\text{可換})$$

$$\bar{\mu}'\tau' = {}'\tau^*\cdot\mu' \qquad \text{즉} \qquad \begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{\mu'} & ('X)^* \\ {\scriptstyle \tau'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle '\tau^*} \\ Y' & \xrightarrow[{\bar{\mu}'}]{} & ('Y)^* \end{array} \qquad (\text{可換})$$

를 얻는다.

$\tau\cdot\eta = ('\tau\cdot{}'\eta = 1_{'X}, \eta'\cdot\tau' = 1_{X'})$ 이므로 $'\eta, \tau'$는 單射이고 또 Y가 separated 이므로 $'\mu, \bar{\mu}'$가 역시 單射이다. 따라서 $'\mu$와 μ'가 單射이고 X는 separated 이다.

(Double Yoneda Lemma). $\mathbf{Co}(\mathbf{C}, \mathbf{S})$의 grounding couple $X = ('X, X', m_X)$ 와 principal couple $C = (h_C, h^C, m_C)$에 對하여

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Co(C,S)}}(\bar{C}, X \cong {}'X(C) \quad \text{이고}$$

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Co(C,S)}}(X, \bar{C}) \cong X'(C)$$

인 全單射(bijection)가 존재 한다.

(證明) Yoneda Lemma [6]에 依하여 $\mu : h_C \cong h_C{}^* = \mathrm{Hom}(h_C, h^{(\ )})$이고, $\mu' : h^C \cong (h^C)^* = \mathrm{Hom}(h^C, h^{(\ )})$ 이므로 $\bar{C}$는 separated 이다.

한편

$$'X(C) \overset{'\phi_C}{\cong} \mathrm{Nat}(h_C, 'X)$$

이다. $'X(C)$의 任意의 한 元素 t에 대하여 $\phi_C(t)$를 conjoint transformation $(\phi_C(t), T) : C \to X$ (但 $T : X' \to h^C$)로 對應시키는 函數를 Φ 라면 Φ는 補助定理 2에 依하여 一意的函數이고 또

$$\mathrm{Nat}(h^C, 'X) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Co(C,S)}}(\bar{C}, X)$$

따라서

$$'X(C) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Co(C,S)}}(\bar{C}, X).$$

雙對的으로

$$X'(C) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Co(C,S)}}(X, \bar{C}).$$

(定理 2) Category **C** 의 double regular representation

$$\begin{array}{c} \Psi : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{Co}(\mathbf{C}, \mathbf{S}) \\ \quad \Downarrow \qquad \Downarrow \\ X \longmapsto \bar{X} = (h_X, h^X, m) \end{array}$$

는 fully faithful 이다.

(證明) Double yoneda lemma 에 依하여

$$h^X(Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Co}(\mathbf{C},\mathbf{S})}(\bar{X}, \bar{Y})$$

즉 $$\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(X, Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Co}(\mathbf{C},\mathbf{S})}(\bar{X}, \bar{Y}).$$

定理 2 와 같은 方法으로 $\Psi' : \mathbf{C} \to \mathbf{Co}(\mathbf{C}, \mathbf{S})$ 가 $\Psi'(X) = (h_X, h_X{}^*, m)$ (但 $p \in h_X(A)$, $q \in h_X{}^*(B)$, $m(p \cdot q) = q_A(p)$) 라면 이것도 fully faithful 임을 證明할 수 있다.

C 의 left (right) regular representation

$$\begin{array}{c} \varphi_l : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{Cat}(\mathbf{C}^*, \mathbf{S}) \\ \Downarrow \qquad \Downarrow \\ X \longmapsto h_X \end{array}$$

$$\begin{array}{c} (\varphi_r : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{Cat}(\mathbf{C}, \mathbf{S})) \\ \Downarrow \qquad \Downarrow \\ X \longmapsto h^X \end{array}$$

는

$$\begin{array}{ccc} \Psi : \mathbf{C} \longrightarrow \mathbf{Co}(\mathbf{C}, \mathbf{S}) \text{ 와} & & \Phi : \mathbf{Co}(\mathbf{C}, \mathbf{S}) \longrightarrow \mathbf{Cat}(\mathbf{C}^*, \mathbf{S}) \\ \Downarrow \qquad \Downarrow & & \Downarrow \qquad \Downarrow \\ X \longmapsto X = (h_X, h^X, m) & & ('Y, Y', m_Y) \longmapsto Y \end{array}$$

의 積으로 表示됨을 알수 있다.

(定理 3) $\Phi : \mathbf{Co}(\mathbf{C}, \mathbf{S}) \to \mathbf{Cat}(\mathbf{C}^*, \mathbf{S})$ 는 limit 을 保存하고 adjoint functor를 갖는다.

(證明) $L = ('L, L', m_L)$ 를 $\mathbf{Co}(\mathbf{C}, \mathbf{S})$ 에서의 Diagram

$$D = \{i \to D_i = ('D_i, D_i', m_i)\}_{i \in I}$$

의 limit 라면 $\mathbf{Co}(\mathbf{C}, \mathbf{S})$ 에서 任意의 $\{X \to D_i\}_{i \in I}$ 에 對하여

$$X \xrightarrow{\eta} L \to D_i = X \to D_i$$

인 conjoint transformation $\eta : X \to L$ 이 唯一하게 존재한다. 따라서 $\mathbf{Cat}(\mathbf{C}^*, \mathbf{S})$ 에서의 $\{'X \to 'D_i\}_{i \in I}$ 와 $\{'L \to 'D_i\}_{i \in I}$ 에 대하여 $'X \xrightarrow{\eta} 'L \to 'D_i = 'X \to 'D_i$ 인 $'\eta : 'X \to 'L$ 이 唯一하게 존재 한다. 따라서 $'L$ 는 $\mathbf{Cat}(\mathbf{C}^*, \mathbf{S})$ 에서의 diagram $\{i \to 'D_i\}_{i \in I}$ 의 limit 이다.

지금

$$\begin{array}{ccc}\Phi' : \mathbf{Cat}(\mathbf{C}^*, \mathbf{S}) & \longrightarrow & \mathbf{Co}(\mathbf{C}, \mathbf{S}) \\ \Cup & & \\ 'X & \longmapsto & ('X, 'X^*, m)\end{array}$$

라 하자. (但 $p \in 'X(A)$, $q \in 'X^*(B)$, $m(p, q) = q_A(p)$)

$\mathbf{Co}(\mathbf{C}, \mathbf{S})^* \times \mathbf{Cat}(\mathbf{C}^*, \mathbf{S})$ 의 對象 (F, G) 에 대하여 寫像

$$\begin{array}{ccc}\varphi_{(F,G)} : \mathrm{Hom}_{\mathbf{Cat}(\mathbf{C}^*, \mathbf{S})}(\Phi(F), G) & \to & \mathrm{Hom}_{\mathbf{Co}(\mathbf{C}, \mathbf{S})}(F\Phi'(G)) \\ \Cup & & \Cup \\ '\eta & \longmapsto & ('\eta, \eta)\end{array}$$

(但 $F = ('F, F', m_F)$ 이고 $\mu : F' \to 'F^*$ 는 m_F 에 대응하는 自然變換이고 η' 는 $q \in 'F(A)$ 에 대하여 $\mu_A['\eta_A(q)] = q \cdot \eta'$ 를 만족하는 自然變換이다.)

를 생각하면 $\varphi_{(F,G)}$ 는 natural equivalence 가 되므로 Ψ 는 Φ' 의 adjoint functor 이다.

(定義 7) Categcry **C** 의 extension category **E** 가 limit 와 colimit 에 대하여 closed 인 extension category 중 最小인 것이면 **E** 를 **C** 의 *normal extension* 이라 한다.

(定理 4) **C** 上의 **C** 의 normal extension **E** 의 double subregular representation

$$\begin{array}{ccc}\sigma : \mathbf{E} & \longrightarrow & \mathbf{Co}(\mathbf{C}, \mathbf{S}) \\ \Cup & & \Cup \\ X & \longmapsto & (h_X | C^*, h^X | C, m)\end{array}$$

는 fully faithful 이다.

(證明) σ 가 full faithful 이 되는 **E** 의 subclass 를 **E**$'$ 라 하자. **C** 의 對象 C_1, C_2 에 대하여

$$\sigma(C_1) = \bar{C}_1 = (h_{C_1}, h^{C_1} m_1), \quad \sigma(C_2) = \bar{C}_2 = (h_{C_2}, h^{C_2}, m_2)$$

라면 Double Yoneda lemma 에 의하여

$$\Pi : h_{C_2}(C_1) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbf{Co}(\mathbf{C}, \mathbf{S})}(C_1, C_2),$$

따라서

$$\mathbf{E}' \supset \mathbf{C}$$

다음 **E**$'$ 의 한 Diagram $D = \{\alpha \to D_\alpha\}_{\alpha \in I}$ 의 colimit 를 X 라 하고 $Y \in |\mathbf{E}'|$ 에 대하여 $T : \sigma(X) \to \sigma(Y)$ 를 생각하자 또 $i_\alpha : D_\alpha \to X$ 는

$$\sigma(i_\alpha) : \sigma(D_\alpha) \to \sigma(X)$$

를 誘導하므로

$$T_\alpha = T\sigma(i_\alpha) : \sigma(D_\alpha) \to \sigma(Y)$$

를 얻는다.

σ 의 faithfulness 에 依하여 $T_\alpha = \sigma(t_\alpha)$ 인 $t_\alpha : D_\alpha \to Y$ 가 唯一하게 존재한다.

Diagram D 에서의 $S : D_\alpha \to D_\beta$ 에 대하여 $i_\beta \cdot S = i_\alpha$ 이고

$$T_\alpha = T\{\sigma(i_\beta)\sigma(S)\} = T_\beta\sigma(S) = \sigma(t_\beta S)$$

이므로 $t_\alpha = t_\beta \cdot S$ 이고 X 가 colimit 이므로 $t \cdot i_\alpha = t$ 인 $t : X \to Y$ 가 唯一하게 존재 한다.

또 모든 α 에 대하여 $\{\sigma(t)\}'\sigma(i_\alpha) = T'\sigma(i_\alpha)$. 따라서 $\sigma(t)' = T'$ 이고 補助定理 2에 依하여 $\sigma(t) = T$ 이다.

$\mathbf{E}'$ 는 colimit 에 대하여 closed 이며 雙對的으로 limit 에 대하여도 closed 이므로 $\mathbf{E} = \mathbf{E}'$ (Q. E. D)

Adjoint functor $F : \mathbf{C} \to \mathbf{D}$, $G : \mathbf{D} \to \mathbf{C}$ 에 對하여 짝 $(X, Y, m = ('m, m'))$ 를 (F, G)-*couple* 이라 한다. (但 $X \in \mathbf{C}$, $Y \in \mathbf{D}$, $'m : X \to G(Y)$, $m' : F(X) \to Y$)

두개의 (F, G) − couple (X, Y, m), (X_1, Y_1, m_1) 에 대하여 $'\alpha : X \to X_1$, $\alpha' : Y \to Y_1$ 이라 할 때 다음 關係式

$$\left.\begin{aligned} 'm_1' \cdot \alpha &= G(\alpha') \cdot 'm \\ m_1' \cdot F(\alpha') &= \alpha' \cdot m' \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

를 만족하면 짝 $('\alpha, \alpha')$ 를 (F, G)-couple 의 *conjoint transformation* 이라 한다. 이때 이것을

$$('\alpha, \alpha') : (X, Y, m) \to (X_1, Y_1, m_1)$$

으로 表示한다.

이 (F, G)-couple 을 對象으로 하고 그들 사이의 conjoint transformation 을 射로 하는 category 를 (F, G) 의 *cylinder category* 라 하고 $\mathbf{Cyl}(F, G)$ 로 表示한다.

例컨데

$$\begin{array}{ccc} K_1^* : \mathbf{Cat}(\mathbf{C}^*\mathbf{S}) & \longrightarrow & \mathbf{Cat}(\mathbf{C}, \mathbf{S})^* \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ F & \longmapsto & F^* = \mathrm{Nat}[F, h_{(\ )}] \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} K_2 : \mathbf{Cat}(\mathbf{C}, \mathbf{S})^* & \longrightarrow & \mathbf{Cat}(\mathbf{C}^*, \mathbf{S}) \\ \Downarrow & & \Downarrow \\ G & \longmapsto & G^* = \mathrm{Nat}[G, h^{(\ )}] \end{array}$$

라면 이 들은 adjoint functor 이므로 $F = K_1^*$, $G = K_2$. $'m$, m' 를 補助定理 1 에서 決定한 自然變換 $'\mu, \mu$ 라면

$$\mathbf{Cyl}(K_1^*, K_2) = \mathbf{Co}(\mathbf{C}, \mathbf{S})$$

가 된다.

(定義 8) Category $\mathbf{C}$ 로 부터 다른 category 까지의 函手가 colimit 를 保存하고 coadjoint 를 갖는다면 $\mathbf{C}$ 를 compact category 라 한다.

(定義 9) Category $\mathbf{C}$ 가 legitimate 이고 모든 legitimate extension category

의 retract 라면 **C** 를 *extraordinary-injective* 라 하고 또 **C** 가 **C** 以外의 對象을 많아도 하나만 가진 **C** 의 모든 legitimate extension 의 retract 라면 **C** 를 *injective category* 라 한다.

끝으로 J. R. Isbell 敎授가 提起한 未解決問題을 紹介하겠다.

問題 1. **C** 가 small category 일때 **Co (C, S)** 는 compact 가 되는가?

問題 2. 모든 injective category 는 extraordinary injective 가 되는가?

參 考 文 獻

[1] J. R. Isbell. *Structure of Categories*: Bull. of A. M. S. Vol. 72 (1966), 619-655

[2] ________. *Normal completion*, Lecture Note No. 47: Springer, Berlin (1967)

[3] J. Lambeck. *Completion of categories*, Lecture Note No. 24, Springer Berlin, (1966)

[4] C. Ehresmann. *Categories et structures* Dunod, Paris (1965)

[5] Kennison. *Normal completions of small categories*, Canad. J. Math. Vol. 12 (1969) 196~201

[6] S. McLane. *Categorical algebra*, Bull. of A. M. S. Vol. 71 (1965), 40~106.

仁荷大學校