Bull. Korean Math. Soc.
Vol. 9 (1972), pp. 83-99

現代數學과 Homology 代數

李 起 安

1. 序 說

오늘날의 現代數學에서는 Homology 代數學의 役割은 매우 크다. 特히 位相空間의 性質을 究明하는 學問(例컨대 幾何學 및 函數解析學)에서의 問題를 代數學問題로 轉換하여 考察함에 있어서는 Homology 代數의 役割은 이루 헤아릴 수 없이 크다.

이 小稿에서는 Homology 代數의 手法을 記하고, 位相空間에 Homology 代數의 手法을 導入시킨 技巧로써의 K-theory, sheaf-theory 등의 初步概念을 紹介하며, 나아가서는 Homology 的 手法이 實際問題의 解決에 어떻게 活用되는가 하는 一端을 記하여 보려한다.

2. Homology 代數

理論의 簡易化를 爲하여, 하나의 1을 갖는 可換環 A만을 생각하기로 하자. 이때 모든 A-module 와 A-linear map 들의 全體로 된 Category 를 $\boldsymbol{M}_A$로 表示하기로 하자. 이 $\boldsymbol{M}_A$에는 充分히 많은 injective module 와 projective module 가 있다는 것은 이미 證明이 되여 있다.

지금 $M \in \boldsymbol{M}_A$를 取하면 항시 다음과 같은 M의 injective resolution 과 projective resolution 이 存在한다.

$$\cdots \to X_n \xrightarrow{d_n} X_{n-1} \longrightarrow \cdots \xrightarrow{d_1} X_0 \xrightarrow{\varepsilon_0} M \longrightarrow 0$$

$$\cdots \leftarrow Y^n \xleftarrow{\delta^n} Y^{n-1} \leftarrow \cdots \xleftarrow{\delta^1} Y^0 \xleftarrow{\varepsilon^0} M \longleftarrow 0$$

여기서 $X_i\,(i=0,1,2,\cdots)$은 Projective A-module 이고 $Y^i\,(i=0,1,\cdots)$은 injective A-module 이며 이들 두 sequence 는 exact 인 것이다. (前者가 projective, 後者가 injective resolution). Balanced functor 로써 現在 發見되어 있는 것으로는 Hom, $\otimes$인 두 functor 뿐임은 周知의 事實이지만, 하나의 A-module N을 擇하여 다음과 같은 두개의 semi-exact sequence 를 위의 resolution 으로 부터 얻을 수 있다.

$$\cdots \to X_n \otimes N \xrightarrow{d_n \otimes 1} X_{n-1} \otimes N \longrightarrow \cdots \xrightarrow{d_1 \otimes 1} X_0 \otimes N \xrightarrow{\varepsilon_0 \otimes 1} M \otimes N \longrightarrow 0$$

$$\cdots \leftarrow \mathrm{Hom}\,(N, Y^n) \xleftarrow{\mathrm{Hom}\,(1, \delta^n)} \mathrm{Hom}\,(N, Y^{n-1}) \longleftarrow$$

$$\cdots \xleftarrow{\mathrm{Hom}(1,\delta^1)} \mathrm{Hom}(N, Y^0) \xleftarrow{\mathrm{Hom}(1,\varepsilon_0)} \mathrm{Hom}(N, M) \longleftarrow 0$$

여기서 $\otimes=\otimes_A$, Hom$=$Hom$_A$인 것이다. 이 semi-exact sequence 들의 Homology 와 Cohomology 를 取하므로써 derived functor 인

$$\mathrm{Tor}_n{}^A(M, N)=\mathrm{Ker}(d_n\otimes 1)/\mathrm{Im}(d_{n+1}\otimes 1)$$
$$\mathrm{Ext}_A{}^n(N, M)=\mathrm{Ker}(\mathrm{Hom}(1, \delta^{n+1}))/\mathrm{Im}(\mathrm{Hom}(1, \delta^n))$$

을 얻는다. (여기서 $n=0, 1, \cdots$)

Homology 代數는 functor $\otimes$, Hom 의 性質 및 Tor, Ext 등의 性質을 究明하는데 力點을 둔다. 勿論 Tor, Ext 가 functor 로 資格을 가추기 위하여서는 무엇보다도 M, N이 決定되면 M의 injective 및 projective resolntion 의 如何에 不拘하고 그 값이 同型을 除外하고는 唯一的이라는 것을 必要로 한다. 그러나 이것에 關하여 저 有名한 Comparison theorem (S. Mac Lane; Homology, p. 40, Theorem 2, 1) 이 있음을 우리는 잘 알고 있는 터이다.

Tor 나 Ext 에 관하여 滋味있는 性質은 다음 것을 들수가 있다.

THEOREM 1. Category $\boldsymbol{M}_A$ 에서 exact sequence

$$0\longrightarrow M'\longrightarrow M\longrightarrow M''\longrightarrow 0$$

가 있으면 항시 다음의 long exact sequence 를 얻는다.

$$\cdots\to\mathrm{Tor}_n{}^A(M', N)\longrightarrow\mathrm{Tor}_n{}^A(M, N)\longrightarrow\mathrm{Tor}_n{}^A(M'', N)\xrightarrow{\Delta}\mathrm{Tor}_{n-1}{}^A(M', N)$$
$$\longrightarrow\cdots\to\mathrm{Tor}_0{}^A(M', N)\longrightarrow\mathrm{Tor}_0{}^A(M, N)\longrightarrow\mathrm{Tor}_0{}^A(M'', N)\longrightarrow 0$$

$$0\longrightarrow\mathrm{Ext}_A{}^0(N, M')\to\mathrm{Ext}_A{}^0(N, M)\to\mathrm{Ext}_A{}^0(N, M'')\xrightarrow{\Delta}\mathrm{Ext}_A{}^1(N, M')\to\cdots$$

여기서 Δ 들을 Connecting map 라 한다.

(증명은, S. MacLane; Homology, p152, Theorem 8, 4 및 p97, Theorem 9, 1 을 要參照)

Category, Functor 들의 槪念은 1930 年代에 거의 完成이 되였든 Combinatorial Topology (組立的位相幾何學) 에서 發端하여 S. Eilenberg 및 S. MacLane 敎授들의 碩學들에 의하여 1940 年代에서 1950 年代 사이에 完成된 것들임은 잘 알려져 있는 바이다.

勿論 functor 란 簡單히 말하여 category 사이의 function 인바, 이 functor 의 힘을 빌리면, 가령 位相空間全體와 그들 사이의 連續函數로 된 category 로 부터 上記한 category $\boldsymbol{M}_A$ 에 보내는 function 卽 functor 가 存在함을 알게되고, 이들 functor 는 곧 位相空間의 問題를 Homology 代數學의 問題로 變換 시키는 契機를 마련하였던 것이다. 여기서 簡單히 그 一例가 되는 singular (co) homology 를 紹介하여 본다.

Singular (co) homology: R^n 을 n 次元 Euclid 空間이라하고 R^n 에 있는 standard affine n-simplex 를 Δ^n 이라하자.

이때 Δ^n 는 頂點을 $u_0=(0,0,\cdots 0)$, $u_1=(1,0,\cdots 0)\cdots u_n=(0,\cdots 0,1)$ 인 $n+1$ 個 갖는 立體圖形인 것이다. 그런 故로 $x\in\Delta^n$ 에 對하여

$$x=x_o u_o+\cdots+x_n u_n,\quad x_o+\cdots+x_n=1$$

인 實數 $x_o,\cdots x_n$ 이 存在하게 된다. 便宜上 우리는 이 性質에 의하여

$$\Delta^n=(0,1,\cdots n)\quad \Delta^{n-1}=(0,1,\cdots n-1)$$

등으로 놓을 수 있다. 이때

$$\varepsilon_n{}^i:\Delta^{n-1}\longrightarrow\Delta^n,\quad \eta_n{}^i:\Delta^{n+1}\longrightarrow\Delta^n$$

를

$$\varepsilon_n{}^i(0,\cdots n-1)=(0,\cdots i-1,\ \hat{i},\ i+1,\cdots n)$$
$$\eta_n{}^i(0,\cdots n,\ n+1)=(0,\cdots i,\ \hat{i},\ i+1,\cdots n)$$

(여기서 $\hat{i}$ 는 i 가 除外 된다는 뜻)

되게 定義하면, $\varepsilon_n{}^i$, $\eta_n{}^i$ 는 연속일 뿐 아니라 다음을 만족한다.

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_{n+1}{}^j\varepsilon_n{}^i=\varepsilon_{n+1}{}^i\varepsilon_n{}^{j-1} && i<j\\
&\eta_n{}^j\eta_{n+1}{}^i=\eta_n{}^i\eta_{n+1}^{j+1} && i\leq j\\
&\eta_{n-1}{}^j\varepsilon_n{}^i=\varepsilon_{n-1}{}^i\eta_{n+1}^{j+1} && i<j\\
&\qquad=1 && i=j,\ i=j+1\\
&\qquad=\varepsilon_{n-1}^{i-1}\eta^j{}_{n-2} && i>j+1
\end{aligned}$$

任意의 位相空間 X 에 對하여 연속함수 $f:\Delta^n\longrightarrow X$ 는 X 에서의 singular n-simplex 라고 부른다. 이러한 모든 simplex 의 集合을 $\Delta^n(X)$ $(n=0,1,\cdots)$ 로 表示하자 $\Delta^n(X)$ 로 生成된 free A-module 를 $\Delta_A{}^n(X)$ 로 表示하면 (이것은 n-chain module of X 라고 한다) 다음과 같은 두개의 X 의 chain 및 cochain complex:

$$\Delta_A(X)\ :\ \cdots\longrightarrow\Delta_A{}^n(X)\xrightarrow{d_n}\Delta_A{}^{n-1}(X)\longrightarrow\cdots\xrightarrow{d_1}\Delta_A{}^0(X)\longrightarrow 0$$
$$\bar{\Delta}_A(X)\ :\ \cdots\longleftarrow\Delta_A{}^n(X)\xleftarrow{\delta^{n-1}}\Delta_A{}^{n-1}(X)\longleftarrow\cdots\xleftarrow{\delta^0}\Delta_A{}^o(X)\longleftarrow 0$$

여기서 $f\in\Delta_A{}^n(X)$ 에 對하여

$$d_n f=\sum_{i=0}^{n}(-1)^n f\varepsilon_n{}^i,\quad \delta^n f=\sum_{i=0}^{n}(-1)^n f\eta_n{}^i$$

이들 두 complex 는 앞서의 $\varepsilon_n{}^i$ 및 $\eta_n{}^i$ 가 갖는 性質에 의하여 semi-exact sequence 가 됨은 곧 알게 되는 것이다. 이때 이 semi-exact sequence 에 의하여 두 種類의 Homology 및 cohomology group 를 다음과 같이 얻게된다. (H 는 homology, cohomology functor)

$$H_n(\Delta_A(X))\ :\ H_n(X,N)=H_n(\Delta_A(X)\otimes N)$$

$$H^n(\bar{\Delta}(X) : H^n(X, N) = H^n(\mathrm{Hom}(\Delta_A(X), N))$$

여기서 $N \in \boldsymbol{M}_A$ 이다. 이들은 各各 n 次元 singular homology group (係數를 N 에 갖는) n 次元 singular cohomolgy gronp (係數를 N 에 갖는)라고 불리워진다. 하나의 位相空間 X 에 cohomology group 를 對應시키는 方法은 이것 以外에도 Alexander-Spanier cohomology (E, H, Spanier: Algebraic Topology, p 311) 및 Cech (co) homology (S. Eilenlerg, and N. Steenrod; Foundation of algebraic topology, p233) 등이 있다.

이렇게 位相空間에 관하여 얻어진 (co) homology 가 어떻게 數學의 다른 分野에 活用되는가 하는 例를 簡單한 것을 들어 보자.

例 1 (Extension 에 관한문제) 가령 X' 는 位相空間 X 의 部分空間이라 하자. 그리고 여기에는 連續函數 $f : X' \to Y$ 가 存在한다고 하자. 이때 다음 圖形이 可換이 되는 連續函數 $h : X \to Y$ 가 존재한가 ? 하는 것이 Extension 문제이다.

$$\begin{tikzcd} X' \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "i"'] & & Y \\ & X \arrow[ur, "\exists h"'] & \end{tikzcd}$$

여기서 i 는 inclnsion map 이다. 그러나 이들 位相空間에 對한 singular homology group (m 次元)을 取하면

$$\begin{tikzcd} H_m(X') \arrow[rr, "f_*"] \arrow[dr, "i_*"'] & & H_m(Y) \\ & H_m(X) \arrow[ur, "\exists h_*"'] & \end{tikzcd}$$

에서 $f_* = h_* i_*$ 인 h_* (group homomorphism) 가 存在하느냐를 생각한 結果가 된다. (그런데 하나의 缺함이 있다. 그것은 $h_* i_* = f_*$ 라하여 $hi = f$ 라고는 할 수 없다는 것이다. 卽 前者는 後者의 必要條件이기는 하나 充分條件은 아닌 것이다)

이와 같이 代數學 문제로 轉換시켜 생각하면 便宜한 境遇가 많다. 例컨대

1. $n \geqq 1$ 에 對하여 identity map $L_s : S^{n-1} \to S^{n-1}$ 는 E^n 으로 extension 은 되지 않는다. 여기서 S^{n-1} 은 n 次元單位球이며 $E^n = \{(x_1, \cdots x_n) \in R^n \mid |x^i| \leq 1\}$ 이다.

Proof. f 의 extension $g : E^n \to S^{n-1}$ 가 존재한다고 하자. 그런데 잘 알려져 있는 바와 같이 $m = n-1$ 이면 $(A = Z)$

$$H_m(E^n) = 0, \quad H_m(S^{n-1}) \cong Z$$

이다. 여기서 Z 는 모든 整數로된 加群이다. 더 나아가서 位相空間 X 에 對하여 identity map $1_X : X \to X$ 이면 $m = 0, 1, \cdots$ 에 對하여 $(1_X)_* : H_m(X) \to H_m(X)$ 는 또한 identity map $1_{H_m(X)}$ 이다. 그런 故로

$$
\begin{array}{ccc}
H_m(S^{n-1}) & \xrightarrow{(1_s)_*=1_{H_m}(S^{n-1})} & H_m(S^{n-1}) \\
i_*=0 \searrow & & \nearrow 0=g_* \\
& H_m(E^n) &
\end{array}
$$

가되며 $(1s)_* \neq g_* i_*=0$ 이다. 따라서 Extension g의 存在는 있을 수 없다.

앞서의 하나의 位相空間으로 부터 얻은 chain complex

$$\cdots \to \Delta_A{}^n(X) \xrightarrow{d_n} \Delta_A{}^{n-1}(X) \longrightarrow \cdots \longrightarrow \Delta_A{}^1(X) \longrightarrow \Delta_A{}^0(X)$$

를 다시 한번 생각하자. $\Delta_A{}^0(X)$는 그 生成元으로써 한 點에서 X로 가는 연속 사상들을 갖는다. 이때 모든 生成元을 A의 單位元 1로 보내는 group homomorphism을 ε_0라 하면 다음과 같은 semi-exact sequence를 얻는다.

$$\cdots \to \Delta_A{}^n(X) \xrightarrow{d_n} \cdots \xrightarrow{d_1} \Delta_A{}^0(X) \xrightarrow{\varepsilon_0} A \longrightarrow 0$$

이것에서 取한 homology group 들을 reduced honology group 라하여 $\hat{H}_n(X)$ 등으로 表示한다. 勿論 이때

$$\hat{H}_n(X)=H_n(X) \quad n \geq 1,$$
$$\hat{H}_0(X) \oplus A \cong H_0(X)$$

등이 成立함은 곧 알수 있다.

두개의 位相空間 X, Y에 對하여 $f: X \to Y$, $g: Y \to X$인 연속함수가 존재하여 $gf \simeq 1_X$ ($\simeq$: homotopic), $fg \simeq 1_Y$ 이면 X와 Y는 same homotopy type 라고 한다. 두 位相空間이 same homotopy type 가 되기 위한 必要條件(充分條件은 아님)은 그들의 各次의 singular homology group 가 同型이다 라는 것을 들면 다음들이 容易하게 證明되여 진다.

2. 만약 $n \neq m$ 이면 S^n과 S^m는 same homotopy type 는 아니다.

Proof. $\hat{H}_n(S^n) \neq 0$, $\hat{H}_m(S^n)=0$ (단 $A=Z$)

3. 만약 $n \neq m$ 이면 R^n과 R^m는 位相同型은 아니다.

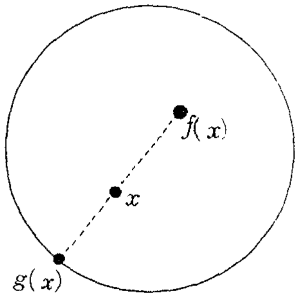
Proof. 만약 R^n, R^m가 位相同型이면 그들의 one-point compactification 인 S^n와 S^m는 位相同型이야 한바 그런데 2.에 의하여 位相同型이 아니다.

X'를 位相空間 X의 部分空間이라하자. 만약 inclusion map $i: X' \to X$에 대하여 연속함수 $r: X \to X'$가 $r_i = I_X$, 되게 존재하면 X'는 X의 retract 라고 말한다. X'가 X의 retract 이면 各次元에서의 X'의 homology group ($A=Z$)는 X의 homology group의 하나의 direct summand 이다라는 定理를 利用하면 다음의 Brouwer fixed-point theorem 가 容易하게 證明되여 진다.

4. 各 $n \geq 0$에 對하여 E^n에서 그 自身에의 連續函數는 fixed point 를 갖는다.

proof. 于先 S^n은 E^{n+1}의 retract 가 아님을 證明하자. 換言하면 S^n의 homology group가 E^{n+1}의 homology group의 direct summand가 아님을 말하면 된다. 잘아는 바와 같이 E^{n+1}은 contractible이므로 $\tilde{H}_n(E^{n+1})=0$이며 $\tilde{H}_n(S^n)\neq 0$이다. 따라서 $H(S^n)$는 $H(E^{n+1})$의 어떤 direct summand와도 同型이 아니다.

Fixed point theorem를 證明하자. $n=0$에 對하여서는 分明하다. $n>0$일 때 $f: E^n \to E^n$가 연속함수라 하고 f는fixed point를 갖지 않는다고 假定하자(즉 $f(x) \neq x$). 우리는 $g: E^n \to S^{n-1}$을 다음과 같이 定義한다. 各 $x \in E^n$에 對하여 $g(x)=f(x)$에서 x에 있는 線分이 S^{n-1}과 만나는 點와 같이 定한다.



이것의 可能性은 모든 $x \in E^n$에 對하여 $f(x) \neq x$에 의하며 $g(x)$는 연속 임을 證明할 수 있다. 이때 g는 E^n의 S^{n-1}에 對한 하나의 retraction이다. 換言하면 S^{n-1}은 E^n의 retract라는 말이 된다. 이것은 앞서의 主張에 모순 된다.

그러나 singular homology는 주어진 位相空間으로 부터 直接 Homology group를 대응시키는 手法이였다. (이것에 類似한것으로 주어진 位相空間에 代數系를 直接 대응 시킨것으로 Homotopy group가 있다) 然이나 주어진 位相空間의 性質을 究明하기 위하여 第二의 位相空間을 만들고, 이것의 homology를 硏究함으로써 當初의 位相空間의 性質을 찾으려하는 手法이 있다. 이것이 곧 K-theory와 Sheaf-theory인 것이다. 아래에서는 順次的으로 이들의 槪要를 紹介하여 보려한다.

3. *K*-theory

Fibre bundle의 槪念은 Möbius band 및 Klein bottle 등의 幾何圖形을 一般化한 槪念으로써 1930年代에서 부터 싹트기 始作하였으며 1950年代에 Milnor가 주어진 任意의 位相群에 對한 universal fibre bundle의 造作을 完成하므로써 急격히 發展되였다. 1960年代에 Grothendieck, Atiyah 및 Hirzebruck 등은 Vector bundle의 考察로 말미암아 K-theory 卽 一般化된 Cohomology theory를 完成하였고 Atiyah는 이 K-theory로써 그 難解한 Boff periodicity theory (complex elliptic boundary value problem : D. Husemoller, Fibre bundle, p130, E, Dyer: Cohomology theories, p72)가 K-theory의 한 定理로써 證明됨을 밝혀서 1962年의 field賞을 받았다는 것은 周知의 事實이다.

위의 幾何的인 K-theory에 對應하여 亦是 1960年代에 Bass, Swan 等의 젊은 碩學들에 의하여 algebraic K-theory를 創始하였다. 이 algebraic K-theory

는 vector space의 보다 깊은 硏究에 큰 도움이 되였으며, 이 理論의 근거는 multiplication을 갖는 적당한 한 Category에 Grothendieck 및 Whitehead group를 대응시켜 K-group의 exact sequence를 만든데 있는 것이다. 그런데 geometric K-theory에서는 $K_n(X)$ $(n=1, 2\cdots)$ 등의 group을 만들어 exact sequence를 얻지만 algebraic K-theory에서는 K_2-group 까지가 만드러 졌고 K_3-group 以上의 것은 아직 만들어져 있지 않아 未解決 문제를 담뿍 안고 있는 實情에있는 것이다. 뿐아니라 이 algebraic K-theory가 geometric K-theory와 어떤 連關性이 있으며 前者에서 얻었던 相當히 깊은 理論이 後者에게는 어떻게 活用될 것인지 等 硏究하여야 할 部分等이 아주 많이 있는 것이다. 然이나 筆者의 小見으로써는 그 理論面에서 後者가 前者에 比하여 몇 곱절 華麗한것 같으며 그 活用面도 두드러지게 많은 것 같다. 여기서는 geometric K-theory의 概要와 이것을 土臺로하여 始作되였던 一般化된 cohomology theory의 一端을 記하여 볼 것이다. (algebraic K-theory에 관하여는 Bass: Algebraic K-theory, Swan: Algebraic K-theory 및 筆者의 Elementary algebraic K-theory (1972. 漢陽大學校論文集 要參照)

하나의 fibre bundle $\boldsymbol{B}=(B, p, X)$는 다음의 것들로 形成된다.

(i) bundle space라고 불리우는 位相공간 B, (ii) bace space라고 불리우는 位相공간 X (iii) projection 이라고 불리우는 연속사상

$$p:\ B \to X$$

(이것은 onto 이다). 및 (iv) fibre라고 불리우는 位相공간 Y. 그리고 이들 사이에는 다음과 같은 關係가 있는 것이다. X의 各點 x에 對하여

$$Y_x = p^{-1}(x)$$

가 x 上의 fibre라고 불리우며 이것은 fibre Y와 同位相이다. 뿐아니라 X의 각點 x에 對하여 그 근방 V로서 다음을 만족하는 것이 존재한다.

$$\begin{array}{ccc} \phi:\ V\times Y & \longrightarrow & P^{-1}(V) \\ \Cup & & \Cup \\ (x'y) & \sim\!\!\to & \phi(x', y) \end{array}$$

가 同位相이고 $p\phi(x', y)=v'$ 이다. 더 나아가서 Y의 位相同型으로 된 하나의 group G(이것은 (group of the bundle라 불리운다)를 必要로한다. fibre bundle의 例는 가장 간단한 것이 product bundle 卽 $B=X\times Y$가 있고 잘 알려져 있는 幾何圖形으로는 앞서 記하였던 과 같이 Möbius band 等이있다. (Fibre bundle의 一般論은 N. Steensod: The topology of fibre bundle 要참조)

위와 같은 fibre bundle의 特殊한 것으로 vector bundle가 있다. F를 實數體 R 또는 複素數体 C 中 하나를 뜻한 것으로 하자.

하나의 k-dimensional vector bundle ξ over F는 하나의 fibre bundle $(E,$

$P, B)$로써 各 $p^{-1}(b)$가 F 上의 k-dimensional vector space의 構造를 가지며, 다음의 local triviality condition을 갖는 것을 말한다. B의 各 點은 그근방 U로써 다음을 만족 하는 것을 갖는다.

$$h : U \times F^k \to p^{-1}(U) : \text{位相同型}$$

$$h|b \times F^k : b \times F^k \to p^{-1}(b) : \text{vector space 로서 同型}$$

$$ph(b, f) = b$$

두개의 vector bundle $\xi = (E, p, B)$, $\xi' = (E', p', B')$ 사이의 bundle module map $(u, f) : \xi \to \xi'$ 는

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "u"] \arrow[d, "p"'] & E' \arrow[d, "p'"] \\ B \arrow[r, "f"] & B' \end{tikzcd}$$

가 可換이며 $u|p^{-1}(b) : p^{-1}(b) \longrightarrow p'^{-1}(f(b))$가 F-linear map 인것을 말하며, 이들 두개의 vector bundle ξ, ξ' 에서 $B = B'$ 이면 이들의 Whitney sum $\xi \oplus \xi'$는 B의 各 點 b에 對하여 fibre $p^{-1} \oplus p'^{-1}(b)$로서 두 bundle의 fibre의 direct sum 으로된 vector space 인것을 말한다.

모든 finite cell complex (定義는 G. E. Cooke and R. L. Finney: Homology of cell complexes: Mathematical notes, Princeton University Press (1965) 要參照)와 그들 사이의 연속사상으로 된 category를 $\boldsymbol{P}$ 라하고 모든 集合과 그들 사이의 function 들로된 Category를 $\boldsymbol{S}$ 라하자 지금 Contravasiant functor.

$$\mathrm{Vect} : \boldsymbol{P} \to \boldsymbol{S}$$

를 다음과 같이 定義한다. (앞으로 vector bundle는 F 上의 것을 뜻함)

$X \in \boldsymbol{P}$ 에 對하여 $\mathrm{Vect}(X)$는 X 上의 vector bundle의 모든 isomorphic class 들의 集合이라 하며 $\boldsymbol{P}$ 에서의 $f : Y \to X$ 에 對하여

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Vect}(f) : \mathrm{Vect}(X) & \longrightarrow & \mathrm{Vect}(Y) \\ \rotatebox{90}{$\in$} & & \rotatebox{90}{$\in$} \\ [\xi] & \sim\!\!\to & [f^*(\xi)] \end{array}$$

여기서 $f^*(\xi)$는 induced vector bundle over Y by f 이다. 卽

$$\begin{tikzcd} Y \overline{\times} E \arrow[r] \arrow[d, "p'"'] & E \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[r, "f"] & X, \end{tikzcd}$$
($Y \overline{\times} E$는 f에 對한 fibre product)

에서 $f^*(\xi) = (Y \overline{\times} E, p', Y)$이며, $\xi = (E, p, X)$ 이다. 이 경우 앞서 말하였든 같은 base space 上의 vector bundle 사이의 Whitney sum에 의하여 Vect (X) $(X \in \boldsymbol{P})$는 semi-group 임이 分明한 것이다.

같은 base space를 갖는 두개의 vector bundle ξ, η에 對하여 이들의 tensor product $\xi\otimes\eta$는 다음의 universality를 갖는 이 base space 上의 vector bundle을 말한 것이다. 各 vector bundle morphism $u:\xi\oplus\eta\}\to$가 各 fibre에 對하여 bilinear이면 다음의 可換圖를 만족시킨 唯一의 各 fibre에서 bilinear map가 되는 vector bundle morphism가 존재한다.

$$\begin{array}{ccc} \xi\oplus\eta & \longrightarrow & \xi\otimes\eta \\ & u\searrow \text{©} \swarrow \exists! f & \\ & \xi & \end{array}$$

이때 다음의 관계式이 成立 한다.

$$\xi\otimes\eta\cong\eta\otimes\xi,\quad \xi\otimes(\eta\otimes\zeta)\cong(\xi\otimes\eta)\otimes\zeta$$

$$\xi\otimes\theta^1\cong\xi,\quad \xi\otimes(\eta\oplus\zeta)\cong(\xi\otimes\eta)\oplus(\xi\otimes\zeta)$$

여기서 $\cong$는 vector bundle로서 isomosphic라는 뜻이며 θ^1는 trivial line vector bundle 卽 $B\times F$와 isomorphic인 bundle를 말한다. ($\theta^n=B\times F^n$ 이다)

이러한 관계식에 의하면 Vect (X) $(X\in \boldsymbol{P})$는 $\oplus$과 $\otimes$에 의하여 semi-ring이 됨을 알수 있다. 우리는 이러한 semi-ring을 ring化 하려한다. 그것의 一般論은 다음과 같다.

M를 zero를 갖는 semi-ring라하고 $\varDelta: M\to M\times M$을 diagonal homomorphism of semi-ring이라 하자.

$$K(M)=M\times M/\varDelta(M)$$

라 하면 $K(M)$는 ring이 된다. 그것은 $[(m_1, m_2)]\in K(M)$에 對하여 $[(m_2, m_1)]\in K(M)$는 그 inverse element가 되기 때문이다. (M은 可換인 semi-group). 이때

$$\alpha_M: M\longrightarrow K(M)$$

를 $m\sim\to(m, 0)\in M\times M$ 및 natural projection $M\times M\to K(M)$와의 結合으로 定義를 하면 다음의 圖形에서 $K(\nu)$는 唯一的으로 定義되어진다. (여기서 $\nu: M\to N$은 semi-ring homomorphism 이다)

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\alpha_M} & K(M) \\ \nu\downarrow & & \vdots\, K(\nu) \\ N & \xrightarrow{\alpha_N} & K((N) \end{array}$$

이것은 곧 (K,α)는 모든 zero를 갖는 semi-ring (commutative)와 그 homomorphism 와의 category에서 모든 commutative ring의 category로 에의 covariant functor 임을 말해주는 것이다. 簡單히 證明되는 것이지만 다음의 性質이 있다. M를 zero를 갖는 commutative semi-ring. A를 하나 ring (commutative)라 하자 만약 $r: M\to A$가 semi-ring homomorphism이면 반드시 ring-homomorphism $\nu: K(M)\to A$가 $\nu, \alpha_M=r$ 되게 존재한다.

다시 Vect(X)로 돌아가자, $K(\mathrm{Vect}(X))=\mathrm{K}(\mathrm{X})$라 쓰고 ξ가 X上의 vector bundle일 때 ξ의 $K(X)$에 對한 image를 $[\xi]$와 같이 쓰기로 하자. ξ를 Vect(X)의 element의 하나의 representation이면 반드시 X上의 vector bundle η로서 $\xi\oplus\eta(=\theta^n)$가 trivial 되게하는 것이 존재한다.

X上의 두개의 vector bundle ξ, η에 對하여 $\xi\oplus\theta^n\cong\eta\oplus\theta^q$인 n, q가 존재하면 ξ, η는 stable equivalence라하여 $\xi\sim\eta$ 같이 쓴다. 이러한 術語들을 사용하면 다음이 成立한다.

PROPOSITION 2. 各 $K(X)$의 element는 $[\xi]-[\eta]$의 모양으로 表現되며 $[\xi]=[\eta]$임은 오직 $\xi\sim\eta$ 일때 뿐이다. (證明은 筆者의 On cohomology theories, (1970) 漢陽大學校論文集 p. 354 要參照)

다음에는 다소 어려워지지만 n次元 K-group를 形成한 過程을 說明하기로 하자.

$\boldsymbol{P}^2$를 $\boldsymbol{P}$의 pair의 category (卽$(X, X')\in\boldsymbol{P}^2$ $X\in\boldsymbol{P}$ 및 $X'\subset X$)라 하고, covariant functor

$$T:\boldsymbol{P}^2\to\boldsymbol{P}^2$$

을 다음과 같이 定議하자 (i) $T(X, X')=(X', -\phi)$, $(X, X')\in\boldsymbol{P}$. (ii) $\boldsymbol{P}$에서 $f:(X, X')\to(Y, Y')$이면 $T(f)=f|(X', \phi):(X', \phi)\to(Y', \phi)$ 지금 $\boldsymbol{P}_0$를 base point를 갖는 finite cell complex 들의 category라 하자. 위의 covariant functor T를 模倣하여 covariant ftnctor $T_0:\boldsymbol{P}^2\to\boldsymbol{P}_0$를 $T_0(X, X')=X/X'$, $*$) (여기서 $*$는 X'/X'로서 X/X'의 base point) 및 $T_0(f)$를 다음이 可換이 되게 定義한다.

$$\begin{tikzcd}
(X, X') \arrow[r, "\text{Projection}"] \arrow[d, "f"'] & X/X' \arrow[d, dashed, "T_0(f)"] \\
(Y, Y') \arrow[r, "\text{Projection}"] & Y/Y'
\end{tikzcd}$$

여기서 $f:(X, X')\to(Y, Y')$는 $\boldsymbol{P}^2$에서의 morphism이다. 이때 各 $X\in\boldsymbol{P}_0$(base point는 x_0)에 對하여 inclusion map $i:x_0\to X$로 부터 유도된 $i^*:K(X)\to K(x_0)$의 kernel를 $\tilde{K}(X)$로 表示하면 collapsing map $X\to x_0$가 있음으로써 우리는 natural splitting

$$K(X)\cong\tilde{K}(X)\oplus K(x_0)$$

를 갖는다. (要注意 : Vect가 contravariant이고 Vect 上에서 K가 coraviant이므로 $\boldsymbol{P}$에서 ring category로 가는 functor K는 contravariant인 것이다) 勿論 위에서 定義한 $\tilde{K}$도 $\boldsymbol{P}$로 부터 ring 들의 category에로 가는 contravariant functor 이다. 더 나아가서 $(X, X')\in\boldsymbol{P}$ 및 $X/X'\in\boldsymbol{P}_0$에 對하여

$$K(X, X')=\tilde{K}(X/X')$$

되게 定義하자.

우리는 X (x_0가 base point), Y (y_0가 base point)에 對하여 (즉 $X, Y \in \boldsymbol{P}_0$)

$$X \wedge Y = X \times Y / X \vee Y$$

(여기서 $X \vee Y = X \times y_0 \cap x_0 \times Y$)와 같이 smash $\vee$ 와 Wedge $\wedge$ operator 를 定義하자 이때

$$X \wedge (Y \wedge Z) \approx (X \wedge Y) \wedge Z$$

$$\underbrace{S^1 \wedge \cdots\cdots \wedge S^1}_{n\text{-times}} \approx S^n \quad (X, Y, Z\ S^1 \in \boldsymbol{P}_0)$$

(여기서 $\approx$는 位相同型의 뜻임)들은 잘 알려져 있는 것이다. 지금 $X \in \boldsymbol{P}_0$에 對하여 $S^n X = S^n \wedge X$라 놓자 (따라서 $S^1 \wedge$는 Suspension S와 同意語이다). 그리하여 우리는 다음을 定義한다.

$$\tilde{K}^{-n}(X) = \tilde{K}(S^n X), \quad (X \in \boldsymbol{P}_0)$$

$$K^{-n}(X,\ Y) = \tilde{K}^{-n}(X/Y) = \tilde{K}(S^n(X/Y)), \quad ((X, Y) \in \boldsymbol{P}^2)$$

$$K^{-n}(X) = K^{-n}(X, \phi) = \tilde{K}^{-n}(X/\phi) = \tilde{K}(S^n X^+)$$

$$(X \in \boldsymbol{P},\ X^+ = X/\phi)$$

이 경우 다음의 定理가 成立한다.

THEOREM 3. 各各의 $(X, Y) \in \boldsymbol{P}^2$에 對하여 다음의 natural exact sequence 가 成立한다.

$$\cdots \to K^{-2}(Y) \xrightarrow{\Delta} K^{-1}(X, Y) \xrightarrow{j^*} K^{-1}(X) \xrightarrow{i^*} K^{-1}(Y) \xrightarrow{\Delta} K^0(X, Y)$$

$$\xrightarrow{j^*} K^0(X) \xrightarrow{i^*} K^0(Y),$$

여기서 $Y \xrightarrow{i} X \xrightarrow{j} X/Y$ (i=inclueion, j=projecton) 이다.

이것의 證明은 매우 길며 詳細한 것은 M. F. Atiyah and D. W. Anderson : K theony (1967), W. A. Benjamin. INC pag 71 을 參照하면 된다.

K-theory 에서 periodicity theorem (앞서의 Atiyah : K-theory 참조)에 의하면 $X \in \boldsymbol{P}$에 對하여

$$K^{-n}(X) \cong K^{-n-2}\ (X)$$

임을 알게된다. 그리하여 우리는

$$K^{-2}(X) \cong K^0(X) \overset{\text{Put}}{=} K^2(X)$$

$$K^{-1}(X) \overset{\text{Put}}{=} K^1(X) \cdots\cdots$$

및 $K^0(X, Y) \cong K^2(X, Y)$, $K^1(X, Y) \cong K^{-1}(X, Y)$을 갖게되고 따라서 앞서의 Theorem 3의 long exact sequence는 다음과 같이 extension이 된다.

$$\cdots \longrightarrow K^{-1}(Y) \longrightarrow K^0(X, Y) \longrightarrow K^0 X) \longrightarrow K^0(Y)$$
$$\longrightarrow K^1(X, Y) \longrightarrow K^1(X) \longrightarrow K^1(Y) \longrightarrow \cdots$$

以上을 綜合하여 다음을 얻는다.

$\boldsymbol{A}$: 모든 abelian group 로 된 category

$$K^n : \boldsymbol{P}^2 \longrightarrow \boldsymbol{A}$$
$$\tilde{K}^n : \boldsymbol{P}^2 \longrightarrow \boldsymbol{A} \ (n=0, \ \pm 1, \ \pm 2,)$$

는 contravariant functor 로서 다음을 만족시키는 것이다.

(i) $(X, Y) \in \boldsymbol{P}^2$ 및 $Y \subset X \in \boldsymbol{P}_0$ 에 對하여

$$\cdots \longrightarrow K^1(Y) \longrightarrow K^0(X, Y) \longrightarrow K^0(Y) \longrightarrow \cdots \text{ (exact)}$$
$$\cdots \longrightarrow \tilde{K}^{-1}(Y) \longrightarrow \tilde{K}^0(X, Y) \longrightarrow \tilde{K}^0(X) \longrightarrow \tilde{K}^0(Y) \longrightarrow \cdots \text{ (exact)}$$

(ii) $(X, \phi) \in \boldsymbol{P}^2$, $X \in \boldsymbol{P}_0$ 에 對하여

$$K^{-n}(X, \phi) \cong K^{-n}(X) \cong K^{-n-2}(X), \quad \tilde{K}^{-n}(X) \cong K^{-n-2}(X)$$

(iii) $X \approx Y$ in $\boldsymbol{P}$ or in $\boldsymbol{P}_0$ 이면

$$K^{-n}(X) \cong K^{-n}(Y), \quad \tilde{K}^{-n}(X) \cong \tilde{K}^{-n}(Y)$$

以上의 contravariant functor $K, \tilde{K}$ 를 抽象化한 것이 곧 一般化된 cohomology functor (또는 一般化된 cohomology theory) 인 것이다. 지금 이것을 定義하여 보기로 하자.

$\boldsymbol{P}$ 에서의 하나의 cohomology theory 는 contravariant functor

$$h^n : \boldsymbol{P} \longrightarrow \boldsymbol{A} \quad (n=0, \ \pm 1, \cdots)$$

의 sequence 로써

(i) $f_0 \simeq f_1$ (homotopic) in $\boldsymbol{P}^2$ 이면 $h^n(f_0) = h^n(f_1)$

(ii) $(X; A, B)$ 가 하나의 triad ($i, e.$, $A, B \subset X$, $A \cap B \neq \phi$, $A \cup B = X \in \boldsymbol{P}$ 이면 inclusion map

$$i : (A, \ A \cap B) \longrightarrow (X, B)$$

에 對하여

$$h^n(i) : h^n(X, B) \xrightarrow{\cong} h^n(A, A \cap B) \quad (\text{단 } (A \cup B = X)$$

(iii) $(X, A) \in \boldsymbol{P}^2$, $i : (A, \phi) \to (X, \phi)$, $j : (X, \phi) \to (X, A)$ 가 inclusion map 이면 다음의 long exact sequence 가 존재한다.

$$\cdots \longrightarrow k^{n-1}(A, \phi) \xrightarrow{\Delta^n} h^n(X, A) \xrightarrow{j^*} h^n(X, \phi) \xrightarrow{i^*} h^n(A, \phi) \longrightarrow \cdots$$

(Δ^n : connecting map)

이와 같이 定義한 cohomology theory 는 Eilenberg 및 Steenrod 에 의하여 定義한 (S. Eilenberg and N. Steenrod: Foundations of algebraic topology) 그 cohomology theory 를 一般化한 것이 된다. 왜냐하면 前者는 後者의 "If P is a point, then $H^q(P)=0$ for $q\neq 0$"라는 所謂 dimension axiom을 無視하고 있기 때문이다.

위와 같이 一般化된 cohomology theory에 관한 硏究는 1960年 中盤에서 부터 西歐의 젊은 數學者들에 의하여 行하여 지고 있으며, 이들에 의하여 Dold-Thom-Gysin의 homology group의 base에 관한 定理들이 證明이 되어 所謂 algebraic topology의 分野에 새로운 빛을 던져 주고 있다. 이들에 관한 간단한 性質들은 여기서 모두 省略한다. (E. Dyer: Cohomology theory (1969) W. A. Benjamin, INC. 및 K. Lee On cohomology Theories: 漢陽大學校論文集, (1971) 등을 要參照)

4. Sheaf theory

Sheaf theory가 algebraic topology, algebraic geometry 더 나아가서는 functional analysis의 各分野에 폭넓게 活用되고 있음은 우리들이 잘 아는 바이다. 特히 함수 해석의 一分科를 이루고 있는 Sato-hyperfunction theory는 거의 全的으로 sheaf-theory에 依存하고 있는 것이다.

Fibre bundle과 마찬가지로 주어진 位相 공간에 第二의 位相 공간을 대응시키는 것은 同一하지만 그 대응의 要領에 있어서 差異가 있는 것이다. 이 節에서는 presheaf, sheaf 등의 定義와 例 그리고 sheaf의 cohomology에 관하여 簡略이 記하여 보려한다.

주어진 位相空間 X에 對하여

$\boldsymbol{T}(X)=X$의 모든 open subset와 inclusion map로 된라 category라고 하자 이 때

$$\underset{\sim}{S}:\boldsymbol{T}(X)\longrightarrow \boldsymbol{M}_{A}$$

($\boldsymbol{T}_A$는 §1 要參照)인 contravariant functor가

(i) $\phi_U{}^U=1_{S}(U)$

(ii) $\phi_W{}^V\ \phi_V{}^U=\phi_W{}^U,\ \ U\subset V\subset W$ in $\boldsymbol{T}(X)$

(여기서 $\phi_V{}^U=\underset{\sim}{S}(i)$, $i: U\rightarrow V$ inclusion map)를 만족할 때, 이 $\underset{\sim}{S}$를 X上의 A-presheaf라고 한다. (M_A 代身 group 全體로된 category를 取하면 一般的으로 이것을 presheaf라 한다. 그러나 앞으로 A-presheaf를 우리는 presheaf라고 이글에서는 쓸 것이다)

EXAMPLE 2. Constant presheat 하나의 A-module을 M라 하자 $U\in\boldsymbol{T}(X)$에 대하여 $\underset{\sim}{S}(U)=M$라 하고 $\phi_V{}^U=1_M$ $(U\subset V)$라 하면 $\underset{\sim}{S}$는 하나의 presheaf가된다.

이것 以外에도 各 $U\in\boldsymbol{T}(X)$에 對하여 $\underset{\sim}{S}(\mathrm{U})$로서 U의 m 次元 singular cohomology를 대응 시켜도 $\underset{\sim}{S}$는 presheaf 된다. 이와 같이 preshaf는 얼마든지 그 例를 들수 있다.

지금 $\underset{\sim}{S}: \boldsymbol{T}(X) \to \boldsymbol{M}_A$를 하나의 presheaf라고 하자. $\boldsymbol{T}(X)$에서 $U \subset V$인경우 $V < U$와 같은 order를 도입시키면 $\boldsymbol{T}(X)$는 direct set가 된다. 그리하여 $(\boldsymbol{S}(U), \psi_V{}^U)$는 M_A에서 하나의 direct system이 된다. 따라서 각 $x \in X$에 對하여

$$S_x = \varinjlim_{x \in U \in J(X)} \underset{\sim}{S}(U)$$

인 direct limit를 얻게된다. 勿論 $\boldsymbol{M}_A$는 direct limit를 갖는 category 이므로 S_x는 A-module 이다. 이 경우 S_x는 x 上의 $\underset{\sim}{S}$의 germ이라 일컫는다.

지금 $\underset{\sim}{S}$를 X上의 preheaf라하자. $U \in \boldsymbol{T}(X)$에 對하여 공간 $U \times \boldsymbol{S}(U)$를 생각한다. 여기서 U는 X의 subspace로써의 位相 공간이며, $\underset{\sim}{S}(U)$는 discrete topology를 갖는다.

$$E = \bigcup_{U \in T(X)} (U \times \underset{\sim}{S}(U))$$

는 disjoint union이라 하자. 이 E 上에 equivalence relation을 다음과 같이 주자. $(x, s) \in U \times \boldsymbol{S}(U)$, $(y, t) \in V \times \boldsymbol{S}(V)$에서· $(x, s) \sim (y, t)$ iff $x = y$ and $\exists$ an open neighborhood W of $x \ni W \subset U \cup V$ and $S|W = t|W$, 여기서 $S|W$는 $\psi_W{}^U(S)$를 뜻한다.

$S = E/\sim$라하고 $\pi: S \to X$는 the map $p: E \to X \ni p(x, s) = x$로 부터 유도한 projection 이라하자 이때 (S, X, π)는 다음의 條件을 만족한다.

(i) S는 하나의 topological space,

(ii) $\pi: S \to X$는 local homeomorphism onto X,

(iii) $S_x = \pi^{-1}(x)$는 A-module (이것을 x 上의 stalk라고도 말한다),

(iv) S_x에서의 module-operations은 연속이다.

그리고 이 (S, X, π)를 sheaf over X라고 한다. (一般的으로 X上의 sheaf는 앞서의 조건 (i)~(iv)를 만족한 (S, X, π)를 말하며, 여기서는 presheaf로 부터 sheaf의 概念을 유도한 것이다) 誤解가 없을 때는 sheaf (S, X, π) 代身 S라고 쓰는 경우가 있다.

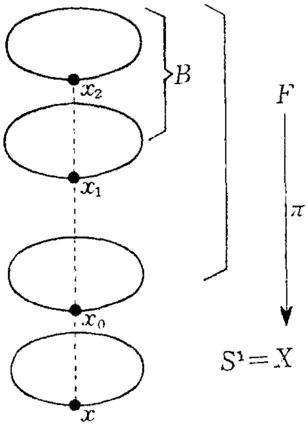
EXAMPLE 3. sheaf의 例 $X = S'$이고 $F = S^1 \cup B$ 여기서 B는 S'의 double covering 이라 하자

지금 $A = Z_3$ 이라하면 다음 그림에서 $\pi^{-1}(x) = \{x_0, x_1, x_2\}$ 인바 이것에 對하여

$$x_0 + x_1 = x_1, \quad x_0 + x_2 = x_2$$

$$x_1 + x_2 = 0, \quad x_1 + x_1 = x_2, \quad x_2 + x_2 = x_1$$

와 같이 定義하면 $\pi^{-1}(x)$는 Z_3-module 가되고 따라서 (F, X, π)는 Z_3-sheaf over



X인 것이다.

Sheaf들 사이의 map ψ : $(F, X, \pi)\to(G, X, \pi')$는 다음의 可換圖를 만족시키며 各 stalk 上에서는 A-module map 인것을 말한다.

$$\begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & G \\ & \pi\searrow\copyright\swarrow\pi' & \\ & X & \end{array}$$

$(F\times\pi)$를 sheaf라고 하자. $U\in \boldsymbol{T}(X)$에서 F에 보내는 연속 함수 $S: U\to F$가 $\pi S(x)=x$를 만족시킬때 U 上에서의 section이라 한다. 이들의 section 全體는 $\Gamma(U, F)$로 表示한다. 勿論 이때 $\Gamma(U, F)$는 A-module 이다. 그런데, presheaf S로 부터 만든 sheaf를 S라 한경우 一般的으로 $U\in \boldsymbol{T}(X)$에 對하여 $\Gamma(U, S)\neq\underset{\sim}{S}(U)$인것이다. 換言하면 $U\in \boldsymbol{T}(X)$에 對하여 $\Gamma(U, S)$를 대응시킨 presheaf를 $\tilde{S}$라하면 $\underset{\sim}{S}\neq\tilde{S}$ 이다. 特히 $\underset{\sim}{S}=\tilde{S}$가 되기 위하여서는 勿論 $\underset{\sim}{S}$가 特別한 條件 "$U=\bigcup_i U_i$이고 $g_i\in S(U_i)$ 및 $g_i|U_i\cap U_j=g_j|U_i\cap U_j$이면 $\underset{\sim}{S}(U)$ 속에 g가 존재하여 $g|U_i=g_i$ 이다"을 만족할 때 만이다. 우리는 $\underset{\sim}{S}$에 sheaf S를 대응시킨 대응을 L라하면 L는 다음과 같은 두개의 functor를 얻는다.

$\boldsymbol{F}_p$: 모든 presheaf들로된 category

$\boldsymbol{F}$: 모든 sheaf로된 category

$$F_p \underset{\Gamma(\ ,*)}{\overset{L}{\rightleftarrows}} F$$

여기서 $\Gamma(\ ,*)$는 앞서의 $\tilde{S}$와 同一한 presheaf 이다. 이 경우

(i) Γ는 left exact functor (ii) L는 exact functor

임이 증명된다. (G, E, Bredon: Sheaf theory, R. G. Swan; The theory of sheaves 등 要參照)

Φ를 $\Gamma(U, S)$의 元들의 suppost들의 family라하면 $\Gamma_\Phi(\ ,*)$도 또한 left exact functor 이다. 위와 같은 sheaf에 의하여 여러개의 새로운 sheaf를 만들 수 있지만 우리는 Γ_Φ의 functor를 利用하여 sheaf의 cohomology를 形成한 過程만 여기서 略記하기로 한다.

주어진 X上의 sheaf F에 對하여 그리고 $U \in \boldsymbol{T}(X)$에 對하여서

$$\mathrm{C}_0(U:F) = \Pi_{x \in U} F_x$$

라 하면 component 끼리의 연산으로 이것 亦是 하나의 presheaf가 된다. 이때 $L\underset{=}{C}_0$를 C_0라 表示하면 卽

$$L\underset{=}{C}_0(\quad :F) = C^0(X:F)$$

라 하면 $C^0(X:F)$는 flabby sheaf가되며 F는 $C^0(X:F)$의 subsheaf 임이 分明하다. 이때 $\mathrm{C}^0(X:F)$의 하나의 quotient sheaf $C^0(X:F)/F$도 또한 하나의 sheaf 이므로 이것의 위와 같은 flabby sheaf을 만들어 이것을 $C^1(X:F)$라 한다. 이와 같이 하여 하나의 sheaf F에 對하여 우리는 아래와 같은 flabby resolution of F를얻게 된다.

$$0 \longrightarrow F \longrightarrow C^0(X:F) \longrightarrow C^1(X:F) \longrightarrow \cdots$$

여기서 functor Γ_Φ를 작용하면

$$0 \longrightarrow \Gamma_\Phi(C^0(X:F)) \xrightarrow{\delta^0} \Gamma_\Phi(C^1(X:F) \xrightarrow{\delta^1} \cdots$$

를 얻고 이것은 A-module로써의 semi-exact sequence인것이다. 이렇게 하여 이것의 cohomology를 取하므로써

$$H_\Phi{}^n(X, F) = \mathrm{Ker}\,\delta^n/\mathrm{Im}\,\delta^n$$

인 F의 cohomoloy group를 얻는다. 勿論은 Flabby resolution은 Homology 代數에서와 같이 여러개로 取할 수 있으며 이것에 관계없이 $H_\Phi{}^n(X, F)$는 同型을 除外하고는 唯一的인 것이다. 하나 參考的으로 이야기 할것은 $\boldsymbol{F}$인 catogory에는 充分히 많은 injective sheaf가 존재하며 injective resolution을 取하여 얻은 위와 같은 cohomology는 Flabby resolution를 取하여 얻은 Cohomology와 同型이 됨이 증명되어 있는 것이다. (그러나 projective sheaf의 존재性은 一般的으로 증명되여 있지는 않다. 즉 projective sheaf가 존재하는가도 아직 모르고 있다) 이 節의 參考文獻은

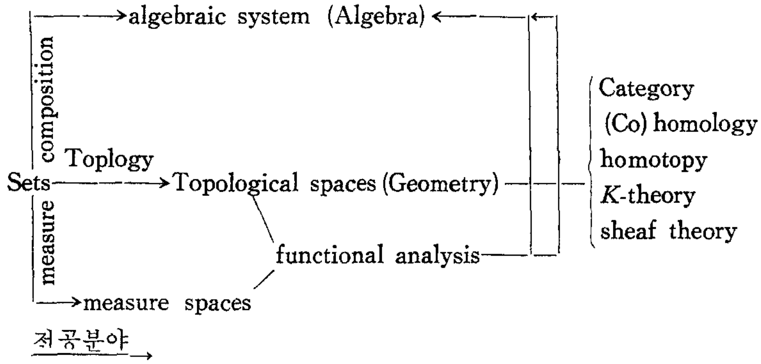
G. E. Bredon: *Sheaf theary*: McGraw-Hill Book Compary (1967)

R. G. Swan: *The theory of sheaves*: Univ. of Chicago

K. Lee: *Flementary sheaf theory*, to appear.

A. Grothendieck: *Sur quelques pints, d'algebre homologique*: Tohoku Math. J. Ser II, pp 120-221 (1957)

以上을 綜合하여 數學의 體系를 圖形化하면 다음과 같이 된다.



따라서 전공분야라 함은 수학의 기초적 手法인

category
(co) homology
homotopy
K-theory
sheaf-theory

등에 一段熟達한 다음에 비로소 決定되여져야 할줄 믿는다.

—The end—

한양대학교