Bull. Korean Math. Soc.
Vol. 9 (1972) pp. 17-20

Category 의 completion 에 關하여

任 昌 求

1. 序 言

Category 論은 1945年에 Eilenberg, S. 및 Maclane, S. 兩敎授가 共同으로 發表한 論文 *General theory of natural equivalences* [1]로부터 始作 되었으며, 其後 이 理論이 顯著하게 發展하는데 近十餘年이 걸렸다고 보고 있다.

今世紀初까지만 하여도 數學은 各各 細分된 分野別로 數學的 對象의 硏究가 活潑히 이루어 졌었으나 近來에 와서는 細分된 分野의 硏究가 統合되는 方向으로 흐르면서 數學的 對象物사이의 寫像의 分析과 이들 數學的 對象의 範圍 (class)에 對하여 關心을 갖고 이에 對한 硏究가 始作되어 오늘날의 category 論을 이룩 하였다고 생각한다.

이 새로운 關心事들은 category 와 functor 의 理論에 依해서 適切히 表現되고 있으며 category 및 functor 라는 말은 現在 數學의 여러 分野에서 使用되고 이 理論은 우리가 생각 하고자 하는 數學的 分野(例컨데 代數學 位相數學 等)에서의 寫像 및 對象(object)의 槪念을 抽象的인 數學的 構造에서의 陳述이 證明될 수 있도록 抽象化한 것이라고 생각 한다.

Category 論의 顯著한 價値는 많은 相異한 數學的 分野의 理論을 category 理論으로 說明될 수 있는 것에 있으며 또 各分野의 理論을 硏究하는데 좋은 方法을 付與하는데 있다. 이리하여 category 論은 統一性을 가진 數學의 한 基礎理論이라고 생각한다.

特히 最近 category 論에서 complete category 에 對한 硏究가 活潑하게 이루어지고 있으며 이 중에서도 category 의 completion 에 對한 硏究가 J.Lambeck [2], J.R. Isbell [3], [4], T. Vera [5], J.F. Kennison [6], [8] 氏에 依하여 相當히 이루어지고 그 理論을 代數學 및 位相幾何 等에 많이 活用하여 그 分野에서의 理論을 再構成해 가고 있다. 단 Fuch. U 敎授는 Infinite Abelian group에 category 理論을 많이 適用하여 새로운 方法으로 群論을 陳述하고 있으며 linear topology ([7] 29. p 및 65. p 參照)를 가진 group의 completion에 關한 硏究結果를 많이 發表 하였음.

本欄에서는 category의 completion에 關한 基本性質을 論하고 open problem을 紹介 하고자 함.

2. Category의 completion

本欄에서 使用되는 用語는 [2]에서의 用語에 따르겠으며 모든 diagram은 small index category I를 가졌다고 假定하고 small category의 completion 만을 다룬다.

(定義 1) 모든 small category $\underset{\sim}{A}$에 對하여 functor $F: \underset{\sim}{A}\to\underset{\sim}{B}$는 $\underset{\sim}{B}$의 모든 對象物(object)이 한 diagram $F\circ\Gamma: I\xrightarrow{\Gamma}\underset{\sim}{A}\xrightarrow{F}\underset{\sim}{B}$의 supreme (infimum) 일때에 限해서 sup-dense (inf-dense)라 한다.

(定義 2) Category $\underset{\sim}{C}$는 $\underset{\sim}{C}$에서의 모든 diagram가 Γ supremum (infimum)을 가질 때 sup-complete (inf-complete)라 한다. 特히 $\underset{\sim}{C}$가 sup이고 inf-complete 라면 $\underset{\sim}{C}$를 complete category 라 한다.

(定理 1) 한 *small category* $\underset{\sim}{A}$에서 *complete category* $\underset{\sim}{B}$로의 *functor*로서 *inf-preserving*이고 *sup-preserving*이며 *sup-dense embedding functor*가 항상 존재 한다 [2].

(例 1) $\underset{\sim}{B}$를 functor $[C), A]: \underset{\sim}{A}^o\longrightarrow Ens$ ($A\in\underset{\sim}{A}$들의 product의 모든 subject 들로된 $[\underset{\sim}{A}^o, Ens]_{inf}$의 subcategory라면 $\underset{\sim}{B}$는 complete category 이고 functor $H^o: \underset{\sim}{A}\to[\underset{\sim}{A}^o, Ens]_{inf}$ ($H^o(A)=[C), A]$)는 sup-dense, inf-preserving, sup-preserving인 embedding functor 이다. 但 $\underset{\sim}{A}$는 small이다. 그러나 定理 1에서 말한 functor로서 inf-dense인 것이 있는지 없는지 아직 알려져 있지 않고 있다.

또 $[\underset{\sim}{A}^o, Ens]_{inf}$가 항상 inf-complete ([2], 21 p.) 이라는 것은 알려졌으나 이것이 항상 sup-complete가 되는지 與否도 아직 알려져 있지 않다.

(定義 3) Category $\underset{\sim}{A}$를 한 complete category $\underset{\sim}{C}$의 small full subcategory 라 할때 $\underset{\sim}{A}$와 $\underset{\sim}{C}$ 사이에 proper complete category가 存在하지 않으면 $\underset{\sim}{C}$

를 $\underline{A}$ 의 completion 이라 한다.

즉 $\underline{C}$ 가 $\underline{A}$ 의 completion 이라면 $\underline{A} \subset \underline{B} \subset \underline{C}$ 이고 $\underline{B}$ 가 complete category일 때 $\underline{B}=\underline{C}$ 이다.

(例 2) 例 1에서 말한 category $\underline{B}$ 는 small category $\underline{A}$ 의 한 completion 이고 $\underline{A}$ 가 group 이면 $[\underline{A}^{o}, Ens]_{inf}=[\underline{A}^{o}, Ens]$ 는 $\underline{A}$ 의 completion 이다.

3. Normal completion

(定義 4) $\underline{E}$가 proper intermediate inf-complete 또는 sup-complete category 를 갖지 않고 small category $\underline{A}$ 의 completion 이면 $\underline{E}$ 를 $\underline{A}$ 의 normal completion 이라 한다.

(定義 5) $\underline{A}$ 를 category 라 하고 I와 P를 $\underline{A}$ 의 部分 集合이라 하자. I와 P의 要素를 各各 injection 및 projection 이라 부른다. 또

(i) I와 P는 $\underline{A}$ 의 모든 isomorphism 를 포함하는 subcategory 이고

(ii) $\underline{A}$ 의 모든 morphism f는 projection h와 injection g와의 composition $g \cdot h$ 이며

(iii) 모든 $\underline{A}$ 의 injection 은 monomorphism 이고 모든 projection 은 epimorphism 이다.

이때 한 順序의 짝$(\underline{A}, I, P)$를 bicategory $\underline{C}$ 라 한다.

(定理 2) $\underline{A}$ 를 *complete category* $\underline{C}$ 의 *small full subcategory* 라 하자. $\underline{C}$가 *bicategory* 의 構造$(\underline{A}, I, P)$를 갖는다면 $\underline{A}$ 의 *normal completion* $\underline{E}$ $(\underline{A} \subset \underline{E} \subset \underline{C})$ 가 存在한다. $\underline{A}$ 의 $\underline{E}$ 내로의 *embedding functor* 는 $\underline{A}$ 에서의 *small diagram* 의 모든 *suprenum* 과 *infimum* 를 保存한다. [6]

(例 3) Prod $(\underline{A})$를 $A_i \epsilon \underline{A}$ 에 對한 모든 product $\pi_i A_i$ 들로된 $\underline{A}$ 의 full subcategory 라 하고 prod $(\underline{A})$ 의 各對象(object)의 모든 extremal subobject 로 된 full subcategory 를 $M^{*\prime}$$-$sub(prod$(\underline{A})$)로 表示하면 이것이 $\underline{A}$ 의 한 normal completion 이다.

모든 minimal small-complete extension 이 normal completion 인지 與否가 알려져 있지 않고 있다.

(例 4) 한 順序集合 L 의 要素를 category 의 對象物로 하고 任意의 對象

物 a, b에 對한 morphism set $[a, b]$를

$$[a,b]=\begin{cases}\{(a,b)\} & (a\leqq b \text{ 이면}) \\ \phi & (a\nleqq b \text{ 이면})\end{cases}$$

로 定할 때 L은 small category를 이룬다.

Complet lattice를 위에서 말한바와 같이 category로 생각하면 complete category를 이룬다.

(定理 3) 任意의 順序集合 L에 對하여 다음 條件「任意의 *complete lattice* $\bar{L}'$와 順序를 保存하는 *injection* $f' : L \to \bar{L}'$에 對해서 $\varphi\circ f=f'$인 順序를 保存하는 *injection* $\phi : \bar{L} \to \bar{L}'$가 존재한다」를 만족하는 *complete lattice* $\bar{L}$와 順序를 保存하는 *injection* $f: L \to \bar{L}$가 존재한다. [9]

定理 3에서의 $\bar{L}$를 category로 생각 할 때 category L의 한 completion이 된다.

References

[1] Eilenberg, S. and Maclane, S., *General theory of natural equivalences*, Trans. A.M.S., 58 (1945), 231—294.

[2] J. Lambek, *Completions of categories*, Springer, (1966).

[3] J.R. Isbell, *Structure of categories*, (Lecture Note, Math. 24) Pull. A.M.S. (1966), 619—655.

[4] J.R. Isbell, *Normal completions of categories*, (Lecture Note, Math. 47) Springer(1967), 110—155.

[5] Tra Kava Vera, *Completion of small categories*, Coment, Math. Univ. Carolina (1967), 581—633.

[6] J.F. Kennison, *Normal completions of small categories*, Canad. J. Math. 21 (1969), 196—201.

[7] L. Fuchs, *Infinite abelian group*, Academic, N.Y. (1970).

[8] J.F. Kennison, *On limit-preserving functors* Ill, J. Math. 12 (1968), 616—619.

[9] G. Birkoff, *Lattice theory*, A.M.S. Colloa., (1948).

仁荷工科大學