고등학교에서의 극한개념지도에 관하여

金　　興　　基

목　　차

Ⅰ. 서　　론

1. 연구동기

"현대 수학은 물리, 화학, 유전과 인구문제 및 경제학, 심리학, 사회학 등 모든 분야에서 필요 불가결의 수단으로 되어 있으며 지금으로부터 20년만 더 지난다면 모든 분야에서 현대 수학의 철저한 修學없이는 어떤 연구도 이루어질 수 없게 될 것이다"라고 1963년 11월 30일에 行한 OEEC Seminar에서 현대 해석학의 석학인 Stone 교수의 말은 현대수학이 담당하고 있는 역할이 얼마나 큰 것인가를 잘 말해주고 있다. ([4] 통권 17호 p16)

그러나 量的으로 質的으로 팽창하기만 하는 수학을 어떻게 효과적으로 지도하여야 할 것인가는 기실 큰 문제거리인 것이다.

역사적으로 고찰해보면 수학의 발전 과정이 변천함에 따라 학교에서의 수학 교육도 점차로 변천하여 왔다. 특히 최근에는 수학 교육은 보다 사회적으로, 보다 실용적으로 취급되어야 한다고 주장되어 실용수학, 생활수학이 강조되어 왔다. 그러나 현대 수학은 직접적인 응용만을 의도하는 것은 아니다.

수학 자체에 있어서도 구체적인 부문과 추상적인 부문이 있다. 그러나 두 부문이 결코 분리되어 있는 것은 아니다.

수학은 추상과 응용의 연쇄 관련하에 발전하는 것이다.

다시 말해서 응용면만을 목표로해서 수학을 연구할 때 모든 문제가 해결되지는 못하며 추상화된 분야에서 연구를 하므로서 구체적인 분야에서의 여러가지 문제에 응용된다.

만일 수학을 말단적인 실용수학 생활수학 자체에만 치중해서 이에대한 개별적인 연구만을 거듭한다면, 대상이 광범위하고 복잡하기 때문에 해결할 수 없는 문제가 허다히 생기며 수학자체에서 뿐만 아니라 기타 과학의 발전을 기하기 힘들다. ([4] 통권 14호 p9)

이런 견지에서 볼때 수학 교육이 현대화로의 approach를 서두르게 된 것은 당연한 일이다.

고등학교 교과 과정에서 구조(공리계 포함), 집합, 논리, 함수등의 지도에 문제거리가 있지만 해석학의 기초가 되는 극한 개념의 지도 방법을 개선하는 것이 매우 시급한 일이다.

특히 미분적분법은 응용이 넓기 때문에 고등학교과정에서 중요하게 취급되고 있다.

그러나 도입 과정에서 해석학의 생명이라고 할 수 있는 극한 개념을 소홀히하여 직관에만 의존

하고 있으며, 응용에 치중하여 계산법 위주로 되어 있다.

이와 같은 지도를 받은 학생은 후에 실제로 미적분을 이용하려 해도 그 기초 개념의 파악이 불충분하여 자기가 습득한 지식을 실제로 運用하기에는 매우 힘들 것이다.

사실, 우리는 고등학교 학생으로부터 "미적분의 문제는 잘 풀 수 있지만 미적분이 무엇인지는 모른다"라는 말을 많이 듣고 있다.

그러므로 수학교육 현대화 경향의 한 부분인 나선형적 지도를 통하여 보다 논리적으로 엄밀한 극한 개념이 도입되어 사용되어야 한다.

2. 연구목적

함수의 극한에 관한 지도 방법에는 대강

1) 직관에 의존하는 방법
2) 수열을 이용하는 방법
3) 근방을 이용하는 방법
4) $\varepsilon-\delta$ 논법

의 4가지 방법이 있는데, 현재 우리나라에서 쓰이고 있는 직관적인 방법에 대한 문제점을 따져보고, 수학교육에 관하여 활동적인 연구를 하고 있는 OEEC 가맹국중 프랑스, 미국의 SMSG와 UICSM, 그리고 일본의 현재 쓰이는 교과서와 1973년으로 예정된 고등학교 수학 교과 과정 개편에 대비하여 실시된 고등학교 교사 강습의 지도 자료를 통하여 다른 나라에서의 극한에 관한 지도방법을 알아 본 후에 고등학교에서 극한 개념을 지도하는데 가장 바람직한 방법을 찾아내는 것이 이 논문의 목적이다.

Ⅱ. 우리나라의 현황 및 비판

1. 고등학교 교육과정 해설

고등학교 교과서 내용의 총체적인 시사를 하고 있는 문교부에서 발행된 고등학교 교육과정 해설에 관하여 알아본다.

서기 1955년에 공포된 교과 과정을 개정하여 서기 1963년 12월에 공포된 고등학교 교육과정 해설에서 수학과의 개정 요점에는 "1. 수학의 지식, 기능 습득의 수준을 높여서 현대의 발달된 과학 기술편에 실제로 활용할 수 있게하는 동시에 다른 교과도 보다 높은 수준에서 학습될 수 있도록 하며 특히 상급학교에서의 전공 교육을 보다 효과적으로 받을 수 있게 한다."([2]p. 189)고 하여 수학의 지식 수준을 높이고 후에 상급학교에서의 교육에 기초내지 연관이 될 수 있도록 하여야겠다고 말하고 있다.

이런 의도하에 극한에 관한 부문의 지도의 실제로 수학 I의 지도 목표 중에서는 "수열의 극한의 기본적인 개념 법칙을 이해시키고 이것을 기본으로 하여 함수의 극한 개념을 직관적으로 알림과 동시에…"([2], p. 209)와 같이 서술했고 그 지도 내용면에서는 "수열의 극한에 대하여는 직관적으로 취급하고 수렴 발산의 의미를 이해시킨다.

또 수열의 극한의 응용으로서 무한등비 급수를 포함한다"([2] p. 201)란 말이 있고 다시 유의점에서는 "수열의 극한에서 함수의 극한까지 지도하여야 한다."([2] p. 212)라고 되어 있는데 위에서 말한바와 같이 수열의 극한을 사용하여 함수의 극한을 지도하기 위하여는

$$\lim_{x\to a} f(x)=l \Longleftrightarrow (1)\ {}^{\forall}\varepsilon>0,\ {}^{E}\delta>0,\ 0<|x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-l|<\varepsilon.$$

$$\Longleftrightarrow (2)\ a\text{에 수렴하는 임의의 수열 } \langle x_n\rangle\text{에 대해서 수열}\langle f(x_m)\rangle \text{이 } l\text{에 수렴한다.}$$

는 방식을 사용해야만 한다.

〔정리〕 (1)과 (2)는 同値이다. ([14] p. 73 또는 〔15〕 p. 76)

〔증명〕 (1)⇒(2) : $\langle x_n\rangle\to a$ 하자. (1)에 의해서 ${}^{\forall}\varepsilon>0$에 대하여

$$0<|x-a|<\delta\Rightarrow|f(x)-l|<\varepsilon$$

을 만족하는 δ가 존재한다. 또 이 δ에 대하여

$$n>N\Rightarrow\ |x_n-a|<\delta$$

를 만족하는 번호 N이 존재한다. 이 두 식으로부터, ${}^{\forall}\varepsilon>0$에 r 하여

$$n>N\Rightarrow|f(x_n)-l|<\varepsilon$$

이 되는 번호 N이 존재하게 되어 $\langle f(x_n)\rangle\to l$이다.

(2)⇒(1) : 만일 $\exists\varepsilon>0,\ {}^{\forall}\delta>0,\ \exists x;$

$$0<|x-a|<\delta\wedge|f(x)-l|\geq\varepsilon$$

라 하자. $\delta_n=\dfrac{1}{n}(n=1,2,3,\cdots)$으로 택할 때 위의 조건에 맞는 x를 각각 x_n이라 하면

$$\langle x_n\rangle\to a \text{ 이지만 } \langle f(x_n)\rangle\to l \text{이 아니다.}$$

즉 (2)에 모순이다.

이 정리에 대한 일체의 설명도 없이 이것을 사용하여 오직 직관에만 호소하여 함수의 극한을 다룬다는 것은 매우 위험한 일이다.

뒤에 나오는 보기에서와 같이 수열의 극한에서 limit point 와 limit 를 혼동하는 것과 똑같은 오류를 범할 위험성이 다분히 있기 때문이다.

그리고 수학(II)의 지도 목표에서는 "수열의극한의 개념을 이해시켜 다시 그들을 기본으로하여 함수의 극한의 개념을 직관적으로 이해시키고…" ([2] p. 219)와 같이 수학 (I)에서와 같게 말하고 있으며 지도 내용에서는 다음과 같은 말들을 하고 있다.

"무 수열의 극한을 취급하지만 구체적인 수열에 대하여 항의 번호가 한없이 커갈때 항의 값 어떻게 변화하여 가는가를 조사하고 수렴 발산의 의미를 명백히 한다. 그리고 실제 취급하는 무한 수열은 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$, $\{r^n\}$ 등의 정도로 함"([2] p. 225)

함수의 극한과 연속성에 대하여는

"이것(함수의 극한)은 직관적으로 취급한다."

"함수의 연속성은 직관에서 발전시켜 근방을 이용하여 논리적으로 전환시킨다"([2] pp. 225 ~226)

라 하였는데 현재 대부분의 교과서가 전혀 근방의 개념 또는 수열의 극한으로의 환원과정을 이용하지도 않고 있을뿐만 아니라 논리적으로 되어 있지도 않다.

또 함수의 연속성에만 근방을 이용하고 그의 기초적인 함수의 극한과 수열의 극한에 대하여는 직관에만 의존한다는 것도 이상스러운 일이다.

결국 양쪽을 모두 직관에만 의존하든지 (이것은 수학 교육의 현대화에 역행하는 일은 물론이지만) 아니면 양쪽 모두 근방 또는 수열의 극한으로의 환원과정을 이용하여 논리적으로 다루어야 할 것이다.

2. 현행 교과서

고등학교 교육과정 해설에 기저를 둔 현재 사용되고 있는 교과서들의 내용은 거의 전부가 같다.

극한의 개념을 처음 무한 수열에서 도입하였고 다시 함수에 연장하고 있는데 우선 수열에서부터 살펴 본다.

"일반으로 무한 수열

a_1, a_2, a_3, $\cdots a_n \cdots$에 있어서 항의 번호 n을 한없이 크게 할 때 a_n이 일정한 값 a에 한없이 접근하면 그 무한 수열은 a에 수렴한다고 말하고 a를 무한 수열의 극한값, 또는 극한이라고 한다."([1] 참조)

라고 극한을 정의하였고 이것을 "$n\to\infty$ 일때 $a_n \to a$" 또는 "$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$"로 나타낸다고 하였는데 위와 같은 방법의 직관에만 호소하는 정의는 다음의 보기에서와 같은 혼란이 일어날 수도 있다.

〔보기 1〕 수 열

$a_1=1$, $a_2=\frac{1}{2}$, $a_3=\frac{2}{3}$, $a_4=\frac{3}{4}$, $a_5=\frac{4}{5}$, $\cdots$, $a_n=\frac{n-1}{n}\cdots$ 은 n이 한없이 커짐에 따라 a_n은 얼마든지 2에 가까이 가지만(2는 이 단조증가 수열의 上界이다) 이 수열은 2에 수렴하지는 않는다.

〔보기 2〕 수 열

$a_1=0$, $a_2=2-\frac{1}{2}$, $a_3=1-\frac{1}{2}$, $a_4=2-\frac{1}{3}$, $a_5=1-\frac{1}{3}$, $a_6=2-\frac{1}{4}$, $\cdots$에서 $S=\{a_1, a_2, a_3, \cdots a_n \cdots\}$이라 할 때 명백히 1과 2는 집합 S의 Cluster point 이지만 수열 S의 limit 는 아니다. (즉 S는 2 또는 1에 수렴하지 않는다.)

다시 말하면 위와 같은 직관적인 定義만으로는 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=a$ 라는 말이 수열 $\langle a_n\rangle$이 a의 임의의 ε근방에 frequently in (Cluster point)인지 eventually in (limit)인지 구별할 수 없는 혼란을 초래하는 것이다. ([13], p. 65)

그리고 수열에서 보다는 좀더 일반적인 개념으로 함수의 극한을 다루고 있는데 이를테면 함수 $\frac{1}{x}$의 값은 graph 에서 명백한 바와 같이 x의값이 한없이 커갈때 그 함수값은 한없이 0에 접근하여 가며 이 사실을 "$x\to\infty$일 때 $\frac{1}{x}\to 0$ 또는 $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ 이라고 쓴다" 는 식으로 직관적인 보기

를 든 후에 일반적으로

"x가 상수 a에 한없이 접근하여 갈 때 $f(x)$의 값이 일정한 값 b에 한없이 접근하여 가면 이 사실을 $x \to a$일때 $f(x) \to b$ 또는 $\lim_{x \to a} f(x) = b$라고 나타내며 $x \to a$일때 $f(x)$는 b에 수렴한다. 또는 $x \to a$일 때 $f(x)$의 극한은 b라 한다."([1] 참조) 라고 하여 함수에서의 극한 개념을 도입하였는데 여기에서도 앞의 수열의 경우와 같이 다음 보기와 같은 혼란이 일어날 수도 있다.

〔보기 1〕 함수 $f(x) = x+2$는 $x \to 1$일때 그 함수치는 4에 한없이 가까이 간다. (monotonically increasing)

그러나 4는 $x \to 1$ 일때 이 함수의 극한치는 아니다.

〔보기 2〕 다음과 같이 정의된 R—R 함수(정의역과 치역이 모두 실수)를 보자.

$$f(x) \begin{cases} 1 : x = 2 + \frac{1}{n}, \ n \in Z(\text{integer}) \\ \frac{1}{x} : \text{Otherwise} \end{cases}$$

위의 함수에서 x가 한없이 2에 가까이 갈때 $f(x)$는 한없이 $\frac{1}{2}$에 가까이 가게되는 x들이 존재한다.

그러나 $x \to 2$일때 $f(x) \to \frac{1}{2}$이 아님은 명백한 일이다.

위의 내용들은 아직까지 ε—δ 논법이나 근방을 논리적 전개는 엄두도 못내고 직관적인 처리만 하고 있는 우리나라 교과서들이 당면하고 있는 문제점들이다.

또 위와 같은 직관에만 의존하는 도입 때문에 극한의 성질에 대해서는 아무런 정확한 언급도 할 수 없게 되었고, 실용적으로 많이 쓰이고 있는 극한의 四則은 무조건 받아들여 암기하여 사용하도록 하고 있다.

〈총 괄〉

물론 너무 어려운 개념의 문제(π나 e의 값을 구하는 문제)를 하나 하나 설명하여 해결하지 않아도 그것의 사용에 큰 영향을 받지 않는 것들이라면 몰라도, 「극한」은 그것을 바탕으로 하여 해석학이 전반적으로 다루어지고 있는 내용이므로 현재와 같이 직관적으로 취급을 하는 것은 근본적인 아무런 토대도 없이 말단적인 계산 방법만 다루게 되어 개념을 파악하는 것은 거의 불가능한 상태에 있다.

극한의 취급에 관한 우리나라의 고등학교 교육 과정 해설과 현행 교과서 내용들에 관하여 종합적으로 제기되는 문제점을 제시하면 다음과 같다.

극한 개념의 직관적인 도입과 취급으로 인하여

(1) 정의 자체에서 혼란이 일어날 위험성이 있다.

(2) 수학의 생명이라고 할 수 있는 논리적인 엄밀성이 결여되어 있다.

(3) 말단적인 계산 취급에만 익숙하고 근본 개념을 이해하지 못하므로 원활한 운용을 할 수 없다.

고로 중요하다고 하여 고등학교에서 취급되는 미적분학이 무의미 하게 되었다.

(4) 상급학교에로의 수학에 연관성이 없다. (大學에서 ε—δ 논법으로 같은 내용을 다시 시작함)

(5) 수학과 학습 목표 중 하나인 논리적이고 체계화된 사고 방법을 갖게 할 수 없다.

Ⅲ. 외국의 현황 및 비판

1. 프랑스

수학교육 현대화는 구라파의 OEEC 가맹국에서도 활동적으로 연구되고 있는데 이곳에서 제시되고 있는 Curriculum의 내용을 보면 극한 부분에서 다음과 같이 논했다.

"극한 개념을 도입하여 함수의 미분적분을 비교적 엄밀히 다루는 한편 나아가서는 함수의 연속성, 증감, 대소관계, Taylor 급수의 구조 등을 유리함수 초등함수에서 다룬다."([4] 통권 14 p.18)

여기서는 OEEC 가맹국중 가장 먼저 수학 교육 현대화를 시작한 프랑스의 교과서를 살펴 보겠다.

프랑스는 전통이 강한 나라지만 수학교육의 새로운 계획을 제일 먼저 시작했으며 특히 극한에 관한 부분을 고등학교 교과에서 강조하여 neighbourhood의 개념을 가르쳐야 한다고 제안하고, 이것에서 연속 개념을 이끌어 오고 또 이것이 limit와 Continuity 개념을 자연스럽게 이끌어올

수 있도록 하였다.

표시된 page는 〔8〕을 참조한 것이다. 〔8〕에서는 다른 어떤 교과서 보다도 엄밀한 정의를 하고 있으며 모든 이론의 전개가 논리적이다. 논리 기호를 많이 사용한다.

가능한한 일찍부터 엄정한 정의와 숙달된 논리체계를 습득하는 것은 좋은 일이다.

극한의 개념을 완전한 $\varepsilon-\delta$ 논법을 사용함으로써 직관적이고 애매한 것으로부터 풀려 나갔고 진정한 의미에서의 수학(Arithmetic이 아닌)을 논하고 있다.

1) 극한의 정의

함수 $y=x^2$에 대하여 $\varepsilon=\frac{1}{1000}$일 때

$\delta=\frac{1}{5000}$이면 $|x-2|<\delta \Rightarrow |f(x)-4|<\varepsilon$임을 보이고(사실은 $\delta=\min\left(1,\frac{\varepsilon}{5}\right)$이다). $|x-2|<\delta$임은 필요 조건이 아니고 충분 조건임을 강조했다. 극한의 정의는 다음과 같다.

〈정 의〉

함수 $y=f(x)$로 정의된 수가, x가 x_0에 가까이 갈때, l에 가까이 간다.

또는 극한 l을 갖는다는 것은:

1°, x_0를 포함하거나, 또는 적어도 x_0를 끝점으로 갖는 한 구간에서 $f(x)$가 정의되고, 2°, 아무리 작은 양수 ε에 대하여도 다음 조건을 만족하는 양수 δ가 존재함을 뜻한다.

$$|x_1-x_0|<\delta \text{ 이면 } |f(x_1)-l|<\varepsilon.$$

기호로는 $x\to x_0$일 때 $f(x)\to l$로 나타낸다.

위 정의는 일반적으로 x_0가 D_f (f의 domain)의 limit point를 가정하지 않고 특수한 경우만을 취급하고 있다. (정의1°). 따라서

$$f(x)=x^2,\ D_f=\left\{\frac{1}{n}\middle| n\in Z^+\right\}$$

와 같은 꼴의 함수에 대해서 $x\to 0$ 일때의 극한은 따질 수 없다. 또 주의에 있기는 하지만(p. 110 주의 5) $x_1\neq x_0$ 즉 $0<|x_1-x_0|$임을 말하지 않았기 때문에 $x_0\in D_f$ 인 경우에 $f(x_0)$가 극한에 아무런 상관이 없음을 말할 수 없다.

또 위 정의를 다음과 같이 논리 기호를 써서 나타내고 있다.

〔$x\to x_0$ 일때 $f(x)\to l$〕$\Longleftrightarrow \varepsilon>0,\ {}^{\forall}\varepsilon,\ {}^{\exists}\eta,\ \eta>0$ & $({}^{\forall}x_1, |x_1-x_0|<\eta \Longleftrightarrow |f(x_1)-l|<\varepsilon)$ 이런 기호들을 일찍부터 사용하는 습관을 붙여 온다면 무난하겠으나 우리에게는 어순(語順)이 歐美式이기 때문에 어려운 점이 있다 하겠다.

함수의 극한에 관한 두번째 보기는 $y=3x+2$로써 $x\to 1$일때 $f(x)\to 5$임을 말하고 있다.

${}^{\forall}\varepsilon>0,\ \delta=\frac{\varepsilon}{3}$으로 하면 $|x-1|<\delta \Rightarrow |f(x)-5|<\varepsilon$인데 이 경우는 함수 $y=x^2$보다 훨씬 쉽게 이러한 δ를 찾아 낼 수 있지만 이때 $|x-1|<\delta$는 $|f(x)-5|<\varepsilon$이 되기 위한 충분 조건일 뿐만 아니라 동시에 필요조건도 되므로(즉 $|x-1|<\delta \Longleftrightarrow |f(x)-5|<\varepsilon$) 정의에 앞선 도입으로서는 다소 복잡하지만 $y=x^2$을 사용하고 있음에 주의해야 할 것이다.

2) 함수의 연속

연속의 정의는 다음과 같다.

〈정 의〉 함수 $f(x)$가 x_0에서 연속이라 함은

1^0, $x=x_0$에서 $f(x)$가 존재하고

2^0, $x\to x_0$일때 $f(x)\to f(x_0)$.

여기서는 $\varepsilon-\delta$ 논법을 쓰지않고 있다.

1^0) $x_0\in D_f$

2^0) ${}^{\forall}\varepsilon>0,\ {}^{\exists}\delta>0: |x-x_0|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(x_0)|<\varepsilon$

이렇게 정의하면 잘 알고 있는 바와 같이 x_0가 D_f의 isolated point일 때는 무조건 그 점에서연속이다. (〔14〕 5.74 : 〔16〕 pp. 67~68 에서는 isolated point에 대하여 따로 정의하고 있지만, 이것은 蛇足이라 할 수 있겠다.)

2^0에서 이 사실을 설명하기 위해서는 명제 「$p\to q$」에서 p가 false일 때는 이명제는 항상 true라는 것을 알아야만 할 것이다. 어느 쪽이 쉬운가는 학생들이 논리를 어느 정도로 알고 있는지가 문제가 될 것이다.

함수의 연속성에 관하여는 상당히 어려운 문제들이 다루어지고 있다. 예를들면,

(문제 421) $0\leqq x\leqq 1$에서 정의된 함수

$$f(x)\begin{cases} 0.1, & 0\leqq x<0.9 \\ 0.01, & 0.9\leqq x<0.99 \\ 0.001, & 0.99\leqq x<0.999 \\ \cdots\cdots & \\ 0, & x=1 \end{cases}$$

는 $x=1$에서 연속이고 $^\forall\varepsilon>0$에 대하여 $1-\varepsilon<x<1$에서 무한히 많은 불연속점을 가짐을 보여라.

3) 극한에 관한 정리들

엄밀한 일반가설(항목 90. D_f와 Dg는 x_0를 포함하거나 또는 적어도 x_0를 한 끝으로 하는 한 구간(ㄴ)을 포함하며 $x\to x_0$일때 $f(x)\to a$, $g(x)\to b$이다)을 세워 놓고 정리로써 다음에 보이는 함수의 합, 상수배, 곱, 몫(물론 이 경우 분모함수의 극한은 $\neq 0$)의 극한에 관해 논하고 있다.

〔정리 1〕 $x\in(\mathrm{L})$, $^\forall x$, $S(x)=f(x)+g(x)$로 정의된 함수 $S(x)$는 $x\to x_0$일때 $S(x)\to a+b$이다.

〔정의 2〕 $x\in(\mathrm{L})$, $^\forall x$, $F(x)=kf(x)$로 정의된 함수 $F(x)$는 $x\to x_0$일때 $F(x)\to ka$이다.

〔정리 1〕과 〔정리 2〕의 系

$x\in(\mathrm{L})$ $^\forall x$, $\mathrm{H}(x)=kf(x)+l\cdot g(x)$로 정합의된 수 $\mathrm{H}(x)$는 $x\to x_0$일때 $H(x)\to ka+lb$이다.

〔정리 3〕 $x\in(\mathrm{L})$, $^\forall x$, $p(x)=f(x)g(x)$로 정의된 함수 $p(x)$는 $x\to x_0$일때 $p(x)\to ab$이다. (주의) 수 a,b중 하나가 0일때라도 제외되지는 않는다. 이 때의 극한치는 0이다. $a=b=0$일때도 역시 같다.

〔정리 4〕 $b\neq 0$이고

$x\in(\mathrm{L})$, $^\forall x$ $g(x)\neq 0$에 대해서

$q(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$로 정의되는 함수 $q(x)$는

$x\to x_0$일때 $q(x)\to\dfrac{a}{b}$이다.

(주의) $a=0$일때도 제외되지는 않는다. 이때 극한치는 0이다. 다른 특별한 경우는 $f(x)$가 상수 k일때며 이때 함수 $\dfrac{f(x)}{g(x)}$는 $x\to x_0$일때 $\dfrac{k}{b}$로 가까워 진다.

여기서 증명은 완전히 생략했다. 〈이 성질의 증명은 정도를 넘는 것이다〉로 되어있는데 그럼에도 불구하고 연습문제에서는 다음에 보이는 바와 같이 그 이상의 것을 다루고 있다.

문제 423 $|x|<7\varepsilon$이면 $|f(x)-3|<\varepsilon$이고 $|x|<5\varepsilon$이면 $|g(x)-11|<\varepsilon$이라고 가정할 때 $|f(x)+g(x)-14|<\dfrac{1}{1000}$이기 위한 충분 조건을 찾아내라. (이것은 정리 1의 증명)

문제 425. $|x-3|<5\varepsilon$이면 $|f(x)|<\varepsilon$이고 $|x-3|<2\varepsilon$이면 $|g(x)|<\varepsilon$라고 가정할때 $|f(x)g(x)|<\dfrac{1}{5000}$이기 위한 충분 조건을 찾아 내라.
(이것은 정리 3의 증명)

문제 429. $|x-1|<3\varepsilon$이면 $|f(x)|<\varepsilon$이고 $|x-1|<7\varepsilon$이면 $|g(x)-3|<\varepsilon$라고 가정할 때 $\left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right|<\dfrac{1}{100}$이기 위한 충분 조건을 찾아내라.
(이것은 정리 4의 증명)

결론적으로 말하면 이런정도의 연습문제를 다루고 있으므로 본문에서 〔정리 1〕만의 증명이라도 해주는 것이 좋겠다.

4) 함수의 극한 (확장)

이 책에서는 위에서 말한것들 보다 훨씬 이전에 다음과 같은 함수의 극한을 다룬다. 주로 homographic function 들 〈$f(x)=\dfrac{cx+d}{ax+b}$ 등〉의 성질을 조사 할 목적이지만 역시 엄밀한 정의를 주고 있다.

$$\lim_{x\to+0}f(x)=0$$

$$\lim_{x\to+0}f(x)=+\infty$$

를 정의하고 이것을 더 일반화하여

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=a$$

$$\lim_{x\to h+0}f(x)=+\infty$$

를 정의한다.

물론 $\lim\limits_{x\to h+0}f(x)=a-0$의 꼴은 나오지 않지만 이 교재의 순서를 바꾸어 위의 1~3을 먼저 도입한다면 이것도 가능할 뿐만 아니라 위의 4가지 정의의 경우 못지않게 이 용도가 높을 것이다.

이들은 「36가지의 확장된 극한」(〔5〕 pp. 103~168) 중 몇가지에 불과 하지만 이 5가지만 이해한다면 나머지 것들을 저절로 알게 될 것이다.

위에서 보인바와 같이 프랑스에서는 극한개념의 취급에 놀랄만큼 논리적인 엄밀성을 강조하

이론 전개를 하고 있다.
물론 일찍부터 논리와 기호등에 익히게 되도록 도한 후이니 좀 어려운 내용이지만 용이하게 해할 수 있을 것이다.
직관적인 도입과 전개로 일관하고 있는 우리도 작스러운 개혁이 기호사용이나(語順이 다르기 문에 생기는 혼동) 내용의 나선형적 지도에 많 문제점이 뒤따르겠지만 될 수 있는 한 빨리 학교육이 "수학교육"으로서의 의의를 갖도록 야만 할 것이다.

2. 미 국

[1] UICSM

UICSM 교과서는 미국의 4년제 중·고 과정을 한 特히 質이 우수한 학생을 대상으로 만들어 철두철미하게 현대화를 위한 교재이다.
이 교과서는 현대 수학에로의 最短과정을 擇기 위하여 과거에 다루던 불필요한 부분을 대하게 삭제하고 現代 數學面에서 필요로 생각는 부분은 비록 그것이 이해하기 힘든 내용이도 과감하게 도입되었다.
런 교재를 통한 철두철미한 집합개념의 도입과 개, 代數的 構造에의 重點, 엄밀한 論理 밑에서 公理系의 完全한 設定, 全體교재의 통일된 방으로의 전개와, 나선형적 배열을 통한 어려운 용의 도입은 세계적으로 움직이고 있는 교육 개화에 부합되고 있다.
그러나 이 교재에서의 문제점은 現代數學의 본이 되어 있는 limit 개념의 취급을 무한 등비 수의 합의 정의, 실수의 연속성, 함수의 연속 에서 너무 조심스럽게 약간만 다룬 것이다.
그러나 이 教材에서도 limit의 용어를 많이 사하지 않지만 그 개념을 미리 주어진 연습문제 를 통하여 실질적으로 계산하고 있으며 최소상 를 이용한 Dedekind cut의 方法으로 실수연속] limit의 개념을 도입하려 하였다.
그럼 이 교재에서 극한 개념의 지도 방법을 구]으로 살펴보자.
표시된 page는 [7]을 참조한 것이다.
) 수열의 극한(pp. 436~438)
무한 등비 급수 항목에서 다음과 같은 보기를 limit의 개념을 처음 도입하였다.

$\frac{9}{10^1}+\frac{9}{10^2}+\frac{9}{10^3}+\cdots\cdots$의 뜻을 알아보자.

$$\sum_{p=1}^{n}\frac{9}{10^p}=\frac{\frac{9}{10}\left(1-\left(\frac{1}{10}\right)^n\right)}{1-\frac{1}{10}}=1-\left(\frac{1}{10}\right)^n$$

$$1-\sum_{p=1}^{n}\frac{9}{10^p}=\left(\frac{1}{10}\right)^n$$

[1] $Th145(a)$에 의하여 $\left(\frac{1}{10}\right)^n>0$ 이므로

$$\left|1-\sum_{p=1}^{n}\frac{a}{10^p}\right|=\left(\frac{1}{10}\right)^n$$

큰 n에 대하여 $\left(\frac{1}{10}\right)^n$은 작다. 곧 아무리 작은 $y>0$이 주어져도 n이 충분히 크면 $\left(\frac{1}{10}\right)^n<y$
더욱 명백히 말하면 [2] Th156에 의하여 만일 $n\geq\frac{1}{y\left(1-\frac{1}{10}\right)}$ 이면 $\left(\frac{1}{10}\right)^n<y$이다.

따라서 Th 145(a), Th 156에 의해서

$$\forall y>0\ \forall n\geq\left(\frac{10}{9y}\right)\left|1-\sum_{p=1}^{n}\frac{a}{10^p}\right|<y$$

곧 $\forall y>0\ \exists m\ \forall n\geq m\left|1-\sum_{p=1}^{n}\frac{9}{10^p}\right|<y$

이것을 기호로 $\lim_{n\to\infty}\sum_{p=1}^{n}\frac{9}{10^p}=1$ ($\lim_{n\to\infty}$는 n이 무한히 커질때 극한이라고 읽는다)와 같이 나타내고 무한 등비 수열 $\frac{9}{10^1}$, $\frac{9}{10^2}$, $\frac{9}{10^3}\cdots$의 모든 항의 합이라고 정의하며 간단히 $\sum_{p=1}^{\infty}\frac{9}{10^p}=1$이라 나타낸다.」

또 보기들을 통하여 공비 γ이 $0<|\gamma|<1$인 무한 등비 수열의 합을 구하는 공식을 유도하였다.

여기서 보는바와 같이 일반적으로 수열의 극한을 논의하는 목적을 잘 말해주고 있는 셈이다.

가장 중요한 것은 무한 등비 급수의 부분합의 수열$\langle S_n\rangle$의 수렴을 직관에 의하지 않고 임의의 $\varepsilon>0$에 對하여 어떤 조건을 만족하는 적당히 큰

(1) Th 145(a) : $\forall x>0, \forall k,\ x^k>0$ (p. 420)
(2) Th 156 : $\forall x\neq 1,\ \forall y>0,\ \forall n[(0<x<1$ and $n\geq\frac{1}{y(1-x)})\Rightarrow x^n<y]$

N이 存在한다는 $\varepsilon-\delta$ 논법을 암암리에 사용하고 있다.

그러나 이 교재에서는 $\varepsilon-N$이란 문자를 사용하지 않음은 물론 limit에 관한 직접적인 논의는 피하고 있다.

그러나 이러한 방식으로 도입하기 위해서 연습문제란을 통하여 여러가지 실제적인 문제를 취급하였기 때문에 학생들은 별다른 의아심을 갖지 않고 자연스럽게 이런 방법대로 접근할 수 있게 되고 또 사고과정을 발전시킬 여지도 주게되는 것이다.

2) 실수의 연속성

두번째 보기로 이 교재 전체를 통하여 가장 주요하게 다루고 있는 실수체계의 구조중 해석학의 주요개념(수렴, 연속, 미분, 적분등)의 논의에 가장 기본이 되는 연속에 관한 의론을 살펴보자.

「실수에 관한 내용을 훑어보면, Course 1에서는 실수를 數直線上에서의 點의 이동을 도입하여 移動거리와 移動方向을 설명하고 거리에 方向을 첨가하여서 생각한 수를 실수라고 직관적인 정의를 하였다.

그러나 Course 1에서의 설명으로는 엄격하고 완전한 정의가 되지 못하므로 Course 1에서 擇한 12개의 原理를 4則의 공리로 정한 후 다시 Course 3에서 7개의 공리를 첨가 설정하여 완전한 실수의 規定을 하였다.

실수의 연속성을 따지기 위하여 우선 下界(lower bound)와 最小元素를 정의하고 (p. 324), 정수로부터 유리수를 만들어 나간다.

유리수가 아닌 수가 있음을 보이고 이런 수들을 특징짓기 위해서 上界(upper bound), 下界(lower bound) 및 상한(least upper bound)와 下限(greatest lower bound)를 정의한다.

여기서 least upper bound principle 〈上界를 가지는 임의의 空이 아닌 集合은 上限을 가진다〉을 公理로 擇하여 유리수의 집합의 Dedekind cut (이 교재에서 Dedekind cut란 용어는 없음)와 관련시켜 실수 전체 집합에 hole이 없음을 말하여 실수의 연속성을 따지고 있다.

즉 LUBP를 공리로 택하고 이것이 Dede kind cut 定理와 同値임을 보이고 있는 셈이다.

이런 내용은 상당히 어려운 영역에 속하는 것이지만 평범하며 조심스럽게 다루어지고 있다.

이런 방법으로 극한의 개념을 학생들에게 제공하는 것은 어려운 감이 없지 않지만 보다 높은 수준의 수학에로 발전을 하게 할 것이다.

3) 함수의 연속성

다음엔 LUBP의 응용으로 이곳에서는 거듭 제곱근, 유리수 指數 및 실수제곱 등을 정의하기 위하여 LUBP를 이용하여 연속함수의 一般論에 대하여 論하였다.

역시 연속에 관한 개념은 어려운 개념이기 때문에 연습문제의 形態를 取하여 많은 예를 가지고 여러가지 정리를 추측하고 그들의 증명은 Later Course에서 배울 것이라고 하고 여기서는 세밀히 증명을 하지 않았다.

그러나 이들 정리는 그 앞에서 나와있는 既任의 公理라든가 定理들을 이용하여 충분히 증명할 수 있는 것들이고 다만 증명이 다소 복잡하기 때문에 무리하게 증명을 시도하는 것을 회피한 모양이다.

즉 연속함수에 관한 개념을 연습문제를 통하여 다음과 같이 제시하고 이들 결과에서 학생들 자신이 연속에 관하여 추측하게 하고는 뒤에 결론을 지었다.

〔문제〕 (Course 3. pp. 489～498)

$$g_1(x)=\begin{cases} x-1 : 0\leqq x\leqq 4 \\ 2x-5 : 4<x<6 \end{cases} \quad g_4(x)=\begin{cases} \dfrac{x}{2} : 0\leqq x\leqq 4 \\ x-1 : 4<x\leqq 6 \end{cases}$$

로 정의되는 2개의 함수 g_1, g_4에 對하여,

1. 함수 g_4에 대하여 다음 표를 완성하라.

x	3.9	3.98	3.998	4	4.01	4.001	4.00001	4.00001
$g_4(x)$		1.99		2	3.01			
$\lvert g_4(x)-g_4(4)\rvert$		0.01		0	1.01			

2. (a) $x\in Dg_4$가 아무리 4에 가까와도 $\lvert g_4(x)-g_4(4)\rvert\geqq($ $)$를 만족하는 x가 存在한다. ( )은?

(b) 다음 사항은 옳은가 그른가?

$x\in Dg_4$인 어떤 x가 아무리 4에 가까와도 $\lvert g_4(x)-g_4(4)\rvert\geqq C$를 만족하는 $C>0$이 存在한다.

3. 함수 g_1에 대하여 다음 표를 완성하라.

x	4	3.9	3.99	3.998	4.05	4.005	4.001	4.0001
$g_1(x)$								
$\|g_1(x)-g_1(4)\|$								

4. (a) 다음을 설명하라.
   어떤 $x\in Dg_1$을 取해도 x가 4에 충분히 가까울 때는
   $|g_1(x)-g_1(4)|<0.1$이 成立한다.
   (b) (a)에 있어서 x가 4에 얼마나 가까우면 $|g_1(x)-g_1(4)|<0.1$이 成立하느냐?
5. (a) 어떤 $x\in Dg_1$를 取하여도 x와 4와의 차이가 (　)보다 작으면 $|g_1(x)-g_1(4)|<0.01$이 되게 할 수 있는가?
   (b) 어떤 $x\in Dg_1$을 取하여도 $|x-4|<$ (　)이면 $|g_1(x)-g_1(4)|<0.002$임을 알 수 있다.
   (c) 어떤 $x\in Dg_1$을 取하여도 $|x-4|<$(　)이면
   $|g_1(x)-g_1(4)|<0.0002$임을 알 수 있다.
6. (a) 다음을 설명하라.
   어떤 $c>0$을 取하여도(아무리 c가 작아도) x가 4에 충분히 가까운 Dg_1의 元素이면 $|g_1(x)-g_1(4)|<c$가 成立한다.
   (b) (a)에 있어서 x가 얼마나 4에 가까우면
   $|g_1(x)-g_1(4)|<c$가 成立하는가?
7. 다음 사항은 옳은가 그른가?
   (a) $x_0\in Dg_1$이라하자. 임의의 $c>0$에 對하여 x가 x_0에 충분히 가까우면 $|g_1(x)-g_1(x_0)|<c$가 成立한다.
   (b) 임의의 $x_0\in Dg_1$과 임의의 $c>0$에 對하여 $|g_1(x)-g_1(x_0)|\geq c$가 성립하는 x를 x_0에 얼마든지 가깝게 Dg_1에서 擇할 수 없다.」

위의 문제에서 g_1, g_4는 모두 Segement $\overline{06}$을 역으로 하는 증가 함수인데 g_1의 值域은 Segment $\overline{g(0),\ g(6)}$ 전체인데 비해 g_4의 值域은 $\overline{g(0)), g(6)}$의 진부분 집합이다.

이 차이점은 g_1은 연속인 증가함수이고 g_4는 에서 불연속인데서 생긴 것이다.

그래서 이 교재에서는 연속의 뜻을 다음과 같이 정의하였다.

「(정의)

함수 f는 다음 조건이 성립할 때 또 그때에만 x_0에서 연속이라고 한다.

$x_0\in D_f$일때 x_0에 充分히 가까운 $x\in D_f$에 對여 $f(x)$는 얼마든지 $f(x_0)$에 가깝게 된다.

함수 f는 그 변역의 모든 x의 값에 대하여 연속일 때 f는 연속 함수라 한다.」

위의 예에서도 역시 함수의 연속성에 對해서 실질적인 수치 계산으로 $\varepsilon-\delta$논법을 사용하고 있다.

미국의 특수성(우수한 교사의 부족란 등) 때문에 이 교과서에서는 limit에 관하여 너무 많은 조심을 하여 소극적인 취급이 되고 말았으나 근래의 소식에 의하면 더욱 더 과감한 취급이 시도되고 있다 한다.

여하튼 위에서 본 바와 같이 수학적인 이론을 전개하는 데 막연한 직관을 사용하지 않고 보다 엄밀한 이론적 체계를 구성하여 문제 해결을 해 나가는 방법은 수학의 엄밀성에 대한 필수적인 태도라 하겠다.

〔2〕 SMSG

SMSG는 수학자, 교육학자, 고등학교 교사, 과학 기술계의 권위자 등 100여명의 핵심연구원을 참가시켜 E.G. Begle 교수의 책임하에 수학교육의 현대화를 목표로 활동하는 단체로 1959~1960년 사이의 7~12학년의 Text 및 교사용 지침서가 이루어졌고 이Text의 적합성을 알아보기 위하여 400명의 교사를 동원하여 42,000명 이상의 학생들에게 이를 실제로 실험하고 이를 토대로하여 다시 Text의 내용을 재검토하여 60여권의 교과서를 만들어낸 미국에서 가장 활동적인 연구단체의 하나이다.

이 SMSG에는 limit의 개념을 원주의 정의, 수열, 함수에서 도입하였는데 원주의 정의와 수열에서는 직관적인 면으로 다루기 때문에 새로운 것이 없으나 함수면에서는 상당히 논리적으로 엄밀하게 다루고 있다.

그럼 실제로 limit의 개념이 어떻게 다루어져 있는가를 교재내용을 통해서 알아보자.

〔보기 1〕 "원주 c를 근사적으로 측정할려면 많은 변을 갖는 내접 정다각형을 그린 후 이 다각형의 둘레 p를 측정함으로써 잴 수 있다고 생각한 것은 합리적이다"라하고 다시 정의식으로

"만일 우리가 구하려는 p를 어떻게 해서 c에 근사적으로 같게 접근시킬 것인가를 결정하려면 단지 n을 충분히 크게 함으로써 p를 c에 접근시킬 수 있을 것이다."(〔6〕 ① p.516)

원주에 대한 이런 정의는 학생들이 자연스럽고 쉽게 받아드릴 수 있을 것이다.

그러나 이것은 그림이나 시청각을 통한 근사적인 것은 될지 모르지만 엄격한 수학적인 해석엔 적합하지 못한 것이다.

사실 이런 정의에 완전한 해답은 둘레에 對한 수열의 극한이 존재함을 보이기 위해 수열의 단조에 對한 것과 경계에 對한 증명 곧 Cauchy 수열이란 증명을 요하게 된다.

〔보기 2〕(〔6〕②)의 13章 "수열과 급수"에서 수열의 극한 정의를 다음과 같이 하였다.

"수열 a_1, a_2, a_3,…는 만약에 n이 점점 커짐에 따라 a_n이 임의로 A에 접근하게 된다면 극한 A를 갖는다."라 하였고 주의란에 수열의 극한에서 서로 다른 2점의 극한을 가질 수는 없다는 내용을 설명하였다.

그리고 극한의 4칙을 설명하기 위하여 수열 a_1, a_2,…a_n,…과 b_1, b_2,…b_n,…에서

$a_1+b_1,\ a_2+b_2,\cdots\cdots,a_n+b_n,\cdots\cdots$

$a_1b_2,\quad a_2b_2,\ \cdots\cdots,a_nb_n,\ \cdots\cdots$

$a_1/b_1,\quad a_2/b_2,\cdots\cdots,a_n/b_n,\cdots\cdots$

와 같은 실제적인 계산을 시도한 후 아무런 증명 없이 극한의 4칙을 도입하여 크게 새로운 면은 없다.

결국 S.M.S.G에서는 설령 극한 개념이 Geometry 책에서 π나 원의 면적, 호의길이, 球의체적, 표면적들에 관련된 정리에 이용되고, 실수의 완비에 對한 토의에서 Intermediate mathematics 책에있는 원추곡선, 점근선, 대수함수, 그래프의 모양에 대한 극한 형태에도 이용됐다 하지만 Intermediate mathematics 뒷장까지는 극한을 정의하기 위하여 직관적인면 이외의 별다른 시도는 없었다.

그러나 Elementary Function 册에서는 상당히 엄밀히 따지고 있어 상급학교에서 다룰 $\varepsilon-\delta$ 논법의 연장에 도움이 되게 되어있다.

〔보기 3〕 Elementary Function 3章 2節에서 f: $x\to1+x-4x^2$의 $(0,f(0))$에서의 접선은 2차항을 없앤 $y=1+x$라 하였는데 이렇게 한 이유를 다음과 같이 생각했다.

$f(x)=1+x-4x^2=1+(1-4x)x$의 $(0,f(0))$에서 가장 적합한 선형 근사식은 $1-4x$를 $|x|$를 충분히 작게함으로서 임의로 1에 접근되게 할 수 있으므로 $y=1+x$이다.

바꾸어 말하면 이것은 $\varepsilon>0$에 對하여 $\delta>0$이 存在하여 $|x|<\delta$($|x|$가 충분히 작을 때)이면 $|(1-4x)-1|<\varepsilon$임을 말하고 있는 것이다.

이것을 좀 일반화하여 함수 $1-4x=q(x)$의 극한이 m이라 할 때 모든 $\varepsilon>0$에 對하여 $\delta>0$이 존재하여 $|x|<\delta$일 때 $|q(x)-m|<\varepsilon$이면 $\lim_{x\to0}q(x)=m$.

그래서 가장 적합한 선형 근사치에 對한 논의는 다음 정의로 설명된다.

〈정의 1〉

$f(x)=f(0)+(q(x))$ $(\lim_{x\to0}q(x)=m)$이면 graph $f:x\to f(x)$의 點$(0,\ f(0))$에서 가장 적합한 선형 근사식은 $y=f(0)+mx$이다.

다음 쐐기(wedge) 해석이라 일컫는 이 교과서의 page 99의 내용으로 만약 $x=0$에 충분히 가깝게 한다면

$f:x\to1+(1-4x)x$의 graph는 기울기가 약간 다른 두직선 사이에 있게 된다고 하였다.

즉

$L\ :f:x\to1+(1-4x)x$는

$L_1:y=1+(1+\varepsilon)x$

$L_2:y=1+(1-\varepsilon)x$

인 L_1, L_2 사이에 있다.

이 특별한 경우는 기울기를 각각 $m+\varepsilon$, $m-\varepsilon$으로 놓고 y대의 절편을 $f(0)$이라 놓음으로서 쉽게 일반화 시킬 수 있다.

〈정의 2〉

모든 $\varepsilon>0$에 對하여 $\delta>0$가 存在하여 $0<|x|<\delta$일 때

$y=f(x)$의 *graph*가 두직선

$L_1:y=f(0)+(m+\varepsilon)x$

$L_2:y=f(0)+(m-\varepsilon)x$의 사이에 놓이게된다면 $y=f(0)+mx$는 점 $p(0,\ f(0))$에서 가장 적합한 선형 근사치에 대한 방정식이다.

Comentary for teachers(Elementary function

65 page에는 위에 든 정의에 대한 Calculus에서 보통 알아지는 商의 극한에 연결하려는 어려움을 피하고 있다.

여기서 생각하여야만 할 가장 적합한 선형 근사치에 대한 3번째의 정의로 Comentary for teachers가 말하는 商에 대한 극한을 다루어 본다.

정의 3〉

$\lim_{x\to0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=m$ 이면

$y=f(0)+mx$ 는 $(0,\ f(0))$ 에서

$f: x\to f(x)$ 의 graph에 가장 적합한 선형 근사치에 대한 식이다.

종합하여 보면(정의 2)와 (정의 3)은 동치임을 증명할 수 있으며 f가 다항식이라면 (정의 1)과 (정의 2)가 동치이다.

위에든 내용들은 특수한 경우$(0,\ f(0))$인 경우였으나 이 책에서는 이것을 일반화하였다. (17. pp.194~199)

그리고 이 교과에서는 도함수에 대해서도 전-적인 Calculus 접근 방법을 회피하고 있으며 또 Slope function이란 용어를 사용하여 도함수 용어도 사용하지 않는다.

그러나 미적분의 조기 도입에 대한 중요성으로 이제까지의 교과서에 최근 다시 Calculus 册 5권을 만들어 내어 미적분 도입을 위하여 상당히 자세하고 길게 ε—δ 논법을 논했다고 한다. (近刊예정)

3. 일 본

동양에서 첨단을 걷고있는 국가중의 하나인 일본에서도 수학교육의 현대화를 위한 연구 기관으로서 1958년 5월에 일본 수학교육회내에 "교육과정 연구위원회"가 조직되어 연구를 진행해 오던중 수학 교육의 개혁의 긴급성과 객관적 정세의 변천에 따라 이 조직을 강화하여 1963년 12월에 "수학과 교육과정 연구위원회"라는 명칭하에 재 출발하여 3개 분과가 연구를 하고 있는데 現行 수학교과 과정에서는 약간의 현대화 경향은 찾아 볼 수 있으나 아직 전도 요원한 바가 있다. 그 중에 극한에 관한 부문의 현행 일본교재 내용은 직관적인 취급을 하고 있어 우리나라의 현 교과서와 너무나 대동소이하므로 그 내용 취급을 살펴 볼 필요가 없고 1973년으로 예정된 고등학교 수학교과 과정 개편에 대비하여 1968년도에 실시된 고등학교 교사 강습의 지도자료를 통해서 그 전망을 살펴보는 것이 더욱 바람직할 것이다.

1) 극 한

"함수 $f(x)$의 $x=a$에서 극한치가 b라는 것은 $y=b$의 어떤 근방 $(b-\varepsilon,\ b+\varepsilon)$을 잡아도 $x=a$의 어떤 근방을 택하면 $x=a$를 제외하고는 그 안의 모든 x의 f에 의한 상이 $(b-\varepsilon,\ b+\varepsilon)$에 들어가는 것이다."라고 하여 함수의 극한은 근방을 사용하여 도입되었고 「a에 수렴하는 함수치의 열의 극한이 b라고 해서 $\lim_{x\to a}f(x)=b$라고는 할 수 없다」고 강조하고 있다. 그러나 함수가 단조인 경우에는 有界單調數列의 수렴성을 公理(實數의 연속공리)로 사용하여 증명하고 있다. ([11] p. 98)

2) 연 속

$f: A\to R'$(실수치 함수)에 대하여

$f(a)=b(\in R')$의 임의근방

$V=\{y|b-\varepsilon<y<b+\varepsilon\}$ (ε : 임의의 양의 실수)

에 대하여도 A에서 a의 적당한 근방 U를 잡으면 f(U)의 점은 모두 V에 들어갈 때 f를 a에서 연속이라고 한다고 되어있다. ([11] pp.78~79)

여기서 물론 A는 일반으로 위상 공간이다.

또 「R—R 연속 함수에서 정의역이 Compact이면 최대, 최소치에 도달된다(attain).」는 정리를 학생들에게 공리적으로 인정시킬 것을 주장하고, 그 이유로써는 실수의 연속성 등 때문이라고 설명했다.

여기서는 함수의 정의역은 有界閉區間을 사용한다.

위의 성질에 의하여 중간치 정리를 증명한다.

그리고 함수의 연속성을 완전히 이해하기 위해서는 불연속을 생각하여 實例를 들어 주는 것이 必要하지만 너무 깊이 들어가지 않는 것이 좋겠다고 결론지었다. ([11] p. 99)

이상에서 본 바와 같이 지금까지 「말(言語)에 의한」 정의에서 「근방을 사용한」 정의로 극한 취급이 바뀌었고, 새로운 정의의 이용을 삽입한 것이 특색이라 하겠다.

함수의 연속성을 $R-R$ 함수 이외까지(일반으로 metric space가 아닌 공간) 확장할 목적이 없다면 근방을 더 구체적으로 설명할 수 있을 것이다.

《총 괄》

이상으로 살펴본 외국에서의 특징을 말해 보면 그들 모두가 극한 개념의 지도는 막연한 직관적인 도입을 피하며 무척 조신을 하여 될 수 있는 한 엄밀하게 다루고 있으며 또 다루려고 하고 있다.

그리고 극한 개념의 중요성 때문에 대개가 보다 과감한 도입에 상당한 양의 내용을 이 극한 개념에할해하고 있으며 더욱 더 연구중인 것이다.

우리도 수학 교육의 충실을 기하기 위하여 그리고 수학교육의 현대화에 발 맞추기 위하여 현재의 직관적인 내용은 배제하고 보다 바람직한 극한 개념의 도입이 이루어져야 하겠다.

Ⅳ. 提言 및 結論

〈提 言〉

함수의 극한은 단순한 $\varepsilon-\delta$ 論法보다는 수열을 이용하는 것이 理解에 훨씬 빠르다.

그 理由는 實數의 連續개념을 전혀 사용하지 않으며 수열의 구조가 간단하기 때문이다.

다시 말하면 $R-R$ 함수의 성질을 Z^+-R 함수를 이용해서 연구하는 것이다.

우선 수열의 극한을 $\varepsilon-\delta$ 論法($\varepsilon-N$論法)으로 定義하고, 수열의 극한에 관한 여러가지 성질을 엄밀하게 증명한다.

함수의 극한을 수열을사용하여 정의하면, 이 성질들은 쉽게 함수의 극한에 확장된다.

1. 수열의 극한

수열은 자연수 위에서 정의된 함수이다. 지금까지의 전통적인 정의는 「어떤 일정한 법칙에 따라 배열된 수의 나열」이었다.

그러나 여기서는 그것을 문제 삼지 않기로 하고 다만 수열의 극한에 관한 論議만을 취급하기로 한다.

勿論 一般的인 距離空間의 點列이 아니고 실수의 수열만을 생각하기로 한다.

1) 정의

〈정의 1〉 수열$\langle a_n\rangle=\langle a_1, a_2, a_3\cdots\rangle$에 대하여, $\langle a_n\rangle$이 a에 수렴한다. (또는 $\langle a_n\rangle$의 극한이 a이다)
$\Leftrightarrow$임의의수 $\varepsilon(>0)$에 대하여 어떤 자연수 N이 존재하여

$$n>N\Rightarrow|a_n-a|<\varepsilon \qquad (1)$$

을 만족한다. 이것을 기호로

$$\lim_{n\to\infty} a_n=a$$

로 나타낸다.

이 정의는 다시 말하면, 「수열$\langle a_n\rangle$이 a에 수렴한다.
$\Leftrightarrow$번호가 충분히 큰 항은 a에 얼마든지 가깝다」이다.

다음 보기에서 이 정의를 더 잘 이해할 수 있을 것이다.

〈보기 1〉

$$0,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \cdots,\ \frac{n-1}{n},\cdots\cdots\cdots$$

즉 일반항이 $a_n=\dfrac{n-1}{n}$인 수열$\langle a_n\rangle$에 대하여 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=1$임을 보여라.

$$\left|a_n-1\right|=\left|\frac{n-1}{n}-1\right|=\frac{1}{n}$$

이므로 임의로 주어진 ε에 대하여 N을 $\dfrac{1}{\varepsilon}$보다 큰 자연수로 택하면

$$n>N\Rightarrow|a_n-1|=\frac{1}{n}<\frac{1}{N}<\varepsilon$$

이다. 따라서

$$\lim_{n\to\infty} a_n=1$$

이제 수렴하지 않는 보기를 들어보자.

〈보기 2〉

수열 $\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{4},\ \dfrac{3}{4},\ \dfrac{1}{5},\ \dfrac{4}{5},\ \cdots$

은 1에 수렴하는가?

$\varepsilon=0.8$로 주어졌다고 하자. 임의의 $\varepsilon>0$에 대하여 (1)을 만족하는 번호 N을 찾아야 하므로 $\varepsilon=0.8$에 대하여도 그런 번호 N이 있어야 할 것이다.

그러나 아무리 큰 번호 N을 잡더라도

$$0.2\geq a_n$$

로 되어

$$|a_n-1|<0.8$$

을 만족하지 않는 N보다 더 큰 번호 n이 있다.

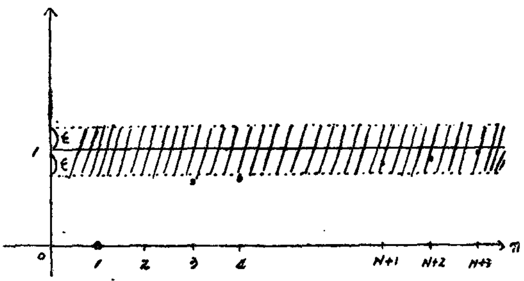
실제 우리는 n을 N보다 크고 5보다도 더 큰 짝수를 택하기만 하면 된다.

즉 N보다 큰 모든 번호에 대해서 이 식을 만족하는 N은 없다.

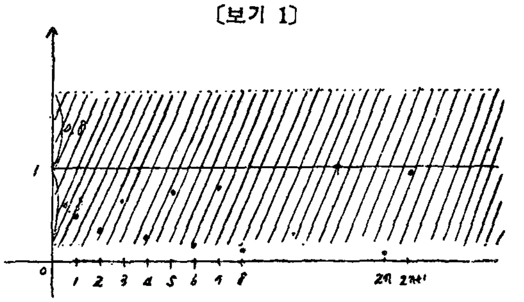
따라서 이 수열은 1에 수렴하지 않는다.

같은 방법으로 0에도 수렴하지 않는다.

위의 사실을 그래프로 살펴보자.



〔보기 1〕



〔보기 2〕

조건 (1)은 그래프상에서 다음과 같이 해석된다.

즉, a를 중심으로 ε—띠를 만들 때 어떤 번호 이후의 항은 모두 그 ε—띠 속에 들어간다.

〔보기 1〕에서는 ε이 어떻게 주어지더라도, 그 [illegible] 모든 항이 ε—띠 속에 들어가게 되는 번호 N을 찾을 수 있다.

그러나 〔보기 2〕에서는 1을 중심으로 0.8∼띠를 만들 때 이 띠 속에 들어가지 않는 항이 자꾸만 무한히 나온다.

〔Remark〕 위의 정의를 말로 풀이하여 「번호가 충분히 큰 모든 항이 a에 얼마든지 가깝다」고 했는데 이 표현은 「$\forall\varepsilon>0$, $\forall n$,〔$N>n \wedge |a_N - a| < \varepsilon$〕」으로부터 구별하기 위한 것이다.

「충분히 크면」이라는 말이 모호하기는 하지만 「번호가 한없이 커질 때 a_n은 한없이 a에 가까워진다」는 것 보다는 훨씬 정확한 표현이다.

그 이유는 두가지로 설명되는 데, 우선 보기 1에서의 수열

$$0,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \cdots\frac{h-1}{h}$$

는 번호가 한없이 커질때 a_n은 한없이 2에 가까워지고 있다고 볼 수도 있기 때문이다.

또 한가지 이유는 보기 2에서와 같이 $(\forall\varepsilon>0,\ \forall n,\ \exists N[N>n \wedge |a_n - a| < \varepsilon])$을 만족하지만, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$으로 誤認할 위험성이 다분한 것이다.

〈정의 2〉

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = +\infty$(수열〈$a_n$〉은 $+\infty$로 발산한다.)

$\Leftrightarrow$임의의 실수 $B>0$에 대하여 어떤 자연수 N이 존재하여

$$n>N \Rightarrow a_n > B \tag{2}$$

을 만족한다.

이것은 「번호가 충분히 큰 모든 항이 얼마든지 크다」는 뜻이다.

〔보기 3〕

$\lim\limits_{n\to\infty}(3+2n) = +\infty$

〈정의 2〉와 같은 방법으로

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = -\infty$

도 정의된다.

정의로부터 명백히 $a_n = 3+(-)^n\, 2n$으로 정의되는 수열〈a_n〉은 $+\infty$로도 $-\infty$로도 발산하지 않지만(진동한다)

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = +\infty$$

즉 〈$|a_n|$〉이 $+\infty$로 발산하므로 이런 경우에는 간단히 ∞로 발산한다고 말하고,

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$$

로 쓴다.

이와 같은 방법으로 엄밀한 정의와 그에 대한 설명을 주고, 보기를 들어 수렴의 개념을 확실히 한다.

여기서 중요한 것은 反例이다. 또 그래프에 의해 시각적으로 설명한다. 이런 방법의 도입은 在來의 방법보다는 훨씬 엄밀하면서도 이해하기 쉬울 것이다. 더구나 우리는 다음에서 보이는 바와

같이 극한의 四則에 관한 공식도 쉽게 유도된다.

2) 수열의 극한에 관한 정리

두 수열

$$\langle a_n\rangle : 0,\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3},\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{5},\ \cdots,\ \frac{n-1}{n},\ \cdots$$

$$\langle b_n\rangle : 1,\ \frac{3}{4},\ \frac{4}{6},\ \frac{5}{8},\ \frac{6}{10},\ \cdots,\ \frac{n+1}{2n},\ \cdots$$

에서

$$\lim_{n\to\infty} a_n=1,\quad \lim_{n\to\infty} b_n=\frac{1}{2}$$

임은 명백하다. 이제 각항을 합해서 만들어지는 수열

$$\langle C_n\rangle=\langle a_n+b_n\rangle : 1,\ \frac{5}{4},\ \frac{8}{6},\ \frac{11}{8},\ \frac{14}{10},\cdots,\frac{3n-1}{2n}$$

…은 수렴할 것인가, 수렴한다면 그 극한은 얼마인가 하는 문제를 생각해 보자,

쉽게 알 수 있는 바와 같이

$\lim\limits_{n\to\infty} C_n=\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\frac{3}{2}$이다.

가령 $\varepsilon=0.01$로 주어졌을 때 $[n>N\Rightarrow\left|C_n-\frac{3}{2}\right|<0.01]$을 만족하는 N을 찾아 보자.

우선,

$$\lim_{n\to\infty} a_n=1$$

로 부터 $[n>N_1\Rightarrow|a_n-1|<0.005]$인 N_1을 찾는다.

$$|a_n-1|=\left|\frac{n-1}{n}-1\right|=\frac{1}{n}$$

이므로 $N_1=\frac{1}{0.005}=200$으로 하면

$$n>200\Rightarrow|a_n-1|=\frac{1}{n}<\frac{1}{200}=0.005$$

또,

$$\lim_{n\to\infty} b_n=\frac{1}{2}$$

로 부터 $[n>N_2\Rightarrow|b_n-\frac{1}{2}|<0.005]$인 번호 N_2를 찾는다.

$$\left|b_n-\frac{1}{2}\right|=\left|\frac{n+1}{2n}-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2n}$$

이므로 $2N_2=\frac{1}{0.005}=200$, 즉 $N_2=100$으로 하면

$$n>100\Rightarrow|b_n-1|=\frac{1}{2n}<\frac{1}{200}=0.005$$

N_1과 N_2 중에서 큰 것을 N이라하면($N=200$),

$$n>200\Rightarrow\left|C_n-\frac{3}{2}\right|=\left|(a_n+b_n)-\left(1+\frac{1}{2}\right)\right|$$

$$=\left|(a_n-1)+\left(b_n-\frac{1}{2}\right)\right|\leqq|a_n-1|+\left|b_n-\frac{1}{2}\right|<0.005+0.005=0.01$$

즉, 우리가 구하는 번호는 $N=200$임을 알 수 있다.

우리는 여기서

$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=\lim_{n\to\infty} a_n+\lim_{n\to\infty} b_n$$

이 성립하는 것을 추측할 수 있으며 위에서 $\varepsilon=0.01$에 대해서 $N=200$을 구하는 방법은 그의 증명을 시사하고 있다.

사실 일반으로 다음 정리가 성립된다.

〔정리〕 두 수열 $\langle a_n\rangle$, $\langle b_n\rangle$이 각각 a,b에 수렴할 때, 즉

$$\lim_{n\to\infty} a_n=a,\ \lim_{n\to\infty} b_n=b$$

일 때

(i) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n\pm)(b_n)=a\pm b$(복호동순)

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}(ca_n)=ca$ (c는 상수)

(iii) $\lim\limits_{n\to\infty}(a_nb_n)=ab$

(iv) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)=\frac{a}{b}$ (단, $b\neq0$일 때)

이 정리는

$$\lim_{n\to\infty}(a_n\pm b_n)=\lim_{n\to\infty} a_n\pm\lim_{n\to\infty} b_n \quad (\text{복호동순})$$

$$\lim_{n\to\infty}(ca_n)=c\lim_{n\to\infty} a_n \quad (c\text{는 상수})$$

$$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n)=\lim_{n\to\infty} a_n\cdot\lim_{n\to\infty} b_n$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{b_n}\right)=\frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n} \quad (\text{단 } \lim_{n\to\infty} b_n\neq0)$$

이 같이 쓸수 있고, 또 이것은 수렴하는 두 수열의 합(차, 곱, 몫)의 극한은 각 극한의 합(차, 곱, 몫)과 같고 수렴하는 수열의 상수배의 극한은 극한의 상수배와 같음을 말하고 있다.

(증명)

(i) $\varepsilon'>0$이 임의로 주어졌다고 하자.

$$\lim_{n\to\infty} a_n=a$$

이므로, $\varepsilon=\frac{\varepsilon'}{2}$으로 할 때도

$$n>N_1\Rightarrow|a_n-a|<\varepsilon$$

인 자연수 N_1이 존재한다. 같은 방식으로

$$n>N_2\Rightarrow|b_n-b|<\varepsilon$$

인 자연수 N_2이 존재한다. N_1, N_2 중에서 큰 것을 N이라 하면

$$n>N\Rightarrow\left\{\begin{array}{l} n>N_1\Rightarrow|a_n-a|<\varepsilon=\dfrac{\varepsilon'}{2} \\ \\ n>N_2\Rightarrow|b_n-b|<\varepsilon=\dfrac{\varepsilon'}{2}\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow|(a_n+b_n)-(a+b)|=|(a_n-a)+(b_n-b)|\leqq|a_n-a|+|b_n-b|<\frac{\varepsilon'}{2}+\frac{\varepsilon'}{2}=\varepsilon'$$

즉 $a_n+b_n=c_n$, $a+b=c$라 할 때 임의의 $\varepsilon'>0$에 대하여

$$n>N|c_n-c|<\varepsilon'$$

인 번호 N이 존재한다. 즉

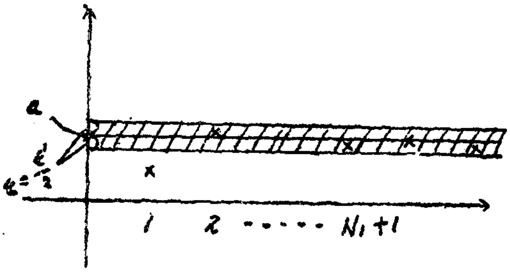
$$\lim_{n\to\infty}C_n=c$$

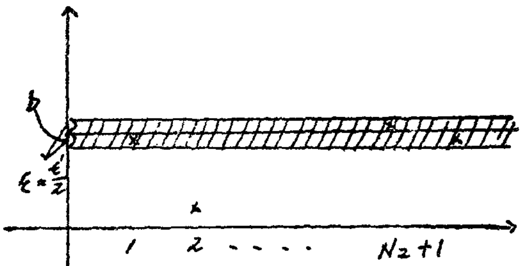
이고, 다시 말하면

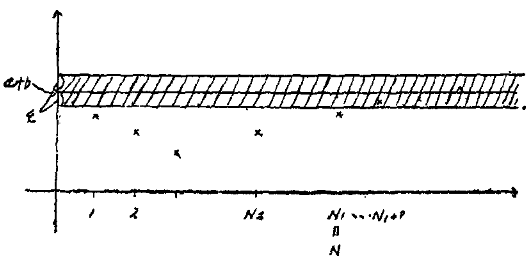
$$\lim_{n\to\infty}(a_n+b_n)=a+b$$

가 증명되었다.

이 정리의 증명은 그래프상에서 다음과 같이 해석된다.







즉, $n>N_1$이면 a_n은 a의 $\frac{\varepsilon'}{2}$—띠에 포함되고 $n>N_2$이면 b_n은 b의 $\frac{\varepsilon'}{2}$—띠에 포함될때 $n>max$ (N_1, N_2)이면 (a_n+b_n)은 $(a+b)$의 ε'—띠에 포함된다.

(ii) $c=0$인 경우는 자명하므로, $c\neq0$라 하자. $\varepsilon'>0$이 임의로 주어졌다고 하자.

$$\lim_{n\to\infty}a_n=a$$

이므로, $\varepsilon=\frac{\varepsilon'}{|c|}$에 대하여

$$n>N\Rightarrow|a_n-a|<\varepsilon,\ \text{즉}\ |a_n-a|<\frac{\varepsilon'}{|c|}$$

인 번호 N이 존재한다.

$$n>N\Rightarrow|ca_n-ca|=|c|\,|a_n-a|<|c|\cdot\frac{\varepsilon'}{|c|}=\varepsilon'$$

이므로

$$\lim_{n\to\infty}ca_n=ca$$

가 증명되었다.

(iii) $a\neq0$, $b\neq0$인 경우만을 증명하자.

$$\begin{aligned}|a_nb_n-ab|&=|(a_n-a)(b_n-b)+a(b_n-b)+b(a_n-a)|\\&\leqq|a_n-a|\cdot|b_n-b|+|a|\cdot|b_n-b|+|b|\cdot|a_n-a|\end{aligned}$$

이므로, $^\forall\varepsilon>0$에 대하여

$$n>N_1\Rightarrow|a_n-a|<\min\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{3}},\ \frac{\varepsilon}{3|6|}\right)$$

$$n>N_2\Rightarrow|b_n-b|<\min\left(\sqrt{\frac{\varepsilon}{3}},\ \frac{\varepsilon}{3|a|}\right)$$

인 N_1, N_2를 잡고, 그 중에서 큰 것을 N이라 하면

$$n>N\Rightarrow|a_nb_n-ab|<\sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}\cdot\sqrt{\frac{\varepsilon}{3}}+|a|\cdot\frac{\varepsilon}{3|a|}+|b|\cdot\frac{\varepsilon}{3|b|}=\varepsilon$$

으로 되어 $\lim_{n\to\infty}a_nb_n=ab$가 증명되었다.

(iv) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}=\frac{1}{b}$ 만을 증명하면 (iii)에 의해서

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to\infty}a_n\cdot\frac{1}{b_n}=a\cdot\frac{1}{b}$$

임이 명백하다.

$^\forall\varepsilon>0$에 대하여

$$n>N\Rightarrow|b_n-b|<\min\left(\frac{1}{2}|b|,\ \frac{1}{2}b^2\varepsilon\right)$$

인 번호 N을 갑으면

$$|b_n-b|<\frac{1}{2}|b|\Rightarrow|b_n|>\frac{1}{2}|b|$$

이므로

$$n>N\Rightarrow\left|\frac{1}{b_n}-\frac{1}{b}\right|=\frac{|b_n-b|}{|b_nb|}<\frac{2}{b^2}|b_n-b|<\frac{2}{b^2}\cdot\frac{b^2\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

즉 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{b_n}=\frac{1}{b}$.

임이 증명 되었다.

2. 함수의 극한

1) 정의

수열의 극한을 함수로 확장하기 위하여 다음과 같은 문제를 생각해 보자.

〔보기 1〕

함수 $f(x)=2x+1$이 주어져 있다.

또, 다음 4개의 수열 $\langle x_n\rangle$,

(i) $x_n=1+\frac{1}{n}$

(ii) $x_n=1+\frac{1}{n^2-5}$

(iii) $x_n=1-\frac{1}{n}$

(iv) $x_n=1+(-1)^n\frac{1}{n}$

은 모두 1에 수렴한다. 변수 x가 수열$\langle x_n\rangle$을 움직일 때 그에 대응하는 함수치의 수열 $\langle f(x_n)\rangle$은 3에 수렴함을 보여라.

(1)의 경우:

$$f(x_n)=2\left(1+\frac{1}{n}\right)+1=3+\frac{2}{n}$$

이므로, 수열 $\langle 3+\frac{2}{n}\rangle$가 3에 렴함을수 보이면 된다.

이것은 앞에서의 論議에 의하여 자명이다.

(iv)인 경우:

수열 $\langle 3+(1)^n\frac{1}{n}\rangle$가 3에 수렴함을 보이면 된다.

$$|f(x_n)-3|=\left|(-1)^n\frac{1}{n}\right|=\frac{1}{n}$$

이므로 임의의 $\varepsilon>0$에 대하여 $n>\frac{1}{\varepsilon}$되게 N을 택하면

$$n>N\Rightarrow|f(x_n)-3|<\varepsilon$$

임은 명백하다.

위의 보기 (i) (ii)는 x가 오른쪽에서 1에 수렴할 때, (iii)은 왼쪽에서 수렴할 때, (iv)는 양쪽에서 진동하면서 수렴할 때, 그에 대한 함수치의 수열이 3에 수렴함을 말한다.

〔보기 2〕 함수

$$f(x)=\begin{cases}x+2 & x\geqq1\\ -x+2 & x<1\end{cases}$$

가 있다. 다음 3개의 수열 $\langle x_n\rangle$

(i) $x_n=1+\frac{1}{n}$

(ii) $x_n=1-\frac{1}{n}$

(iii) $x_n=1+(-1)^n\frac{1}{n}$

은 모두 1에 수렴한다. 변수 x가 수열$\langle x_n\rangle$을 움직일 때 그에 응하는 함수치의 수열 $\langle f(x_n)\rangle$은 수렴하는가?

(i)의 경우:

$$f(x_n)=\left(1+\frac{1}{n}\right)+2=3+\frac{1}{n}$$

수열$\langle 3+\frac{1}{n}\rangle$은 명백히 3에 수렴한다.

(ii)의 경우:

$$f(x_n)=-\left(1-\frac{1}{n}\right)+2=1+\frac{1}{n}$$

수열 $\langle 1+\frac{1}{n}\rangle$은 명백히 1에 수렴한다.

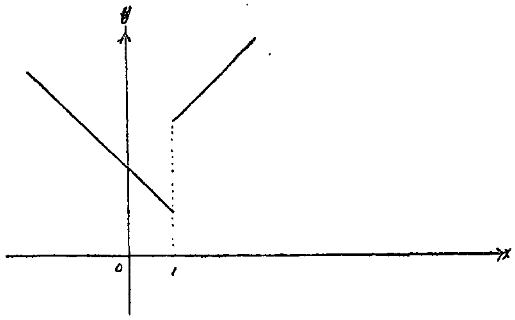
(iii)의 경우:

$$f(x_n)=\begin{cases}3+\frac{1}{n}, & n\text{이 짝수}\\ 1+\frac{1}{n}, & n\text{이 홀수}\end{cases}$$

수열$\langle f(x_n)\rangle$은 수렴하지 않는다.

이 보기는 다음 그래프에서 보는 바와 같이 x가 오른 쪽에서 1에 수렴할 때 그에 대한 함수치의 수열이 3에 수렴하지만 왼쪽에서 수렴할 때는 그에 대한 함수치의 수열은 1에 수렴하고, x가 1의 양쪽에서 번갈아가며 1에 수렴할 때는 그에 대한 함수치의 수열은 수렴하지 않음을 말한다.

함수의 극한에 대한 정의는 다음과 같다.



〈정의 1〉 R—R 함수 f에 대하여
$x\to a$ 일 때 $f(x)\to l$ 이다.
또는, $\lim_{x\to a} f(x)=l$
$\Longleftrightarrow$ 1° $\langle x_n\rangle\to a$ 인 수열 $\langle x_n\rangle$이 D_f 안에 존재하고
2° 임의의 $\langle x_n\rangle\to a$ 인 수열 $\langle x_n\rangle$에 대하여 $\langle f(x_n)\rangle\to l$ 이다.

위의 보기들에서 알 수 있는 바와 같이 이 정의는 다음 〈정의 1′〉와 同値이다.

그러나 그의 증명은 정도를 넘으므로 생략한다.

〈정의 1′〉 $\lim_{x\to a} f(x)=l$
$\Longleftrightarrow$ 1°, $\langle x_n\rangle\to a$ 인 수열 $\langle x_n\rangle$이 D_f 안에 존재하고
2°, 아무리 작은 양수 ε에 대해서도, 다음 조건을 만족시키는 δ가 존재한다.
$$0<|x_1-a|<\delta\Rightarrow|f(x_1)-l|<\varepsilon.$$

(Remark) 이들의 同値는 다음 정리에 기초를 둔 것이다.

「X, Y를 거리공간이라 하고 E를 X의 부분집합이라 하자. $f: E\to Y$ 일때 E의 limit point a에 대하여
$\lim_{x\to a} f(x)=l \Longleftrightarrow {}^{\forall}\langle x_n\rangle\,(x_n\in E)$: $\langle x_n\rangle\to a$, $\langle f(x_n)\rangle\to l$ 이다.」

사실 함수의 극한을 처음부터 연속인 정의역(실수)에서 시작하는 것보다도 그 안에서 수렴 점열을 잡아 수열의 극한을 계산함으로써 도입하는 것이 훨씬 이해하기 쉽다.

왜냐하면 자연수가 실수보다 훨씬 간단한 구조를 가지고 있기 때문이다.

이 정의에서 주의해야 할 것은 a에 수렴하는 수열이 없을 때는 $\lim_{x\to a} f(x)$를 생각할 수 없다는 것이다.

또 반드시 $a\in D_f$ 일 필요는 없으며, 단지 a에 수렴하는 수열의 각 항이 D_f의 원소이면 된다. 가령 보기를 들면

〔보기 3〕 $D=\langle \frac{1}{n}|n\in Z\rangle$에서 정의된 함수
$$f(x)=x+2$$
는
$$\lim_{x\to 0} f(x)=2$$
이다. 그러나 이때 $0\notin Df$ 임에 주의 하여라.

〔보기 4〕
$$f(x)\begin{cases} x, & 0\leqq x\leqq 1 \\ 3, & x=2 \\ x-3, & 3\leqq x\leqq 4\end{cases}$$
으로 정의된 함수 f를 생각하자.
$D_f=[0,1]\cup\{2\}\cup[3,4]$이다.
이때
$$\lim_{x\to 2} f(x)$$
는 존재하지 않는다. 왜냐하면 2에 수렴하는 D_f의 수열이 없기 때문이다.

〔보기 5〕
함수 $f(x)=x^2$이 주어져 있을 때 $x_0=2$에서의 함수의 극한이 존재한다면 그것은 4임을 (정의 1)에 의하여 밝혀라.

$x_n=2-\frac{1}{n}$이라 하면 명백히 $\langle x_n\rangle\to 2$이다.
$f(x_n)=\left(2-\frac{1}{n}\right)^2=4-\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}$이므로
$\langle 4-\frac{4}{n}+\frac{1}{n^2}\rangle\to 4$ 임도 곧 알수 있다.
왜냐하면
$$|f(x_n)-4|=|\frac{4}{n}-\frac{1}{n^2}|=\frac{1}{n}|4-\frac{1}{n}|<\frac{4}{n}$$
따라서 ${}^{\forall}\varepsilon>0$에 대하여 $N>\frac{4}{\varepsilon}$되게 N을 잡으면
$$n>N\Rightarrow|f(x_n)-4|<\varepsilon$$
이 성립된다.

〔보기 5′〕 함수 $f(x)=x^2$ 이 주어져 있을 때 $x_0=2$ 에서의 극한은 4 임을 (정의 1′)에 의하여 밝혀라.

함수 값이 4 로부터 $\frac{1}{1000}$ 만큼 적게 떨어져 있게 되는 그의 근방을 찾아보자.

독립변수 x 를 $2+h$ 로 바꾸어 놓고, 《충분히 작은》 h 로서 조건에 맞는 것을 찾는다.

즉 $4-\frac{1}{1000}<(2+h)^2<4+\frac{1}{1000}$ 을 풀면 $|4h+h^2|<\frac{1}{1000}$ 인데 우리가 찾는 것은 필요 충분 조건이 아니라 충분 조건이므로 이 부등식을 꼭 풀어야만 할 필요는 없다.

$|4h+h^2|\leq 4|h|+|h|^2$ 이고 만일

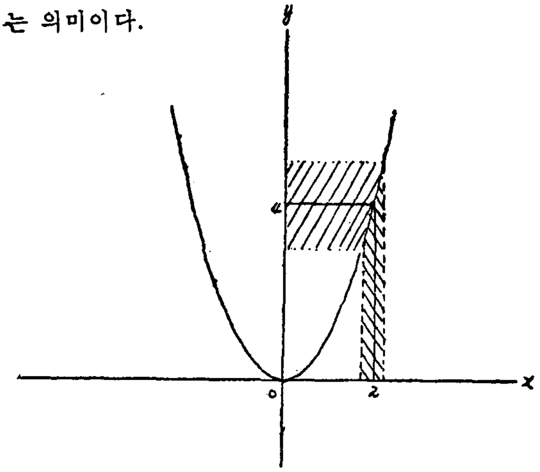
$|h|<1$ 이라고 가정한다면

$|4h+h^2|<5|h|$, 따라서 우리는 $5|h|<\frac{1}{1000}$

즉 $|h|<\frac{1}{5000}$ 을 얻는데 이것은 분명히 $|h|<1$ 을 만족한다. $\left(\frac{1}{5000}<1\right.$ 이므로$\left.\right)$

다시 말하면, "$|x-2|<\frac{1}{5000}$ 이면 $|y-4|=|x^2-4|<\frac{1}{1000}$ 이다" 이다.

이것을 그래프로 보면 2의 $\frac{1}{5000}$ 근방이 f 에 의해서 4의 $\frac{1}{1000}$ 근방 속으로 들어 간다는 의미이다.



또 좀 더 일반화 한다면 아무리 작은 수 $\varepsilon>0$ 이 주어졌다 할지라도 $|x-2|<\delta$ 이면 항상 $|f(x)-4|<\varepsilon$ 을 만족하는 조건에 맞는 수 δ 를 찾아낼 수 있다. (임의의 ε 에 대해서 $\delta=\min\left(\frac{\varepsilon}{5}, 1\right)$)

〔보기 6〕

함수 $y=3x+2$ 에서 x 가 1 에 충분히 가까와 질 때 y 는 얼마든지 5 에 가까와질 수 있는가를 증명해 보자.

$|(3x_1+2)-5|<\varepsilon$ 을 만족하는 편차 δ 를구하면 된다.

이것은 $|3x_1-3|<\varepsilon$ 이고 다시 $|x_1-1|<\frac{\varepsilon}{3}$ 이므로 결국 $|x_1-a|<\delta$ 의 δ 를 $\frac{\varepsilon}{3}$ 으로 하면 된다.

여기서 주의할 것은 이 조건이 동시에 필요 조건도 되는 것이다.

〔Remark〕 함수의 극한 개념을 근방을 사용하면 다음과 같다.

"함수 $f(x)$의 $x=a$ 에서 극한치가 l 이라는 것은 l 의 어떤 근방$(l-\varepsilon,\ l+\varepsilon)$을 잡아도 $x=a$ 의 적당한 근방을 택하면 $x=a$ 를 제외하고는 그 안의 모든 x 의 f 에 의한 상이$(l-\varepsilon, l+\varepsilon)$에 들어가는 것이다."

○극한에 관한 주의점

① 정의의 조건을 만족하는 l 이 존재하지 않는다면 $\lim_{x\to a} f(x)$는 존재하지 않는다.

② 정의의 적용에 ε 은 δ 이전에 선정되어야 하며 중요한 것은 조건에 맞는 δ 의 존재인 것이다.

③ 「$x\to a$ 일때 $f(x)\to l$」이라고 할때 l 은 반드시 고정된 수 이며 x 에 따라 변하는 것은 아니다. (다른 a 에 대하여는 분명히 다른 고정된 수를 가져야 된다.)

즉 l 은 a 의 함수이다.

④ a 에 수렴하는 점열이 f 의 정의역 안에 있어야 한다.

그렇지 않은 경우에는 극한을 따질 수 없다.

⑤ x 가 a 에 가까와 질 때의 $f(x)$의 극한은 a 에 가까운 점들에 있어서 대응하는 한 수 값 $f(x)$에 의하며, a 에 대한 $f(x)$의 값은 제외된다.

왜냐하면 다음 보기에서 처럼 표현될 수 없기 때문이다.

($a=\frac{1}{3}$일 때 $f(x)=\frac{6x-2}{3x-1}$에서 $x=\frac{1}{3}$에서 $f(x)$는 존재하지 않지만 $x\to\frac{1}{3}$일때 $f(x)\to 2$이다.)

2) 함수의 극한에 관한 정리

두 함수

$$f(x)=x$$
$$g(x)=3x+2$$

에서

$$\lim_{x\to 1} f(x)=1 \quad \lim_{x\to 1} g(x)=5$$

임은 앞에서 명백하다. 이제 두 함수의 합으로 만들어진 함수

$$h(x)=f(x)+g(x)=x+3x+2=4x+2$$

는 $x\to 1$일때 수렴할 것인가, 수렴한다면 그 극한은 얼마인가 하는 문제를 생각해 본다.

쉽게 알 수 있는 바와 같이

$$\lim_{x\to 1} h(x)=6$$

이다. 우리는 여기서

$$\lim_{x\to 1} h(x)=\lim_{x\to 1} \{f(x)+g(x)\}=\lim_{x\to 1} f(x)+\lim_{x\to 1} g(x)$$

이 성립하는 것을 추측할 수 있다.

사실 일반으로 극한의 四則에 관하여 수열에서와 같이 함수에서도 다음의 정리가 성립한다.

〔정리〕 f와 g는 $R-R$ 함수이고, 각각 x_0에서 수렴하며

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A, \quad \lim_{x\to x_0} g(x)=B$$

라면 다음 각 함수의 극한이 존재하여 우변과 같다.

(i) $\lim_{x\to x_0} [f(x)\pm g(x)]=A\pm B$

(ii) $\lim_{x\to x_0} cg(x)=cB$ (c : 상수)

(iii) $\lim_{x\to x_0} f(x)\ g(x)=AB$

(iv) $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}=\frac{A}{B} (B\neq 0)$

(증명) (i) $\langle x_n\rangle$을 x_0에 수렴하는 임의의 수열이라 하자

$$\lim_{x\to x_0} f(x)=A, \lim_{x\to x_0} g(x)=B$$

이므로, (정의 1)로 부터 $\langle x_n\rangle$에 대하여

$$\lim_{n\to\infty} (x_n)=A, \lim_{n\to\infty} g(x_n)=B$$

이다. 그런데 수열의 극한에 관한 정리에 의하면

$$\lim_{n\to\infty} [f(x_n)+g(x_n)]=\lim_{n\to\infty} f(x_n)+\lim_{n\to\infty} g(x_n)$$

이므로 결국 x_0에 수렴하는 임의의 수열 $\langle x_n\rangle$에 대하여

$\lim_{n\to\infty} [f(x_n)+g(x_n)]$가 존재하고, 그것은 $A+B$와 같다. 따라서 다시 (정의 1)에 의하여 명제가 증명되었다.

(ii) $\lim_{n\to\infty} c(g(x_n)=c\lim_{n\to\infty} g(x_n)$

(iii) $\lim_{n\to\infty} f(x_n)\ g(x_n)=\lim_{n\to\infty} f(x_n)\ \lim_{n\to\infty} g(x_n)$

(iv) $\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)}=\frac{\lim_{n\to\infty} f(x_n)}{\lim_{n\to\infty} g(x_n)}$

여기에 (정의 1)을 사용하면 증명은 모두 완결된다.

3) 연 속

함수에서 연속의 정의는 다음과 같이 한다.

(정의) 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 연속이다.

$\Longleftrightarrow$ (i) $a\in D_f$

(ii) $\langle x_n\rangle\to a$인 D_f의 수열 $\langle x_n\rangle$이 있으면 $\lim_{x\to a} f(x)=f(x)$이다.

이것을 $\varepsilon-\delta$ 논법으로 말하면 다음과 같다.

$f(x)$가 a에서 연속이다. $\Leftrightarrow a\in D_f$이고 또 임의의 $\varepsilon(>0)$에 대하여

$\delta_f=\delta_f(\varepsilon,a)$가 존재하여

$x\in D_f, |x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-f(a)|<\varepsilon$.

〔Remark〕 정의에서 a에 수렴하는 수열이 없으면 f는 $x=a$에서 연속임은 물론이다.

앞의 (2—1)의 〔보기 2〕에서 f는 $x=1$에서 불연속이다.

$\lim_{x\to 1} f(x)$가 존재하지 않기 때문이다. 또 〔보기 3〕에서 $0\notin D_f$이므로 불연속이다. 〔보기 4〕에서 f는 $x=2$에서 연속이다. 왜냐하면 $x=2$에서 함수가 정의되고, a에 수렴하는 수열이 없기 때문이다.

참고로 불연속에 관한 정의를 들면 다음과

같다.

〈정의〉

$f(x)$가 a에서 불연속이다. $\Longleftrightarrow$ 다음 조건중 하나가 만족된다.

① $a \notin D_f$

② a에 수렴하는 D_f의 수열 $\langle x_n \rangle$이 존재하지만 f는 a에서 수렴하지 않는다.

③ $a \in D_f$이고 f는 a에서 수렴하지만

$$\lim_{x \to a} f(x) \neq f(a)$$

실제 연속의 개념은 극한에서 유도되는 것이므로 여기서도 앞에서와 같이 수렴 점열의 함수치열이 수렴함을 이용하여 설명하는 도입, 즉, 「X, Y가 거리공간이고 f가 X에서 Y에 사상일때 f가 a에서 연속이다. $\Leftrightarrow (x \to a \Rightarrow f(x_n) \to f(a)$」인 정리의 이용이 되겠는데 이런 방법의 설명은 보다 학생들의 이해를 빠르게 할 것이다.

(물론 위의 정리 증명은 정도를 넘기에 하지 않는다.)

특히 불연속인 경우의 보기를 들어 함수의 연속성을 철저히 설명하는 것은 필요하다.

결 론

고등학교에서의 극한 개념 및 그의 성질은 보다 정확하고 엄밀하게 지도되어 바람직한 수학교육 현대화가 이루어져야 하겠다.

그러기 위하여는 현재의 직관적인 방법을 탈피하고 그 내용면에 위의 제언에서 말한 다음과 같은 내용으로 과감하게 개혁을 해야만 한다.

(1) 극한과 연속성은 우선 수열에서 $\varepsilon-\delta$ 논법으로 도입하고 함수에서는 수렴 점열의 함수 치열의 극한으로 부터 도입하며, $\varepsilon-\delta$ 논법이나 근방을 사용한 보다 엄정한 방법으로 설명하고 ε—띠를 사용하여 시각적인 도움을 준다.

(2) 극한의 성질(四則)은 무조건의 암기를 종용할 것이 아니라 엄밀하게 따져 보인다.

(3) 수렴 점열의 함수 치열의 극한과 함수의 극한과의 관계를 알려준다.

(4) 증명할 수 없는 중요한 정리는 공리적으로 받아 들이도록 하지만 그 정리를 정확하게 알려주고 증명을 약했음을 명시하여 수학적 체계에 빈틈이 없게한다. (보기 : 위의 (3)번)

(5) 함수의 연속성은 불연속함수를 사용하여 철저히 설명한다.

참 고 문 헌

〔1〕 현행 우리나라 고등학교 수학교과서

〔2〕 문교부 : 고등학교 교육과정해설, 문교부 1963.

〔3〕 한국수학교육연구회 : 학교수학 1권, 한국 수학교육 연구회 1969.

〔4〕 한국수학교육회 : 수학교육통권 2, 14, 17호, 한국수학교육회 1963, 1966, 1967,

〔5〕 서울대학교 교양과정부 수학교실 : 미적분학, 서울형설출판사 1969

〔6〕 SMSG : ① Geometry (partII) : New Haven, Yale University press, 1960
② Intermediate Mathematics part II), Yale Universitypress, 1960

〔7〕 UICSM : High School Mathematics (Course3), Boston, D.C, Heath and Co, 1966

〔8〕 Georges Girard : ALGEBRE, TRIGONOME André Lentin ~TRIE, Hachette, 1965

〔9〕 泉信一外2人 : 高等學校 數學 II B, 數學 III, 日本書院, 1965

〔10〕 矢野健太郎編 : 高等學校 數學 II B, 數學 III, 學硏書籍株式會社, 1965.

〔11〕 日本文部省 : 新しの數學教育 —數學教育 現代化講座指導資料— 日本文部省, 1968

〔12〕 池田信行 : 極限上連續, 現代數學 現代數學社, 1970. 8

〔13〕 John L. Kelly : General Topology, D.Van nostrand Co, Inc. 1955

〔14〕 Walter Rudin : Principles of Mathematics Analysis McGraw-Hill 1965

〔15〕 George F. Sinnons : Topology and Modern Analysis. McGRAW-HILL Book Co. Inc 1963

〔16〕 Tom M Apostol : Mathematical Analysis, Addison-Wesley pub-Co, 1958.

〔17〕 Donald W Hight : The Limit concept in the SMSG revised Sample text book. The Mathematics teacher, N.C.T.M. 1964. 6

〔18〕 JOHN T. MOORE : Fundamental principles of Mathematics, Rinehart & Company. INC, New York 1960