

論 文

## 알루미늄合金의 抵抗熔接에 따른 热應力 및 殘留應力의 解析

金 在 瑾\* · 金 曉 哲\*

## On the Thermal Stress and Residual Stress Distributions in a Aluminum Alloy Plate due to Resistance Spot Welding

by

Zae Geun Kim,\* Hyochul Kim\*

The problems of thermal stress and residual stress in resistance spot welding are studied from two standpoint namely, effect of temperature distributions and effect of the radius of free boundary. The radius of the region where the temperature distributions are occurred is taken as a function of time after welding and as a finite size, 6 times of heated zone. The region of the radial stress distribution is treated as a function of time under Saint-Venant's principle and 6 or 12 times of originally heated zone.

Thermal stresses and strains are obtained by analytic solution under constant mechanical properties and by the finite difference method for varying properties under temperature variation.

From the computed results following conclusions are derived

- (1) For the engineering purpose, the region of temperature distribution and stress distribution can be treated as a finite region,  $R = r_o = 6r_e$ .
- (2) If the maximum temperature of the aluminum alloy plate is less than 500°F, thermal stresses and strains can be obtained with constant mechanical properties.
- (3) The residual stresses and strains will be remained in welds and its vicinity.

## 記 號

- $r$  : 座標原點에서任意의點까지의距離
- $r_e$  : 熔接電極의先端에서의半徑
- $r_o$  : 溫度變化가 일어나는領域의最大半徑
- $R$  : 热應力이發生되는領域의最大半徑
- $t$  : 任意의點에서의溫度
- $t_{po}$  : 板의初期溫度
- $t_w$  : 板의熔接溫度(板의熔解點溫度)
- $T$  :  $t - t_{po}$
- $T_o$  :  $t_w - t_{po}$

- $M_n$ : 0次의 第1種 Bessel函數를 0으로하는  $n$ 次固有值
- $\alpha$ : 热擴散率
- $\beta$ : 線膨脹係數
- $\theta$ : 熔接電流가 끊어진 후부터의時間
- $\mu$ : Poisson常數
- $E$ : 彈性係數
- $\phi$ : 角度
- $\Phi$ : 應力函數

\* 正會員 서울大學校 工科大學

## 1. 序論

熱應力 및 殘留應力이 工學上 重要한 問題로 取扱되기 始作한 것은 比較的 近來의 일이다. 特히 焊接으로 因한 热應力 및 殘留應力의 問題는 焊接 特有의 몇 가지 特性에 依하여 그 研究가 늦어지고 있다. 即 焊接은 製造工程에서 使用됨으로 大部分의 경우에 使用條件과는 二次의 關係를 갖게되고, 热應力은 그 原因이 되는 溫度分布가 過渡의 ی으로, 過渡의 일 뿐 아니라 加熱溫度가 높기 때문에 溫度變化로 因한 材料의 物理的 特性을 變數로 取扱하여야 한다는 點 等의 特性을 갖는다. 이에 比하면 航空分野에서의 热應力 問題는 主로 空氣와의 磨擦로 因하여 發生됨으로 使用條件과直結되고 加熱溫度도 比較的 낮으며 定常狀態에서의 热應力 問題됨으로 比較의 일찍부터 研究가 이루어지고 있다.

一般的으로 热應力의 研究는 溫度分布의 解析에서 始作하여 热應力を 求하고 그로 因한 殘留應力 및 殘留變形을 究明함으로 完結된다고 볼 수 있다. 그런데 焊接의 경우에 있어서는前述한 바와 같이 條件이 特異하여 實驗的研究[1], [2], [3]들이 많이 이루어지고 있으며 理論研究에 있어서는 그 첫 段段로 볼 수 있는 溫度分布에 關한 研究가 가장 活潑할 뿐이다. 特히 溫度分布에 關한 研究中 가장 代表의인 것이 D. Rosenthal의 arc 焊接에 關한 研究[4]이다. 이 研究에서는 比熱, 热傳達係數等의 热的 性質이 溫度變化와 無關한 常數로 取扱하고 있으나, 이는 그의 實驗의 檢證[5]와 잘一致될 뿐 아니라 R.J. Grosh 와 E.A. Trabant의 热的 性質을 溫度의 函数로 取扱한 解[6]와도 잘一致된다. 또한 热的 性質의 變化가 無視될 수 있는 低溫域까지 加熱되는 soldering 的 경우에 對한 D.J. Sullivan의 無限領域까지의 解[7]는 界境條件으로서 板의 加熱되는 領域을 有限하게 取扱한 解[8]와 잘一致됨을 發見할 수 있다. 따라서 焊接으로 因한 溫度分布는 그 热的 性質을 常數로 取扱하고 界境條件을 適節히 選定하여서 工學的으로 充分히 有用한 結果를 얻을 수 있음을 알 수 있다.

이리한 溫度分布에 依한 热應力의 解析에 있어서는 應力과 關係되는 彈性係數, 線膨脹係數等의 物性의 變化領域이 大端히 크기 때문에 이들을 常數로 取扱한 解는 極히 制限된 경우에 限하여 使用할 수 있을 것이다. 그러나 物性을 溫度의 函数로 取扱하면 거의 大部分의 경우에 嚴密解는 얻어지지 않으며 Bruno A. Boley[9]나 Chieh Chien Chang 및 Wen-Hwa Chu의 解[10]

에서와 같이 特定한 경우에 限하여 可能한 뿐이다. 또한 溫度分布에 따른 材料의 物性의 變化가 大部分의 경우에 아직 研究 段階에 있음으로 事實上 焊接에서의 热應力 問題는 嚴密解를 期待하기 어렵다.

따라서 本論文에서는 焊接過程中 가장 簡單한 抵抗點焊接의 경우를 擇하였으며 材料는 物性의 變化가 比較的 일찍부터 研究되어온 航空機用 輕合金인 2024 T3를 擇하여 解析코자 하였다.

이에 溫度分布는 그 影響이 比較的 적음으로 热的 性質을 常數로 보고 理論解로 求하고 그에 따른 热應力を 物性을 常數로 取扱한 嚴密解와 變數로 取扱한 敷值解의 두 경우에 對하여 求하고 몇 가지로 界境條件을 바꾸어 計算比較하였다.

## 2. 理論

### 2.1. 溫度分布

抵抗點焊接에 依한 溫度分布는 Fig. 1과 같은 座標系를 設定하면前述한 바의 事實들에 依據하여 物性을 常數로 取扱하고 热損失을 無視하면 參考文獻[8]에서와 같이 (1)式으로 表示할 수 있다.

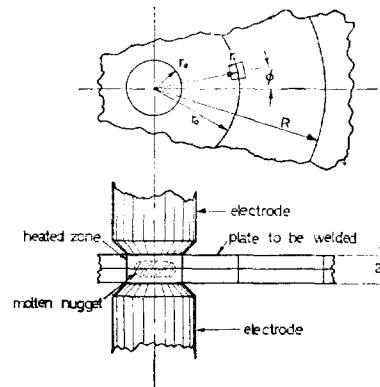


Fig. 1 Coordinate System

$$T = 2 \frac{r_e}{r_o} J_o \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(M_n/r_o)^2 \alpha \theta} \frac{J_1(M_n r_e)}{[J_1(M_n)]^2 M_n} \quad (1)$$

그런데 (1)式에서  $r_o$ 를 參考文獻[8]에서의 實驗的事實에 根據한 特定한 敷值인  $r_o = 5r_e$ 로 取하고 있다. 여기서  $r_o$ 를 溫度變化가 發生되는 範位의 最大半徑임으로 領域  $0 < r \leq r_o$ 에 保存되는 热量은 热損失을 無視할 때 恒常人熱과 같아야 함으로  $r_o$ 는 (2)式을 滿足하는 값으로도 볼 수 있다.

$$r_0 = 4r_0 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(M_n/r_0)^2 \alpha \theta} \frac{J_1(M_n \frac{r_0}{r_0})}{J_1(M_n) M_n^2} \quad (2)$$

따라서 항공機用 輕合金인 2024 T3材를 對象으로 할 때 板의 最大溫度가 焊接溫度에 比하여  $T_{max}/T_0 = 0.04$  程度로 冷却되던 热應力은 工學上 問題되지 않는다고 생각하면 (2)式을 滿足하는  $r_0$ 의 最大值를 Fig. 2에 依하여  $\theta = 4\text{ sec}$  일 때  $r_0 = 5.4125 r_0$ 로 볼 수 있다. 따라서  $r_0$ 를 最大로 取하드라도  $r_0 = 6r_0$ 以上으로 볼 必要가 없으며  $r_0$ 를 最少限으로 取하고자 하면 Fig. 2의  $r_0$ 와  $r_0$ 와 (2)式의 關係를 滿足하는  $r_0$ 를 使用하여야 한다.

## 2.2 热應力 및 热變形度

주어진 問題에 對한 热應力函數의 一般型은 (3)式과 같이 表示된다.

$$\begin{aligned} & \left( \cos\phi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \left\{ \cos\phi \frac{\partial(\frac{1+\mu}{E})}{\partial r} - \frac{\sin\phi}{r} \times \right. \\ & \left. \partial(\frac{1+\mu}{E}) \right\} \left( \sin\phi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \left( \sin\phi \frac{\partial\Phi}{\partial r} + \right. \\ & \left. \frac{\cos\phi}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial \phi} \right) - 2 \left( \cos\phi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \times \\ & \left\{ \sin\phi \frac{\partial(\frac{1+\mu}{E})}{\partial r} + \frac{\cos\phi}{r} \frac{\partial(\frac{1+\mu}{E})}{\partial \phi} \right\} \left( \cos\phi \frac{\partial}{\partial r} - \right. \\ & \left. \frac{\sin\phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \left( \sin\phi \frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{\cos\phi}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial \phi} \right) + \left( \sin\phi \times \right. \\ & \left. \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos\phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \left\{ \sin\phi \frac{\partial(\frac{1+\mu}{E})}{\partial r} + \frac{\cos\phi}{r} \times \right. \\ & \left. \partial(\frac{1+\mu}{E}) \right\} \left( \cos\phi \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin\phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \left( \cos\phi \frac{\partial\Phi}{\partial r} - \right. \\ & \left. \frac{\sin\phi}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial \phi} \right) = \left( \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \right) \times \\ & \left\{ \left( \frac{1}{E} \right) \left( \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2\Phi}{\partial \phi^2} \right) + \beta T \right\} \end{aligned} \quad (3)$$

그런데 주어진 條件에 依하여 回轉對稱이라는 性質을 考慮하면 주어진 問題에서의 热應力函數 (3)式은 (4)式과 같은 常微分方程式으로 바뀌게 된다.

$$\begin{aligned} & \frac{1}{r} \frac{d^2\Phi}{dr^2} - \frac{d(\frac{1+\mu}{E})}{dr} + \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} \frac{d^2(\frac{1+\mu}{E})}{dr^2} \\ & = \left\{ \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right\} \left\{ \left( \frac{1}{E} \right) \left( \frac{d^2\Phi}{dr^2} + \right. \right. \\ & \left. \left. \frac{1}{r} \frac{d\Phi}{dr} \right) + \beta T \right\} \end{aligned} \quad (4)$$

여기서 (4)式은 (3)式에 比하면 大端히 簡單한 型態이

나 溫度가 時間과 半徑의 函數이고 物性이 溫度의 函數이라는 條件을 考慮하면 極히 制限된 경우 [8], [9]에 限하여 解가 얻어질 뿐 아니라 大端히 까다롭다. 따라서 (4)式을 物性을 溫度에 關하여 常數로 보아 嚴密解를 얻고 物性을 溫度의 函數로 取扱하여 差分法으로 얻은 數值解와 比較하기로 한다.

物性을 常數로 보면 (4)式은 (5)式과 같이 變化된다.

$$\begin{aligned} & \frac{d^4\Phi}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3\Phi}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2\Phi}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{d\Phi}{dr} = \\ & \left( \frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \beta ET \end{aligned} \quad (5)$$

여기서 热應力函數  $\Phi$ 를 (6)式으로 생각하면

$$\Phi = U - V \quad (6)$$

(5)式은 (7)式과 (8)式으로 나누어 쓸 수 있다.

$$\frac{d^4U}{dr^4} + \frac{2}{r} \frac{d^3U}{dr^3} - \frac{1}{r^2} \frac{d^2U}{dr^2} + \frac{1}{r^3} \frac{dU}{dr} = 0 \quad (7)$$

$$\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} = \beta ET \quad (8)$$

여기서 (8)式의  $V$ 를 求하면 (9)式을 얻는다.

$$V = \int \frac{\beta E}{r} \left[ \int r T(r) dr \right] dr \quad (9)$$

여기서 (9)式은 (7)式을 滿足하여야 한다. 따라서 原點으로 부터 半徑  $R$ 인 位置에서는 热應力이 發生되지 않는다고 假定하여 이를 境界條件으로 取하면 (10)式이 滿足되어야 한다.

$$\frac{\partial U}{\partial r} = \frac{\partial V}{\partial r} = \frac{\beta E}{R} \int_0^R r T(r) dr = M \quad (10)$$

그런데 (7)式의  $U$ 는 (11)式과 같아

$$U = C_1 r^2 \log r + C_2 r^2 + C_3 \log r + C_4 \quad (11)$$

쓸 수 있음으로 原點  $r=0$ 에서 有限應力を 가지야 한다는 條件과 (10)式을 使用하면 (11)式은 (12)式으로 表示된다.

$$U = -\frac{Mr^2}{2R} + C_4 \quad (12)$$

따라서 求하고자 하는 热應力은 다음과 같다.

$$\left. \begin{aligned} \sigma_r &= \frac{M}{R} - \frac{BE}{r^2} \int_0^r r T(r) dr \\ \sigma_\theta &= -\frac{M}{R} + \frac{\beta E}{r^2} \int_0^r r T(r) dr \\ \tau_{r\theta} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

여기서 (13)式의  $T(r)$ 을 (1)式으로 바꾸어 놓고 (1)式은  $0 \leq r < r_0$ 의 區間에서만 成立한다는 事實을 考慮하면 (13)式은 (14a)와 (14b)로 쓸 수 있다.

$$0 \leq r \leq r_0 \text{ 일 때}$$

$$\sigma_r = 2\beta ET_0 r_0 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(M_n/r_0)^2 \alpha \theta} \frac{J_1(M_n \frac{r_0}{r_0})}{[J_1(M_n)]^2 M_n^2} \times$$

$$\left\{ \frac{r_0}{R^2} J_1(Mn) - \frac{1}{r^2} J_1\left(Mn \frac{r}{r_0}\right) \right\}$$

$$\sigma_\theta = 2\beta ET_0 r_e \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(Mn/r_0)\alpha\theta} \frac{J_1\left(Mn \frac{r_e}{r_0}\right)}{[J_1(Mn)]^2 Mn^2} \left\{ -\frac{r_0}{R^2} J_1(Mn) + \frac{1}{r^2} J_1\left(Mn \frac{r}{r_0}\right) - \frac{Mn}{r_0} J_0\left(Mn \frac{r}{r_0}\right) \right\}$$

$$\tau_{r\theta} = 0 \quad (14a)$$

$r_0 < r \leq R$  일 때

$$\sigma_r = 2\beta ET_0 r_0 r_e \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(Mn/r_0)\alpha\theta} \frac{J_0\left(Mn \frac{r_e}{r_0}\right)}{J_1(Mn) Mn^2} \left\{ \frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2} \right\}$$

$$\sigma_\theta = 2\beta ET_0 r_0 r_e \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(Mn/r_0)\alpha\theta} \frac{J_1\left(Mn \frac{r_e}{r_0}\right)}{J_1(Mn) Mn^2} \times \left\{ \frac{1}{R^2} + \frac{1}{r^2} \right\}$$

$$\tau_{r\theta} = 0 \quad (14b)$$

따라서 이에 대응되는 변형도는 (15a)와 (15b)로 표시된다.

$0 \leq r \leq r_0$  일 때

$$\varepsilon_r = 2\beta T_0 r_e \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(Mn/r_0)\alpha\theta} \frac{J_1\left(Mn \frac{r_e}{r_0}\right)}{[J_1(Mn)]^2 Mn^2} \times$$

$$\left\{ \frac{r_0(1-\mu)}{r^2} J_1(Mn) - \frac{(1+\mu)}{r} J_1\left(Mn \frac{r}{r_0}\right) + \frac{\mu Mn}{r_0} J_0\left(Mn \frac{r}{r_0}\right) \right\}$$

$$\varepsilon_\theta = 2\beta T_0 r_e \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(Mn/r_0)\alpha\theta} \frac{J_1\left(Mn \frac{r_e}{r_0}\right)}{[J_1(Mn)]^2 Mn^2} \times$$

$$\left\{ \frac{r_0(1-\mu)}{R^2} J_1(Mn) + \frac{(1+\mu)}{r} J_1\left(Mn \frac{r}{r_0}\right) - \frac{Mn}{r_0} J_0\left(Mn \frac{r}{r_0}\right) \right\}$$

$$\tau_{r\theta} = 0 \quad (15a)$$

$r_0 < r \leq R$  일 때

$$\varepsilon_r = 2\beta T_0 r_e r_0 \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(Mn/r_0)\alpha\theta} \frac{J_1\left(Mn \frac{r_e}{r_0}\right)}{J_1(Mn) Mn^2} \times$$

$$\left\{ \frac{(1-\mu)}{R^2} - \frac{(1+\mu)}{r^2} \right\}$$

$$\varepsilon_\theta = 2\beta T_0 r_0 r_e \sum_{n=1}^{\infty} e^{-(Mn/r_0)\alpha\theta} \frac{J_1\left(Mn \frac{r_e}{r_0}\right)}{J_1(Mn) Mn^2} \times$$

$$\left\{ \frac{(1-\mu)}{R^2} + \frac{(1+\mu)}{r^2} \right\}$$

$$\tau_{r\theta} = 0 \quad (15b)$$

특성을 渦度의 函數로 보면 이미 앞에서 言及한 바

와 같이 解가 얻어지지 않음으로 差分法에 依하여 近似解를 求하기로 한다.

주어진 條件에 該當하는 힘의 平衡條件은 (16)式으로 表示된다.

$$\frac{d(r\sigma_r)}{dr} - \sigma_\phi = 0 \quad (16)$$

또 變形의 幾何學的 適合條件은 (17)와 같다.

$$\frac{d}{dr} \left\{ \frac{1}{E} (\sigma_\phi - \mu \sigma_r) + \alpha T \right\} - \frac{1}{E} \frac{1}{r} (1+\mu) (\sigma_r - \sigma_\phi) = 0 \quad (17)$$

이 때 빙의 應力播及 領域  $R$  까지를  $m$  개의 區間으로 나누면 原點에서  $n$  번째의 區間  $r_{n-1} < r < r_n$  에서는 (16)式 및 (17)式은 (18)式과 (19)式으로 표시된다.

$$\frac{r_n \sigma_{r,n} - r_{n-1} \sigma_{r,n-1}}{r_n - r_{n-1}} - \frac{\sigma_{\phi,n} + \sigma_{\phi,n-1}}{2} = 0 \quad (18)$$

$$\frac{\sigma_{\phi,n}}{E_n} - \frac{\sigma_{\phi,n-1}}{E_{n-1}} - \frac{\mu \sigma_{r,n}}{E_n} + \frac{\mu \sigma_{r,n-1}}{E_{n-1}} + \alpha_n T_n - \alpha_{n-1} T_{n-1} - \left\{ \frac{(1+\mu)}{E_n r_n} (\sigma_{r,n} - \sigma_{\phi,n}) + \frac{(1+\mu)}{E_{n-1} r_{n-1}} (\sigma_{r,n-1} - \sigma_{\phi,n-1}) \right\} \frac{r_n - r_{n-1}}{2} = 0 \quad (19)$$

여기서 係數를 (20)과 같이 취하면

$$C_n = \frac{r_n}{r_n - r_{n-1}}$$

$$D_n = \frac{r_{n-1}}{r_n - r_{n-1}}$$

$$F_n = \frac{-r_n(1+3\mu) + r_{n-1}(1+\mu)}{2E_n r_n}$$

$$H_n = \frac{r_n(3+\mu) - r_{n-1}(1+\mu)}{2E_n r_n}$$

$$G_n = \frac{-r_n(1+\mu) + r_{n-1}(1+3\mu)}{2E_{n-1} r_{n-1}}$$

$$K_n = \frac{-r_n(1+\mu) + r_{n-1}(3+\mu)}{2E_{n-1} r_{n-1}}$$

$$L_n = \alpha_n T_n - \alpha_{n-1} T_{n-1} \quad (20)$$

(18), (19)式은 (21)로 표시된다.

$$C_n \sigma_{r,n} - \frac{\sigma_{\phi,n}}{2} = D_n + \frac{1}{2} \sigma_{\phi,n-1}$$

$$F_n \sigma_{r,n} + H_n \sigma_{\phi,n} = -G_n \sigma_{r,n-1} + K_n \sigma_{\phi,n-1} - L_n \quad (21)$$

여기서 임의의 點에서의 應力を 原點에서의 應力を 依로 表示할 수 있다고 생각하여 (22)式과 같은 條件을 생각하면

$$\sigma_{r,n} = A_{r,n} \sigma_{\phi,0} + B_{r,n}$$

$$\sigma_{r,n-1} = A_{r,n-1} \sigma_{\phi,0} + B_{r,n-1}$$

$$\sigma_{\phi,n} = A_{\phi,n} \sigma_{\phi,0} + B_{\phi,n}$$

$$\sigma_{\phi,n-1} = A_{\phi,n-1} \sigma_{\phi,0} + B_{\phi,n-1}$$

$$(22)$$

$A_{r,n}$ ,  $A_{\phi,n}$ ,  $B_{r,n}$ ,  $B_{\phi,n}$  等의 係數들은 (23)과 같은  
係數들을 생각하면

$$N_n = \frac{D_n H_n - \frac{1}{2} G_n}{C_n H_n + \frac{1}{2} F_n}$$

$$P_n = -\frac{\frac{1}{2} H_n + \frac{1}{2} K_n}{C_n H_n + \frac{1}{2} F_n}$$

$$Q_n = \frac{-L_n}{C_n H_n + \frac{1}{2} F_n}$$

$$N'_n = \frac{-C_n G_n - F_n D_n}{C_n H_n + \frac{1}{2} F_n}$$

$$P'_n = \frac{C_n K_n - \frac{1}{2} F_n}{C_n H_n + \frac{1}{2} F_n}$$

$$Q'_n = \frac{-C_n L_n}{C_n H_n + \frac{1}{2} F_n}$$

(23)

$$A_{\theta,n} = N_n' A_{r,n-1} + P_n' A_{\phi,n-1}$$

$$B_{\theta,n} = N_n' B_{r,n-1} + P_n' B_{\phi,n-1} + Q_n' \quad (24)$$

그런데 原點에서의 應力은

$$\sigma_{r,0} = \sigma_{\phi,0} \quad (25)$$

이므로

$$A_{r,0} = A_{\phi,0} = 1$$

$$B_{r,0} = B_{\phi,0} = 0 \quad (26)$$

(26)式과 같이 原點에서의 係數가 決定된다.

또  $r=R$  에서의 半徑方向應力에 關하여

$$\sigma_{r,m} = \sigma_{r,R} = 0 \quad (27)$$

의 條件을 생각할 수 있으므로 原點에서의 應力を 구  
할 수 있다.

$$\sigma_{\phi,0} = -\frac{B_{r,m}}{A_{r,m}} \quad (28)$$

따라서 (28)式에 依하면 이를 (22)式과 (24)式에 逐次  
代入하므로 每 區間에서의 應力を 計算할 수 있게 된  
다.

### 3. 數值計算 및 結果

#### 3.1 溫度分布 및 物性의 變化

序論에서 言及한 바와 같이 高溫에서의 性質이 잘 알

#### Chemical composition

								other		
Si	Fe	Cu	Mn	Mg	Cr	Zn	each	total	Al	remainder
0.50	0.50	3.8~4.9	0.30~0.90	1.2~1.8	0.10	0.25	0.05	0.15		

#### Physical properties at room temperature

density	(lbs/ft <sup>3</sup> )	171
specific heat	(Btu/lbs-°F)	0.22
thermal conductivity	(Btu/hr-ft-°F)	95~110
thermal diffusivity	(in <sup>2</sup> /sec)	0.1466
melting point	(°F)	940
Youngs modulus	(lbs/in <sup>2</sup> )	10,000,000
tensile strength	(lbs/in <sup>2</sup> )	59,300~60,000
yield strength	(lbs/in <sup>2</sup> )	39,420~40,000
Poissons ratio		0.3
thermal linear expansion	(in/in-°F)	12.4~12.5×10 <sup>-6</sup>

#### Mechanical properties at elevated temperature

temperature	75	100	200	212	300	400	500	600	700
Young's modulus ( $\times 10^{-6}$ )	10			9.82	9.68	8.96	7.97	6.97	
yield stress ( $\times 10^{-4}$ )		3.920	3.815		3.64		3.14		2.20
linear expansion ( $\times 10^6$ )			12.6			13.32		13.78	14.0

려져 있는 航空機用 輕合金인 2024 T 3 알루미늄板材에 對하여 數值計算을 實施한다.

2024 T 3材의 性質은 參考文獻 [11], [15]에 依하면 앞면의 表과 같다. 위의 表에서 常溫에서의 熱的性質을 使用하여 境界條件을 決定하기 為하여 (2)式의  $r_0$ 를 變化시켜 가며 計算하면 Fig. 2에서 보는 바와 같은 結果가 얻어진다.

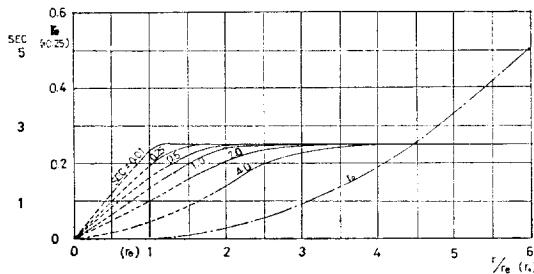


Fig. 2 Radius of heated zone

이로 부터 (2)式은  $r_0$ 가 增加함에 따라 急速히 收斂되어 滿足됨을 알 수 있다.

따라서  $0.1 \times 10^{-4}$  以內의 誤差範位內로  $r_0$ 에 收斂되는  $r_0$ 의 值을 取하면 Fig. 2에서의  $r_0$ 曲線을 用을 수 있다. Fig. 2의 曲線  $r_0$ 에 依하면 時間의 增加에 따라에는  $r_0$ 도 增加될 것이 分明하다. 그러나 時間  $\theta$ 가 4秒 일 때 分布하는 溫度의 最大值를 焊接溫度와 比較하면  $T_{\max}/T_0 = 0.04$ 가 되는데 이것은 板의 溫度가 充分히 冷却되었고 따라서 이에의 熱應力은 工學的目的으로서 無視할 수 있음을 뜻한다. 따라서  $\theta \geq 4$ 에서의  $r_0$ 보다 큰 半徑을 취하면 充分히 正確한 한 解를 줄 것이 分明하다. 또한 境界條件으로서 溫度播及 領域을 Fig. 2에서와 같이 時間의 函數로 생각하는 方法도 있을 수 있다. 따라서 溫度播及 領域  $r_0$ 를 焊接電極直徑  $r_e$ 의 6倍로 取하는 경우와 時間의 函數로 取扱한 경우를 各其別個의 境界條件으로 생각하여 두 경우를 比較코자 하였다.

위의 두 경우를 境界條件으로 指하여 板의 溫度를 計算하면 Fig. 3-1과 Fig. 3-2를 用을 수 있다.

이러한 溫度分布에 依하여 材料의 物理的 性質이 變化되므로 그를 求하기 為하여 表에서 주어진 溫度에 따른 物性的 變化를 Fig. 4에 補기고 各性質을 Fig. 4의 點線과 같은 近似曲線으로 취급한다면 (29), (30), (31)式과 같은 近似式을 얻을 수 있다. 但, Fig. 4의 700°F以上에서의 實線은 700°F以下의 值들로 부터 延長하여 얻은 것이다.

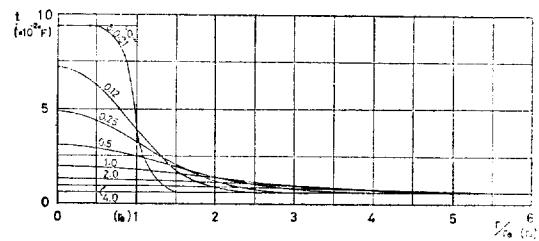


Fig. 3-1 Temperature distributions in a aluminum alloy plate 2024 T3 ( $r_0 = 6\tau_0$ )

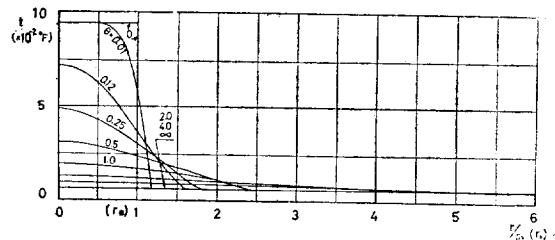


Fig. 3-2 Temperature distributions in a aluminum alloy plate 2024 T3 ( $r_0 = f(\theta)$ )

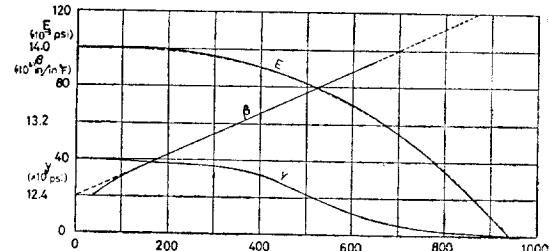


Fig. 4 Mechanical properties at elevated temperature in aluminum alloy plate 2024 T3

$$E = \left\{ -\frac{2}{3} \left( \frac{t}{100} \right)^3 - \epsilon \left( \frac{t}{100} \right)^2 + \epsilon \left( \frac{t}{100} \right) + 1,000 \right\} \quad 10 \times 10^3 \quad (29),$$

$0 \leq t \leq 500$  일 때

$$Y = -250 \left( \frac{t}{100} \right)^3 + 800 \left( \frac{t}{100} \right)^2 - 1,350 \left( \frac{t}{100} \right) + 40,000 \quad (30)$$

$500 \leq t$  일 때

$$Y = -187.5 \left( \frac{t}{100} \right)^3 + 5,237.5 \left( \frac{t}{100} \right)^2 - 50412.5 \left( \frac{t}{100} \right) + 166,562.5 \quad (30)$$

$$\beta = \left\{ 12.4 + \frac{16}{7,000} t \right\} \times 10^{-6} \quad (31)$$

Poissons 常數  $\mu$ 는 應力에 미치는 影響이 大端히 작아서 無視할 수 있으므로 0.3으로 取한다[16]. (29), (30), (31)式을 使用하면 Fig. 3-1 및 Fig. 3-2에서와 같은 溫度分布에 該當되는 物性의 變化는 Fig. 5-1, Fig. 5-2, Fig. 6-1, Fig. 6-2, Fig. 7-1, 및 Fig. 7-2에서와 같은 形態로 됨을 알 수 있다.

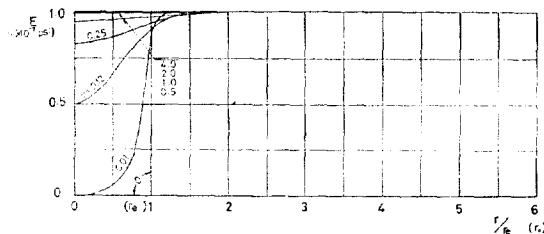


Fig. 5-1 Variation of Young's modulus under elevated temperature ( $r_o = 6r_e$ )

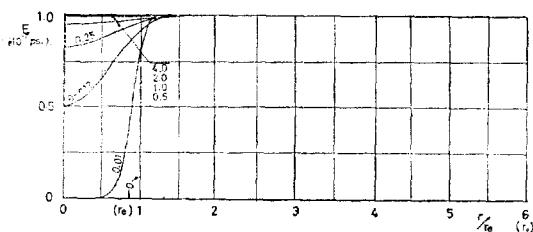


Fig. 5-2 Variation of Young's modulus under elevated temperature ( $r_o = f(\theta)$ )

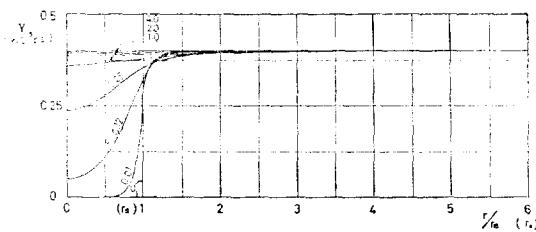


Fig. 6-1 Variation of yield stress under elevated temperature ( $r_o = 6r_e$ )

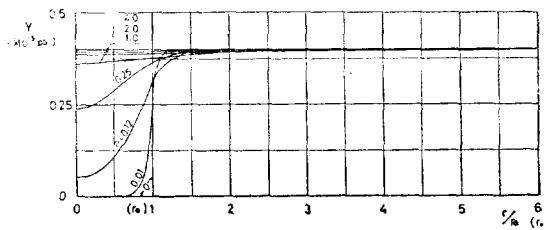


Fig. 6-2 Variation of yield stress under elevated temperature ( $r_o = f(\theta)$ )

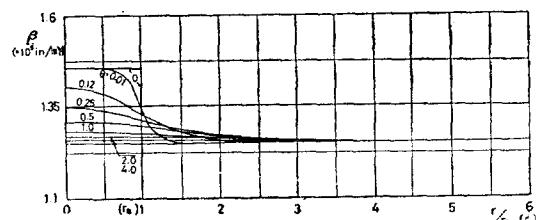


Fig. 7-1 Variation of thermal expansion coefficient under elevated temperature ( $r_o = 6r_e$ )

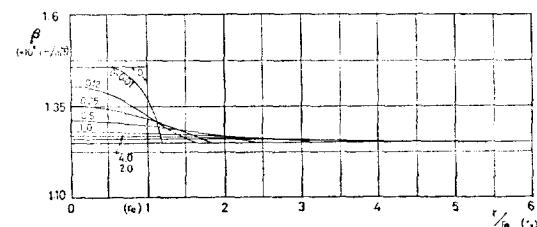


Fig. 7-2 Variation of thermal expansion coefficient under elevated temperature ( $r_o = f(\theta)$ )

### 3.2 热應力 및 热變形度

热應力 및 變形度의 計算에 있어서는 이미 理論에서 言及한 바와 같이 應力播及 領域의 設定이 必要하게 된다.

따라서 應力播及 領域을 Saint Venant의 法則에 依하여 決定한다면 溫度播及 領域  $r_o$ 의 2倍程度로 생활할 수 있다.

그런데 溫度播及 領域을 時間의 函數와 焊接電極直徑  $r_e$ 의 6倍로 取하였음으로 그에 對應되는 境界條件이 2개가 된다. 여기에다 溫度變化 領域內에 應力發生이 局限되는 條件을 追加하여 3 가지 境界條件를 擇하여 數值計算코자 하였다. 各 條件에 對하여서는 理論에서 言及한 바와 같이 物性을 常數로 取扱한 最密解와 溫度에 따라 變化되어 Fig. 5-1, Fig. 5-2, Fig. 6-1, Fig. 6-2, 및 Fig. 7-1 Fig. 7-2에서와 같이 分布되는 경우에 對한 數值解를 數值計算하였다.

物性을 常數로 取扱하여 數值計算함으로서 Fig. 8-1, Fig. 8-2 Fig. 8-3과 같은 热應力 分布를 얻었다.

또 이에 對應되는 變形度들을 求하여 Fig. 9-1, Fig. 9-2 및 Fig. 9-3을 얻었다.

物性의 變化가 Fig. 5-1, Fig. 5-2, Fig. 6-1, Fig. 6-2, Fig. 7-1 및 Fig. 7-2와 같은 경우에 對한 數值解로 부터 Fig. 10-1, Fig. 10-2 및 Fig. 10-3과 같은 热應力分部 그리고 Fig. 11-1, Fig. 11-2, 및 Fig. 11-3과 같은 热應力에 對應되는 變形度分部를 求하였다.

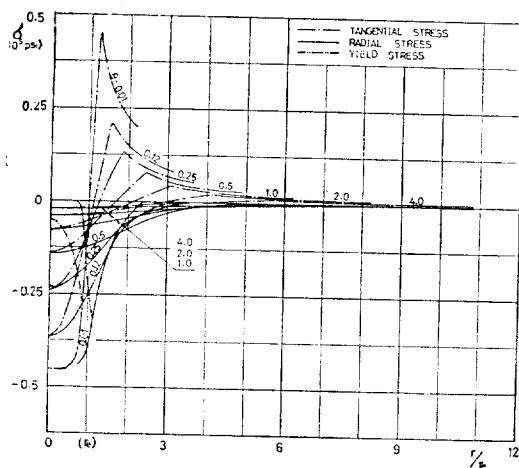


Fig. 8-1 Thermal stresses in a aluminum alloy plate 2024 T3 ( $r_o=f(\theta)$ ,  $R=2r_o$ )

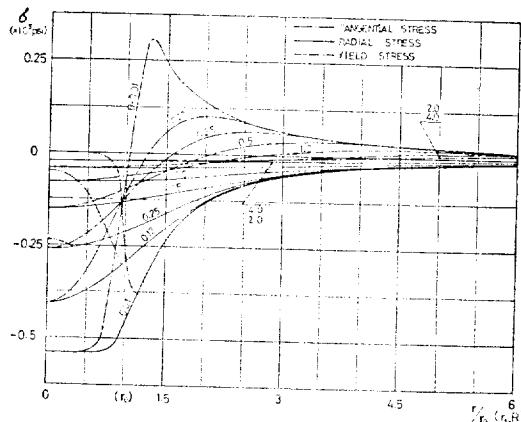


Fig. 8-2 Thermal stresses in a aluminum alloy plate 2024 T3 ( $r_o=6r_e$ ,  $R=r_o$ )

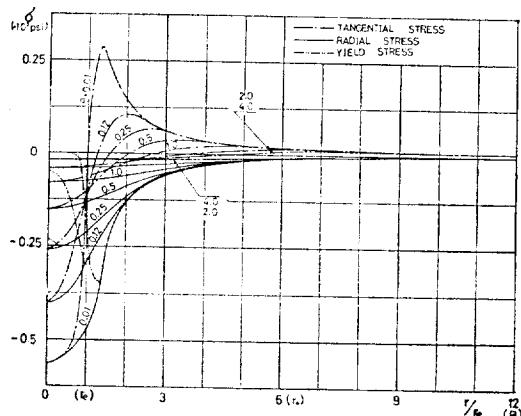


Fig. 8-3 Thermal Stresses in a aluminum alloy plate 2024 T3 ( $r_o=6r_e$ ,  $R=2r_o$ )

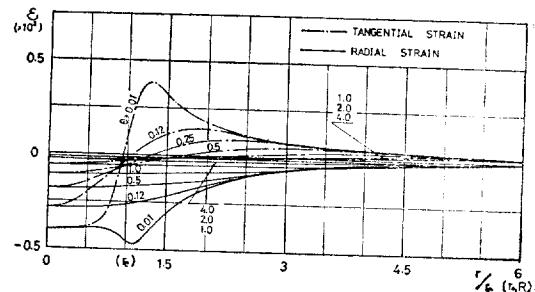


Fig. 9-1 Thermal strains in a aluminum alloy plate 2024 T3 with constant mechanical properties ( $r_o=f(\theta)$ ,  $R=2r_o$ )

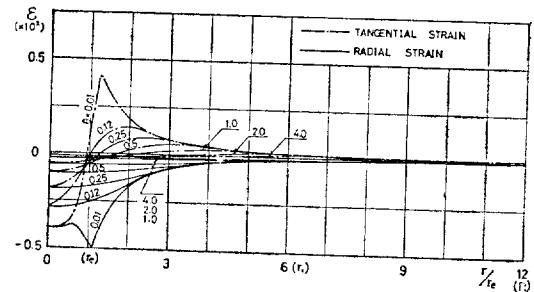


Fig. 9-2 Thermal strains in a alu minum alloy plate 2024 T3 with constant mechanical properties ( $r_o=6r_e$ ,  $R=r_o$ )

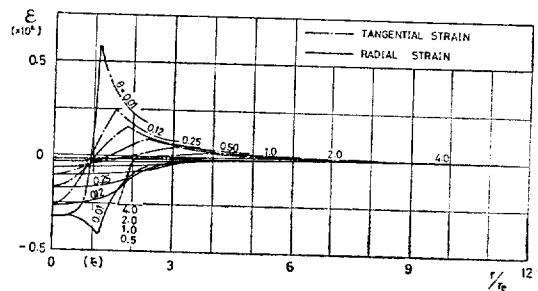


Fig. 9-3 Thermal strains in a aluminum alloy plate 2024 T3 with constant mechanical properties ( $r_o=6r_e$ ,  $R=2r_o$ )

#### 4. 檢 討

##### 4.1 溫度分布 및 物性의 變化

溫度分布는 热的 性質의 溫度에 따른 變化에 影響을  
크게 받지 않음이 이디 알려져 있으므로 이를 無視하였  
다.

境界條件으로서는 過去의 數學的 處理方法으로서 無  
限遠方을 取하는 것이 通例이 나 參考文獻[8]의 結果로

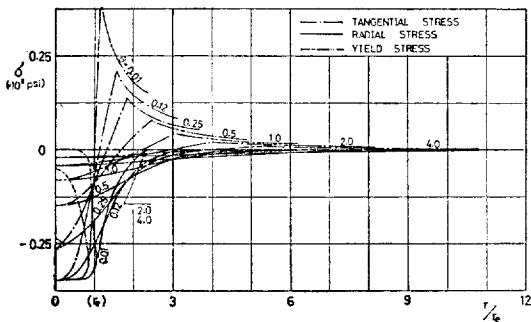


Fig. 10-1 Thermal stresses in a aluminum alloy plate 2024 T3 under variable mechanical properties ( $r_o=f(\theta)$ ,  $R=2r_o$ )

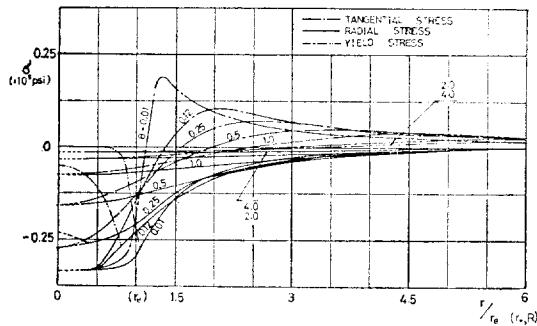


Fig. 10-2 Thermal stresses in a aluminum alloy plate 2024 T3 under variable mechanical properties ( $r_o=6r_e$ ,  $R=r_o$ )

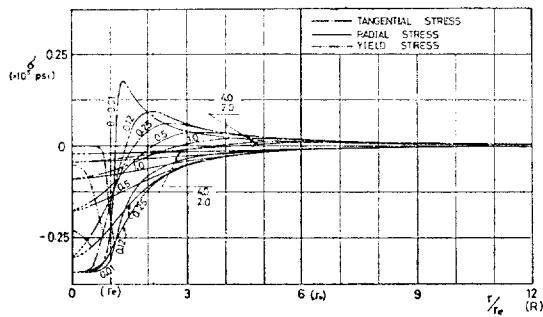


Fig. 10-3 Thermal stresses in a aluminum alloy plate 2024 T3 under variable mechanical properties ( $r_o=6r_e$ ,  $R=2r_o$ )

미루어 보면 有限領域으로 制限하더라도 工學的으로 充分히 有用한 結果가 되는 것을 알 수 있다. 有限領域 으로서 取하는데 있어서는 그 下限이 되는 것은 (2)式의 條件을 滿足하는  $r_o$ 를 取하는 것이된다. 따라서 工

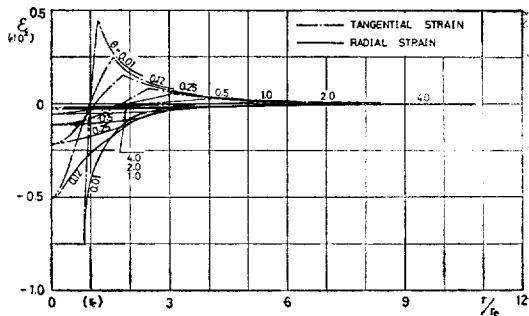


Fig. 11-1 Thermal strains in a aluminum alloy plate 2024 T3 under variable mechanical properties ( $r_o=f(\theta)$ ,  $R=2r_o$ )

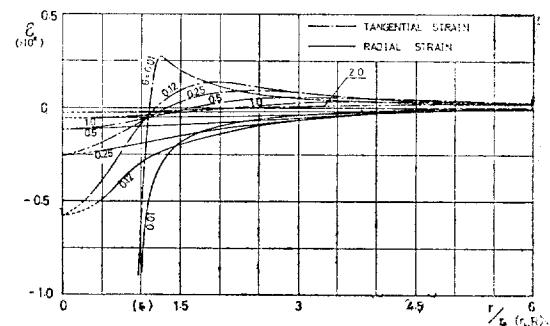


Fig. 11-2 Thermal strains in a aluminum alloy plate 2024 T3 under variable mechanical properties ( $r_o=6r_e$ ,  $R=r_o$ )

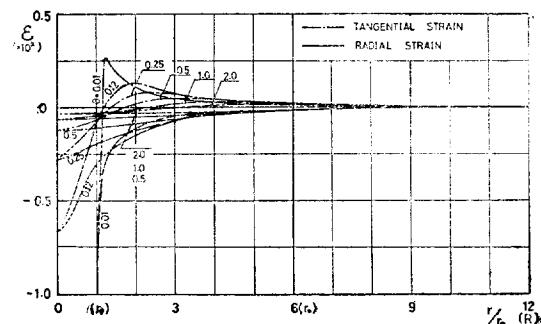


Fig. 11-3 Thermal strains in a aluminum alloy plate 2024 T3 under variable mechanical properties ( $r_o=6r_e$ ,  $R=2r_o$ )

學의 見地에서 充分히 큰 減溫變化 領域을 取하였다고 생각할 수 있는  $r_o=6r_e$ 인 경우와 下限值로 取한 두 경우로 부터 얻어진 Fig. 3-1과 Fig. 3-2를 比較하여 보면  $r$ 의 적은 값에서는 거의 完全히 일치되고  $r_o$ 가 커

짐에 따라서 温度分布에 差異가 생기는 것을 볼 수 있으나 그 差異는 工學的 問題에서 無視할 수 있는 程度라 생각된다. 따라서 이에 따른 材料의 物性의 變化 面서 2 가지가豫測되어 Fig. 5-1, Fig. 5-2, Fig. 6-1, Fig. 6-2 및 Fig. 7-1과 Fig. 7-2에서 보는 바와 같이 工學的으로는 同一한 値으로 볼 수 있는 結果가 됨을 알 수 있다.

#### 4.2 热應力 및 热變形度

應熱力 및 變形度의 計算에 있어서도 境界條件으로서 應力播及 領域을 設定할 必要가 있는데 이것 역시 無限遠方으로 取하는 것이 생각될 수 있으나 工學問題에 있어서는 흔히 Saint Venant의 法則에 依하여 有限하게 制限하여 取扱할 수 있으므로 温度變化 領域의 2倍 程度의 區間으로 制限하여 使用할 수 있다. 따라서 温度變化 領域의 2倍되는 領域을 應力播及 領域으로 取하면 温度分布에 對應되는 2 가지 境界條件이 있다.

그런데 이 두가지의 境界條件의 中間이 되며 有限圓板의 경우에 있어서는 嚴密解가 되는 條件은 温度播及 領域과 應力發生 領域이 一致되는 경우이다. 따라서 이에 該當된 境界條件를 追加하여 計算하였다.

##### 4.2.1 物性을 常數로 取扱한 解

物性을 常數로 보고 温度變化만을 考慮한 應力分布 Fig. 8-1, Fig. 8-2 및 Fig. 8-3으로부터 다음과 같은 事實들을 알 수 있다.

첫째로 Fig. 8-1에서 應力播及 領域으로 設定한 境界條件이 實際보다 훨씬 작기 때문에 接線應力成分이 크게 境界面에 나타나는 것을 볼 수 있다. 또 温度分布 領域 밖에서는 温度函數가 不連續函數가 되므로 그에 따른 不連續點이 나타나는 것을 볼 수 있으며 이 점에서 最大接線應力가 發生됨을 볼 수 있다. 이러한 事實은 表面이 剛體에 固着된 경우에 對한 理論解析結果 [11]와 比較하여보면 合理의 傾向을 보이고 있다고 생각된다. 그러나 時間  $\theta$ 가 큰 値이 될 때에는 다른 境界條件으로 計算된 値과 應力의 分布와 크기가 거의 같은 値을 갖는 것을 볼 수 있다. 따라서 温度distribution만을 생각할 때에는 境界條件을 下限值로 取하여도 좋으나 應力distribution에 있어서는 一意의 Saint Venant의 法則을 使用할 수 없음을 알 수 있다.

應力播及 領域을 温度變化가 일어나는 最大領域과 同一하다고 생각한 두번째 경우 Fig. 8-2를 보면 温度分布의 不連續性이 없어지므로 應力distribution의 不連續이 없어진다. 그러나 境界面에서의 接線應力가 남게 되는 것을 確認할 수 있고 이는 境界條件이 오히려 温度變化 領域과 같은 半徑을 갖는 圓板의 境界條件에 該當된다는 事實을 考慮한다면 期待할 수 있는 結果라 할 수 있

다. 그러나 한가지 흥미있는 것은 境界條件을 가장크게 取한 마지막 경우 Fig. 8-3과 비교할 때 同一範圍內 即  $0 \leq r \leq r_0$ 에서는 두 경우에 數值의으로 거의 同一한 應力分布가 됨을 볼 수 있다.

마지막 경우인 Fig. 8-3을 보면 設定한 境界面에서 法線應力이 無視할 수 있을 程度로 充分히 작아진 것을 볼 수 있다. 또한 Fig. 8-1에서 나타나던 不連續性도 温度分布가  $r_0$ 에서 不連續函數임에도 不拘하고 發見할 수 있게 된다. 이러한 事實들을 綜合하여 抵抗點熔接으로 因한 热應力を 計算함에 있어서 温度播及 領域을 充分히 크게 12倍程度로 取하고 그와 同一한 領域을 應力播及 領域으로 取扱하는 것을 생각할 수 있다. 이와 같이 생각하였을 때 函數의 不連續性이 없어지므로 計算上의 難點이 多少解消된다. 그러나 反面에 函數의 收斂이 느려지므로 計算項數를 훨씬 增加하여야 하는 問題가 提起된다.

變形度에 關한 Fig. 9-1, Fig. 9-2 및 Fig. 9-3을 比較하여 보면 다음과 같은 事實들을 생각할 수 있다. 우선 Fig. 9-1을 보면 Fig. 8-1에서와 같은 不連續性과 境界面에서 接線方向의 變形度成分이,  $\theta$ 가 작은 値일 수록 두드러지게 나타나고 있는 것을 볼 수 있다. 뿐만 아니라 境界面에서의 變形度가 許容된다는 事實로 因하여 原點近處에 있어서의 變形度도 다른 條件에서 일어진 値에 比하면 작아지게 마련이다.

또한 Fig. 9-2는 應力에서와 같이 函數의 不連續은 없어지나 境界面에서의 變形度가 남아 있는 것을 볼 수 있다. 그러나 原點近處에서의 變形度의 크기가 境界條件를 充分히 크게 取한 Fig. 9-3과 完全히 一致되고 있으며 境界面에서의 變形度도 工學問題에서 充分히 無視할 수 있는 結果임을 알 수 있다. Fig. 9-3에서 역시 거의 同一한 事實을 알 수 있고 境界面에서의 變形度가 Fig. 9-2에서보다 훨씬 적다는 것을 알 수 있다.

##### 4.2.2 物性을 温度의 函數로 取扱한 解

物性이 温度의 變化에 따라 變化된다고 보면 現實과 가장 接近된 結果를 얻을 수 있을 것이다 이미前述한 바들에 依하면 嚴密解가 얻어지지 않으므로 差分法에 依하여 近似解를 얻었다.

이때 計算에서 使用한 分割區間은 모든 條件에서 同一하게 應力播及 領域까지를 原點으로 부터 50個의 等間隔으로 設定하였다. 이렇게 하여 일어진 結果는 Fig. 10-1, Fig. 10-2, Fig. 10-3에서 보는 바와 같다. 이 線圖들에서는 原點近處에서 點線을 使用하고 있는데 이것을 設定한 分割區間이充分하지 못하여 原點近處의 몇個區間에서 計算值가相當한 크기의 振幅을 가지고 偏倚하게 되는 바 區間數를 細分함으로써 일어질 것으로

생각되는 收斂曲線을 表示한 것이다. 따라서 原點近處의 값이 Fig. 10-2와 Fig. 10-3에서多少 差異를 갖게 되는데 이것은 區間數를 同一하게 取하였으므로 해서 區間의 幅이 달라진 것에 依한 結果로 생각된다. 이러한 事實들로 綜合하면 Fig. 10-1, Fig. 10-2 및 Fig. 10-3의 應力分布는前述한 物性을 常數로 取扱한 計算結果 Fig. 8-1, Fig. 8-2 및 Fig. 8-3과 同一한 傾向을 갖는다고 볼 수 있다. 뿐만 아니라 初期條件에 該當한다고 생각할 수 있는  $\theta=0.01$ 인 경우에 있어서 5~25% 程度로, 常數로 取扱한 경우가 큰 應力を 나타내것 있으나 時間이 經過함에 따라 그 差異가 減少하여  $\theta=0.12$ 초일 때는 이미 두 條件이 同一한 값이 되는 것을 알 수 있다. 그런데  $\theta=0.12$ 초에서의 最高溫度가 焊接溫度의 0.5倍程度가 됨으로相當히 높은 温度까지도 알루미늄合金에서는 物性을 常數로 取扱할 수 있음을 알 수 있다.

Fig. 11-1, Fig. 11-2 및 Fig. 11-3의 變形度를 살펴보면 初期條件에 가까울수록 變形度가 常數로 取扱한 解와 差異가 큰 것을 볼 수 있다. 특히  $\theta=0.01$ 일 때는 加熱部에서의 값들이 대단히 커서 거의 無限大의 값이라고 볼 수 있는데 이것은 初期條件으로서 焊接電極과 同一한 半徑을 갖는 領域이 熔解溫度에 도달하는 것으로 取扱했기 때문에 그 區間에서의 弹性係數가 Fig. 3-1, Fig. 3-2에서와 같이 零이 되기 때문에 나타나는結果이다. 따라서 原點近處와  $\theta$ 의 작은 값에서의前述한 特性들을 考慮하면 板의 變形度를 잘 나타내고 있다고 볼 수 있다. 또한 热應力의 경우에서와 마찬가지로 物性을 常數로 取扱하여도 工學的으로充分히 正確한 解를 얻을 수 있다고 생각된다. 境界條件에 依한 影響도前述한 경우들과 完全히 同一한 傾向임을 알 수 있다.

#### 4.3 殘留應力 및 殘留變形度

热應力으로 因한 殘留應力은 相當한 區間に 降伏應力以上的 應力이 發生되었다가 冷却됨으로 因하여 該當區間に 永久變形이 남게 되어 나타나게 된다.

計算된 應力分布圖들에 Fig. 7-1 및 Fig. 7-2에서와 같은 降伏應力を 導入하면 Fig. 8-1, Fig. 8-2, Fig. 8-3, Fig. 10-1, 10-2, 및 Fig. 10-3에서 보는 바와 같이 二點鎖線으로 表示된다.

이에 依하면 热應力이 降伏應力보다 큰 경우는 時間  $\theta$ 가 0.25보다 작고, 焊接熱로 一次加熱 되었던 區間 ( $0 \leq r \leq r_0$ )과 그에隣接한 微小區間に에 限定된다는 것을 알 수 있다. 그런데 이 區間은 熔解되었던가 또는 annealing 温度까지 加熱되었던 區間임을 Fig. 3-1 및 Fig. 3-2에서 確認할 수 있다. 따라서 이 區間에서는

材料의 組織이 壓延組織에서 鑄造組織으로 또는 硬化된 狀態에서 軟化된 狀態로 바뀌게 된다. 따라서 冷却된 후의 이 區間에서의 材質은 2024 T3材가 아닌 다른 性質을 갖는 材質이 되는 區間이 될 것이다. [12] 이러한 條件外에도 焊接電流가 끊어진 후에도 焊接電極이 除去될 때까지에는 時間의 差異가 있을 뿐 아니라 焊接電極이 板에 相當한 壓力を 주게 됨으로 點焊接後 板에는 板두께 方向으로 永久變形이 상당량 남게 된다. 이러한 點들로 因하여 殘留變形 및 殘留應力이 解析的 方法으로 얻어질 수 없으며 實驗的 인 方法으로 接近하는 경우에 있어서도 期待되는 殘留應力 發生範位가 大端히 工作으로 定量的結果를 期待하기 어렵다. 參考文獻 [2], [3] 等에서의 結果와 參考文獻 [8]의 低炭素鋼의 冷却溫度分布에 依하면 低炭素鋼에서는 加熱溫度가 높고 冷却溫度가 낮으며 降伏應力이 比較的 낮기 때문에 热應力이 降伏應力보다 큰 값을 갖는 範位가 크게 될 것이 分明하다. 따라서 알루미늄合金에서 門題되는 原點近處에서의 條件에 影響을 적게 받을 것임으로 近似的解석方法이 可能하게 될 것으로 믿어진다.

### 5. 結論

알루미늄合金(2024 T3)의 抵抗點焊接에 있어서는 上述한 事實들에 依하여 다음과 같은 工學的 目的으로 有用한 現象들을 確認할 수 있다.

- 1) 溫度變化 領域을 焊接電極直徑의 5~6倍 程度로 取扱할 수 있다.
- 2) 热應力 및 變形度를 溫度變化 領域과 同一한 6r<sub>0</sub>의 半徑을 갖는 領域內에 局限된다고 보아 近似計算할 수 있다.
- 3) 热應力 및 變形度의 計算에서 最高溫度 500°F까지는 物性을 常數로 取扱할 수 있다.
- 4) 殘留應力 및 殘留變形은 焊着部와 隣接微少 區間に 局限된다.

### 後記

本研究를 為하여 1972 年度 文教部 學術研究助成費를 支給하여 주신 文教當局, 研究進行에 많은 助言을 주신 任尚鎮教授님, 그리고 學內 여러 教授님들께 謝意를 表하는 바이다.

### 參考文獻

- [1] A.G. Cepolina and D.A. Carnonico; "The Measurement of Residual Stresses," *Welding Journal R.S.* p.31~p.38, 1971.
- [2] Koichi Masubuchi and D.C. Martin; "Investigation

- of Residual Stresses by Use of Hydrogen Cracking," *Welding Journal R.S.* p. 553~p. 563, 1962
- [3] S. Weiss, W.P. Hughes and H.J. Macke; "Welding Evaluation of High Temperature Sheet Materials by Restrained Patch Testing," *Welding Journal R.S.* p. 17~p. 22, 1962
- [4] D. Rosenthal; "Mathematical Theory of Heat Distribution During Welding and Cutting," *Welding Journal R.S.* p. 220~p. 234, 1941
- [5] D. Rosenthal and R. Schmerber, "Thermal Study of Arc Welding-Experimental Verification of Theoretical Formulars," *Welding Journal R.S.* p. 2~p. 8, 1938
- [6] R.J. Grosh and E.A. Trabant; "Arc Welding Temperatures," *Welding Journal R.S.* p. 396~p. 400, 1956
- [7] D.J. Sullivan, "Heat Transfer During Resistance Welding and Dip Soldering," *Welding Journal R.S.* p. 79~p. 81, 1965
- [8] 金曉哲, "抵抗點熔接에 따른 過渡的 冷却溫度履歷", 大韓造船學會誌 第9卷 第1號, p. 15~p. 20, 1972
- [9] Bruno A. Boley; "The Determination of Temperature, Stresses, and Deflections in Two-Dimensional Thermoelastic Problems," *Journal of the Aeronautical Science*, p. 67~p. 75, 1956
- [10] Chieh-Chien Chang and Wen-Hwa Chu; "Stresses in a Metal Tube under Both High Radial Temperature Variation and Internal Pressure," *Journal of Applied Mechanics*, p. 101~p. 108, 1954
- [11] B.E. Gatewood; "Thermal Stresses," McGraw-Hill Book Company, 1957
- [12] 金在璣, 金曉哲, "내식 경합금강의 개발에 관한 제 기본문제의 연구", 과학기술처 연구보고서, 1971
- [13] S.S. Manson; "Thermal Stress and Low Cycle Fatigue," Mc Graw-Hill Book Company, 1966
- [14] Jahnke Emde Lösch; "Tables of Higher Functions," McGraw-Hill Book Company, 1960
- [15] 軽金屬學會, "アルミニウムハンドブック" 朝倉書店, 1963
- [16] 任尚鎮, "異質圓環으로 補強된 圓形子母 周圍에 서 應力分布," 大韓造船學會誌, 第6卷 第1號, 1969