技術解說

Tellegen 정리에 관한 고찰

이 상 배*

1. 머 릿 말

때때로 특수분야에서 간단하고 일반성을 띄우면서도 새로운 사실을 탐구하는 방법을 제시할 뿐만 아니라 이미 아는 결과를 쉽게 유도할 수 있는 유용한 정리가 있다. 1952년 화란 Philips 연구소의 B. D. H. Tellegen 교수에 의하여 발표된 Tellegen 정리가 바로 이런 정리에 속한다.

많은 회로망 이론중에서 이 정리처럼 일반성을 띄운 것도 드물다. 이 정리는 Kirchhoff 법칙(K. L.)을 따르는 모든 전기회로에 적용된다. 회로가 선형이든 비선형이든, 시간에 따라서 변하든 않든, 능동이든 수동이든, 가역성이든 아니든, 단가(單價)이든 다가(多價)이든 회로구성에 관계 없이 이정리는 성립하며 또한 어떤 형태의 입력이나 초기조건에도 전연 무관하다.

회로해석에 있어서 일반적인 방법은 Kirchhoff 전압법칙(K. V. L.)과 전류법칙(K. C. L.) 그리고 회로소자의 구성법칙(Constitutive Law)들로 이루어지는 연립방정식으로부터 초기조건과 입력에 따르는 해(解)를 구하는 것이다. 따라서 KVL 과 KCL 만으로는 회로성질을 결정하는 데 충분치 못하다.

Tellegen 정리는 KVL 을 만족하는 전압과 KCL 을 만족하는 전류만을 취급하고 회로소자의 구성법칙과는 아무런 관련이 없다. 뿐만 아니라 Tellegen 정리에서 취급하는 전압과 전류는 반드시 같은 회로의 것이 아니드라도 성립되는 이례적인 것이다. 따라서 이정리는 KVL 과 KCL 에 의해서만 증명될 것이므로 회로소자의 성질과 입력, 초기조건에 관계없이 성립됨을 알 수 있다.

비교적 최근에 알려진 이정리는 적어도 여섯개의 교재에서 다루어지고 있음을 부언해 둔다(참고문헌 참조).

2. Tellegen 정리의 증명

2.1 Kirchhoff 법칙(KL)

Tellegen 정리는 단지 KL 에만 의존하므로 잘 알려져 있는 사실이지만 이법칙에 관하여 살펴보자. 편리상 어떤회로의 **선형그라프**(linear graph)를 생각하자. 그 선형그라프는 회로의 **마디**(node)와 **가지**(branch)만으로 이루어지며 회로의 Topology 를 나타낸다. 하나의 가지는 저항, 커패시터 혹은 인덕터등을 대신하게 된다. 선형 그라프라고 해서 회로소자들이 꼭 선형이라는 뜻은 아니며 회로소자는 비선형이나 시간의 함수로 특징 지워줄 수가 있다.

각 가지의 순간전압과 전류는 각기 v와 i로 표시하고 기호는 그림 1과 같이 v와 i의 적(積)에 가지에 공급되는 순시전력이 되도록 정하기로 한다. 주어진 마디에 접하고있는 모든 가지전류 i_b에 대하여 KCL 은

$$\sum_b i_b = 0 \qquad (1)$$

이 식은 회로에 실제로 흐르는 전류에 관하여 필요한 조건이지만 충분조건은 아니다. 이는 회로

* 서울大學校 工科大學, 正會員

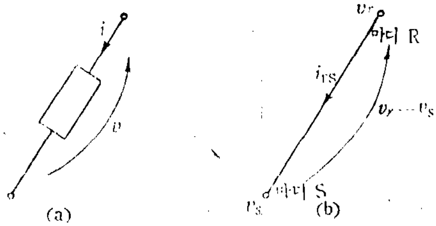

그림 1. 가지 전압, 전류의 기준과 마디전압

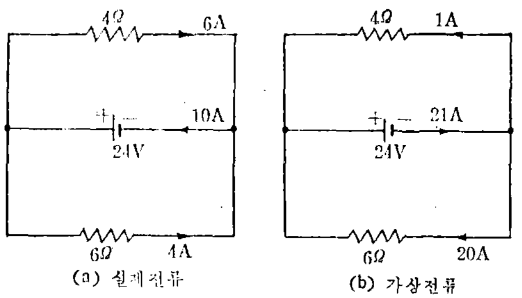

그림 2. 실제전류와 가상전류

에 실제로 흐르는 전류가 아니드라도 (1)식을 만족시킬 수 있기 때문이다. 그림 2에서 실제전류와 가상(假想)전류는 모두 KCL을 따르나 같은 회로에서는 가상전류와 실제전류가 같지않다.

루우프를 형성하는 모든 가지의 전압에 대하여 KVL은

$$\sum_b v_b = 0 \tag{2}$$

여기서도 이식은 실제전압에 대하여는 필요조건은 되나 충분조건은 될 수 없다.

한 회로의 실제전압과 전류는 (1), (2)식을 동시에 만족하고 가지의 구성법칙까지 만족하게 된다 그러나 가지가 어떤 성분이며 어떤 특징을 갖고 있느냐 하는 것은 생각하지 않는다.

2.2 실제전력

하나의 가지에 공급되는 순간전력은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$P_b = i_b v_b \tag{3}$$

그러나 가지전력은 마디전압의 항으로도 나타낼 수 있다. 그림 1(b)에서 가지 RS에 대한 가지전력은

$$\begin{aligned} P_b &= i_b v_b = i_{rs}(v_r - v_s) \\ &= i_{rs}v_r - i_{rs}v_s = i_{rs}v_r + i_{sr}v_s \end{aligned} \tag{4}$$

회로의 모든 가지전력을 더해서 회로에 공급되는 전체 순간전력을 구하면

$$\sum_b P_b = \sum_b i_b v_b = \sum_r (v_r \sum_s i_{rs}) \tag{5}$$

여기서 특정한 마디전압에 대응하는 항은 같이 모아서 합해 놓았다. (5)식은 (1)식에 의하여 회로의 주어진 마디 r에 대응하는 괄호 안이 영이 되므로

$$\sum_b P_b = \sum_b i_b v_b = 0$$

전력은 에너지의 시간적 변화율이므로 회로안에서의 에너지 보존칙의 성립을 말해 주고 있다. (6)식은 **실제전력정리**로 알려져 있다.

실제전력정리는 port를 갖는 회로에서도 각 port를 하나의 분리된 가지로 생각함으로써 쉽게 확장할 수 있다. port 전류의 방향은 가지 전류의 방향에 반대되게 취함으로써 부(負) 부호가 없게 되며 port 전력과 가지전력의 화(和)를 같게 놓으면

$$\sum_b i_b v_b = \sum_p i_p v_p. \tag{7}$$

여기서 p는 회로의 port를 나타낸다.

2.3 가상전력

이제까지는 가지에 공급되는 실제전력에 관하여 다루었으나 가상전류와 전압에 의하여 표시되는 가상전력의 경우도 식(7)과 유사한 결과식을 얻을 수가 있다. 유도하려고 하는 결과는 두개의 각기 다른 상태(state)를 기준으로 해서 얻는데 회로안에서 각기 다른 상태란 같은 Topology를 갖는 회로에서 각기 다른 입력이나 다른 소자 혹은 다른 소자의 값을 가질 때의 전압과 전류를 의미한다.

그림 3은 두개의 회로상태를 보인 것이다. 얼른 보기에는 두 회로가 전연 별개의 것 같으나 같은 Topology를 갖고 있음을 알 수 있다. 즉 같은 선형 그라프를 갖는다. 따라서 회로(a)와 (b)는 특정한 회로의 두 상태이고 회로 (a)의 실제전류

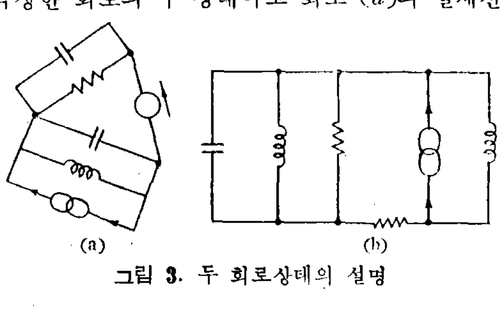

그림 3. 두 회로상태의 설명

는 항상 회로(b)의 가상전류가 될 수 있고 회로(b)의 실제전류도 회로(a)의 가상전류가 되며 전압의 경우도 같은 논법이 성립한다.

회로의 두 상태를 ($'$)과 ($''$)으로 표시하고 각 가지에 대하여 가상전력을 다음과같이 정의하면

$$P_b = i_b' \, v_b'' \tag{8}$$

(3)식에서 (5)식을 유도하는 것과 같은 방법으로 (8)식에서

$$\sum_b P_b = \sum_b i_b' v_b'' = \sum_r (v_r'' \sum_s i_{r,s}) \tag{9}$$

(1)식으로 부터 $i_{r,s}'$이 실제전류이건 가상전류이건 괄호 안은 영이 되므로 (9)식은 영이 되고, port 를 가진 회로에서서는

$$\sum_b i_b' v_b'' = \sum_p i_p' v_p'' \tag{10}$$

가 되며 이관계는 **가상전력정리**라고 부르기도 하나 **Tellegen 정리**로서 알려져 있다.

특수한 경우로서 그림 3의 두회로가 같을 때는 두 회로 상태는 같게 되며 실제전류와 실제전압을 가지므로 실제전력을 나타내게 된다.

전류 i_b'과 i_p', 전압 v_b''과 v_p''은 각각 KCL 과 KVL 을 만족하여야 하며 i_b'', i_p''과 v_b', v_p''은 반드시 KL 을 동시에 만족할 필요는 없다. 또한 $i_p' v_p''$은 전력이 아니므로 **가상**(virtual 혹은 quasi)**전력**이라고 한다.

Tellegen 정리는 증명과정에서 KL 만을 썼고 다른 회로해석에서처럼 구성법칙을 쓰지 않았으므로 이정리는 KL 을 따르는 어떤회로에 대해서도 성립되며 입력자극이나 초기조건의 어떤 형태에도 제약을 받지 않고 성립된다는 것을 강조한다

3. Tellegen 정리의 일반형

3.1 Kirchhoff 연산자

Tellegen 정리는 연산자를 씀으로써 일반화 할 수 있다. 이렇게 함으로써 일반화된 정리는 여러가지 연산자를 취함으로써 특정한 방정식을 나타내게 되기 때문이다.

어떤 실제 혹은 가상전류에 연산자 A가 작용하여 가지전류의 집합을 얻었다고 하자. 만일에 이들 전류의 집합이 KCL 을 따르면 이때 A를 **Kirchhoff 의 전류 연산자**라고 부른다. 예를 들어 가지전류의 집합 $\{i_n(t)\}$가 KCL 을 따른다면 그 전류의 시간적 변화분 역시 KCL 을 따른다. 따라서 Kirchhoff 의 전류 연산자는 "시간에 관한 미분"이다.

또한 Fourier 변환도 하나의 Kirchhoff 의 전류 연산자이다. Kirchhoff 의 전압 연산자도 같은 방법으로 정의할 수 있다. 즉 KVL 을 따르는 가지 전압의 집합에 연산자 A를 작용해서 얻은 가지 전압의 집합이 역시 KVL 을 따른다면 그때 그 연산자 A는 **Kirchhoff 의 전압 연산자이다.** Kirchhoff 의 전압 연산자나 전류 연산자를 Kirchhoff 연산자라고 부르며 이들 대부분은 전압연산자이면서 전류 연산자가 되나 모든 경우에 다 그렇지는 않다.

순간 전류 i_b를 직류분 I_b와 변화분 δI_b로 나누면 한 마디에 들어오는 I_b의 화는 영이 되며 그 변화분 δI_b의 화도 역시 영이 된다. 모든 가지에서의 $V_b \delta I_b$의 화는

$$\sum_b \delta I_b V_b = \sum_r (V_r \sum_s \delta I_{r,s}) \tag{11}$$

로 표시할 수 있으며 두 회로 상태인 경우에는

$$\sum_b \delta I_b' V_b'' = \sum_r (V_r \sum_s \delta I'_{r,s}) \tag{12}$$

로 쓸 수 있다. 여기서 r와 s는 주어진 회로의 마디들이다. δI_b는 KCL 을 따르므로,

$\sum_s \delta I_{r,s} = 0$ 이고, 따라서

$$\sum_b \delta I_b V_b = \sum_b \delta I_b' V_b'' = 0 \tag{13}$$

윗 식에서 δ는 Kirchhoff 연산자이며 실제문제에서 대부분의 연산자는 선형이다. 그러나 선형 연산자를 사용했다고 하여 정리 자체가 선형회로에만 국한하는 것은 물론 아니다.

3.2 Tellegen 정리의 일반형

A'과 A''을 각기 다른 두개의 kirchhoff 연산자라 하자. Tellegen 정리 (10)식의 i와 v대신에 A'_i와 A''_v를 넣으면

$$\sum_b A' i_b A'' v_b = \sum_p A' i_p A'' v_p \tag{14}$$

이 식은 Tellegen 정리 중에서 가장 일반적인 것이어서 **강형**(强型, strong form)이라 부른다. 이 강형은 Kirchhoff 연산자 A'과 A'', 소자의 구성법칙, 입력과 초기조건이 어떤 형태의 것이

라도 성립함을 알 수 있다.

만일 Λ'과 Λ''이 같은 연산자이면 (14)식은 (7)식과 같으며 Λ'과 Λ''이 회로의 다른 상태를 취하면 (14)식은 (10)식과 같이 가상전력정리가 된다. (14)식에서 연산자 Λ'과 Λ''을 서로 바꾸면(이때는 Λ'과 Λ''은 Kirchhoff의 전류연산자 이면서 전압연산자이다)

$$\sum_b \Lambda'' i_b \Lambda' v_b = \sum_p \Lambda'' i_p \Lambda' v_p \tag{15}$$

(15)식을 (14)식에서 빼고, 더하면 다음 두 식을 얻는다.

$$\sum_b (\Lambda' i_b \Lambda'' v_b - \Lambda'' i_b \Lambda' v_b) = \sum_p (\Lambda' i_p \Lambda'' v_p - \Lambda'' i_p \Lambda' v_p) \tag{16}$$

$$\sum_b (\Lambda' i_b \Lambda'' v_b + \Lambda'' i_b \Lambda' v_b) = \sum_p (\Lambda' i_p \Lambda'' v_p + \Lambda'' i_p \Lambda' v_p) \tag{17}$$

(16)식은 Tellegen의 **차형**(差形, difference form), (17)식을 Tellegen의 **화형**(和形, Sum form)이라 부르고, 이 두식을 **약형**(弱形, weak form)이라 하는데 이식들은 Tellegen정리를 이용하는 많은 응용 분야에 쓰여지고 있다.

이외에도 Tellegen정리는 여러 형태로 쓰여질 수가 있다. 한예로써 각기 dual인 두개의 회로를 생각할 때 한 회로에 적용되는 KVL은 dual회로의 KCL에 해당하므로 두 회로의 전류사이의 관계를 Tellegen정리에서 유도할 수 있다.

$$\sum_b \Lambda' i_b \Lambda'' \bar{i}_b = 0 \tag{18}$$

여기서 $\bar{i}_b$는 dual회로의 전류이다.

또한 Tellegen정리는 Kirchhoff 법칙으로부터 증명되었으나 한편으로 Tellegen정리로 부터 Kirchhoff 법칙을 증명할수도 있다. 즉 KVL과 Tellegen정리는 동시에 KCL을 암시하고 KCL과 Tellegen정리는 곧 KVL을 말해주고 있다.

4. Tellegen 정리의 응용

Tellegen 정리의 일반성과 포괄성은 많은 응용을 가능케 하고 있다. 이정리는 회로안의 소자의 종류에 관계없이 유도 되었으므로 비선형소자를 가진 회로나 선형 RLC회로등 임의의 회로에 응용할 수가 있다. 순간전력, 직류나 교류전력, 소신호 전력, 회로내의 전압과 전류가 stochastic 성질을 가질 때등 실로 광대하고 유용한 응용을 들 수 있다.

가장 응용도가 큰 것은 역시 선형회로이며 정상상태에서 많이 쓰이고 있고 전력의 보존칙, 임피던스, 가역성, 과도특성, 리액터스, 공진현상, 잡음등에 대해서도 이정리를 바탕으로 많은 정리를 낳고 있다.

Tellegen 정리의 성질상 비선형 회로망에의 응용은 너무도 당연하다. 비선형 회로에서 시간영역과 주파수 영역에서의 해(解)의 유일성, 전압 전류의 최소최대정리, 비선형 소자의 에너지 관계 등 많은 정리를 얻었다.

그외에도 Tellegen 정리는 회로소자가 변하는 회로, 감도의 해석, 스윗칭 회로에, 그리고 자동 회로설계등에서 이 정리를 기초로 하고 있다. 물리계통인 전자장, 프라스마, 양자역학에서까지 이 정리를 이용하고 있는 실정이다.

5. 맺 는 말

누차 강조한 것처럼 Tellegen정리는 Kirchhoff 법칙을 따르는 전기회로는 회로의 종류나 입력과 초기조건에 구애됨이 없이 항상 성립하는 고로 그 응용도가 큰 유용한 정리이다.

이 정리는 특수한 가정이 따르는 회로에서 특히 유용하며 이 정리에 의한 증명이 훨씬 간단할 수가 있어 많은 분야에서 응용되고 있는 실정이므로 회로망 합성과 회로이론 연구에 좋은 도구가 될 것이다. 최근 비선형과 시변화(time-variant) 회로의 연구가 활발히 진행되고 있으나 이들 회로에 적용할 일반적인 정리가 적음에 비추어 이 정리는 이 방향의 연구에 도움이 될 것이다.

참 고 문 헌

1. Newstead, G., General Circuit Theory, Methuen & Co. Ltd., London, 1959. Sec. 16.
2. Bose, A. G., and K. N. Stevens, Introductory Network Theory, Harper and Row, New York. 1965. Chap. 7.
3. Cruz, J. B., Jr., and M. E. van Valkenburg, Introductory Signals and Circuits, Blaisdell Pu-

blishing Co., Waltham, Massachusetts 1967. Sec. 6.5.

4. Desoer, C. A., and E. S. Kuh, Basic Circuit Theory, McGraw-Hill Book Co. Inc., New York, 1969. Chap. 9.
5. Rohrer, R. A., Circuit Theory; an Introduction to the State Variable Approach, McGraw-Hill Book Co., New York, 1970. pp. 47-49.
6. Spence, R., Linear Active Networks, Wiley-Interscience, a Division of John Wiley & Sons, Ltd., London, England, 1970. Chap. 5.
7. Tellegen, B. D. H., "A General Network Theorem, with Applications," Philips Res. Rept., 7, 256-269 (August 1952).