

特性 Green 函數를 이용한 Mode 函數의 展開

(Evaluation of Mode Functions via Characteristic Green's Function Procedure)

羅 正 雄*

(Ra, Jung Woong)

1. 서 론

mode의 解析 및 合成¹⁾에서는 vector 量인 電磁界를 그의 斷面成分 및 進行方向成分으로 나누고, 斷面成分을 導波管 斷面の 境界條件을 만족하는 mode 函數의 重疊으로 展開한다. 이때, 各 mode 振幅係數는 scalar 量으로서 傳送線式을 만족시키며, 이를 mode의 電壓 및 電流라 定義한다. 주어진 斷面境界 條件을 만족시키며 規格化되었고 直交性을 가진 vector mode 函數는 同一物質로 차있는 導波管에 대하여 여러 참고문헌²⁾에 수록되어 있다. 그러나 무한대의 斷面을 가졌거나 斷面物質이 同一하지 않을 경우, 직접 mode 函數를 구하기는 용이치 않다. 無限大의 斷面에서 mode 函數는 連續 spectrum을 가지며, 해당되는 固有函數를 직접 구하고 規格化하는데는 여러가지 문제점이 있다, 이러한 난 점을 피하기 위해, 기하학적으로 비슷한 有限斷面에 대해 規格化된 고유함수를 구한 후, 有限斷面 固有函數로부터 斷面을 無限大化했을 때 無限斷面 固有函數를 얻는다. 이러한 고전적인 방법보다 직접적이며 효과적인 방법이 있는데, 이 방법은 주어진 斷面の 共振解인 mode 函數 및 이 斷面에서의 點源에 對한 解인 Green 函數와의 상호관계를 이용한다.

mode 函數는 自由振動에 해당되어, 손실이 없는 物體에서는 energy 공급이 필요치 않다. 주어진 物體에서 點源에 對한 反應을 생각하면, 自

由振動에 해당되는 週期에서는 그 反應이 無限大가 될 것인즉, Green 函數는 自由振動 週期(固有值)에서 特異點(singularity)을 갖게된다. 주어진 物體에서 固有值 및 이에 해당되는 固有函數(mode 函數)는 Green 函數로부터 유도할 수 있다. 無限 斷面에서 Green 함수는 無限點에서의 境界條件인 放射條件(radiation condition³⁾)을 만족시키므로 직접 구할 수 있게되며, 固有函數에서와 같은 여러 문제점이 생기지 않는다. 有限 및 無限 斷面에서 Mode 函數解析의 예를 들은 후, 特性 Green 函數의 方法과 비교해 보겠다. 全體 mode 函數의 直交性 및 完全性은 delta 函數⁴⁾로서 편리하게 表示(represent)할 수 있다. 또한 delta 函數는 特性 Green 函數⁵⁾를 사용하여 몇 가지로 달리 表示할 수 있는바, 이는 구하려는 電磁界를 重疊表現하는데 있어서 가장 적합한 展開 方法을 선택할 수 있기 때문에 중요하게 된다.

2. 一次元 共振問題의 一般解法

3次元 問題인 導波管內 電磁界 解析은 斷面方向과 傳播方向으로 나누어 생각할 때 各各 二次元 및 一次元 문제가 된다. 變數分離法에 의해 풀 수 있는 문제라고 가정할 때, 이 문제는 궁극적으로 一次元的 문제로 환원된다. 따라서, 一次元 固有函數문제인 Sturm-Liouville⁶⁾ 문제를 먼저 생각해 보겠다.

領域 $x_1 \leq x \leq x_2$ 에서 Sturm-Liouville 미분 방정식

* 正會員 韓國科學院

$$\left(\frac{d}{dx} p(x) \frac{d}{dx} - q(x) + \lambda_m w(x) \right) f_m(x) = 0, \quad x_1 \leq x \leq x_2 \quad (1)$$

및 均一 境界條件,

$$p \frac{df_m}{dx} + \alpha_1 f_m = 0, \quad x = x_1 \quad (2)$$

을 만족시키는 固有函數 f_m 및 固有值 λ_m 을 決定하러한다. 여기서 p, q 및 荷重函數(weight function) w 는 $x_1 \leq x \leq x_2$ 에서 x 에 대해 連續函數라 가정한다. 이 식은 無損失 非均一 傳送線 문제의 해석에 직접 이용된다. 이때 f_m 을 電壓이라 생각하면 $\left(-\frac{df_m}{dx} \right)$ 는 電流가 되며, 境界條件인 (2)식은 一般的인 Impedance 境界條件이 된다.

즉 $x = x_1$ 의 端點 Impedance 는 $\frac{f_m}{\left(-\frac{df_m}{dx} \right)} = -\frac{p}{\alpha_1}$

로 주어진다. 식(1)에서 p, q, w 및 α_1 가 實函數일때 固有值 λ_m 은 實數가 되며, 이는 非損失 物質의 경우, 즉 Hermitian 인 경우가 된다. 이를 증명하기 위하여 식(1)에 f_m 의 complex conjugate 인 f_m^* 을 곱하고, 部分積分 公式에 의해 x 에 對해 x_1 에서 x_2 까지 積分하고 境界條件을 (1) 식의 첫 항에 적용하면 다음을 얻는다.

$$\lambda_m = \left[\int_{x_1}^{x_2} dx p \left| \frac{df_m}{dx} \right|^2 + \int_{x_1}^{x_2} dx q |f_m|^2 - \alpha_1 |f_m(x_1)|^2 + \alpha_2 |f_m(x_2)|^2 \right] \times \left(1 / \int_{x_1}^{x_2} dx w |f_m|^2 \right) \quad (3)$$

p, q, w 및 α_1 가 實函數일때 (3)식 右邊은 實數가 되며, 따라서 λ_m 은 實數가 된다. 이 固有函數의 直交性を 보이기 위해, 식(1)에 固有值가 $\lambda_n = \lambda_n^*$ 固有函數 f_n^* 를 곱하고 x_1 에서 x_2 까지 積分하면, 다음을 얻는다.

$$\int_{x_1}^{x_2} dx f_n^* \frac{d}{dx} \left(p \frac{df_m}{dx} \right) - \int_{x_1}^{x_2} dx q f_n^* f_m + \lambda_m \int_{x_1}^{x_2} dx w f_n^* f_m = 0 \quad (4)$$

또한 f_n^* 도 (1)식을 만족하며, 이에 f_m 을 곱하고 적분하면, (4)식과 비슷한 결과를 얻게된다. (4)식에서 이를 빼어 얻은 식을 정리하고 部分積分을 하면 다음을 얻는다.

$$(\lambda_m - \lambda_n) \int_{x_1}^{x_2} dx w f_n^* f_m = \left[p \left(f_m \frac{df_n^*}{dx} - f_n^* \frac{df_m}{dx} \right) \right]_{x_1}^{x_2} \quad (5)$$

식(2)에 주어진 境界條件에 의해 식(5)의 右邊은 零이 되며, $m \neq n$ 일때 $\lambda_m \neq \lambda_n$ 이어서, 식(5)는 다음과 같이 固有函數의 直交性を 表示하는 식이 된다.

$$\int_{x_1}^{x_2} dx w f_m f_n^* = 0, \quad m \neq n \quad (6a)$$

이들 固有函數의 規格化(normalization)는

$$\int_{x_1}^{x_2} dx w |f_m|^2 = 1 \quad (6b)$$

에 의하여 定義된다. 完全한 固有函數系 f_m 은 식(1)의 可能한 모든 解를 구성하며, 따라서 領域 $x_1 \leq x \leq x_2$ 에서 임의의 代表可能한 函數 $F(x)$ 를 다음과 같이 展開할 수 있다.

$$F(x) = \sum_m F_m f_m(x) \quad (7a)$$

여기서 合算은 모든 固有函數 f_m 에 걸치며, F_m 은 각 固有函數의 係數이다. 固有函數의 規格直交性(식(6))에 의하여, 식(7)의 係數 F_m 은

$$F_m = \int_{x_1}^{x_2} d\xi w(\xi) F(\xi) f_m^*(\xi) \quad (7b)$$

로 구해진다. 積分變數를 x 대신 ξ 로 사용한 것은 명백성을 기하기 위함이다. 모든 固有函數의 完全性 및 規格直交性を 간단 명료히 表示하기 위하여서는, 함수 $F(x)$ 대신 delta 함수인 $\delta(x - x')$ 을 선택함 이 용이하다. 이 경우 係數 \hat{F}_m 은

$$\hat{F}_m = \int_{x_1}^{x_2} d\xi w(\xi) \delta(\xi - x') f_m^*(\xi) = w(x') f_m^*(x') \quad (8a)$$

이 되어, 식(7a)는 다음과 같이 表示된다.

$$\frac{\delta(x - x')}{w(x')} = \sum_m f_m(x) f_m^*(x'),$$

$$x_1 < x' < x_2 \quad (8b)$$

따라서, (7a)식의 $F(x)$ 는 (8a)식의 係數 \hat{F}_m 및 展開式(8b)를 곱하여 x' 에 대해 x_1 에서 x_2 까지 적분하여 얻게 된다.

3. 特性 Green 函數와 固有函數(Mode 函數)의 關係⁵⁾

식(1)에서 p, q 및 w 가 特異點을 갖지 않고, 有限區間에서 piecewise 인 常數일때 mode spectrum 은 不連續의이며 規格化된 完全한 固有函數系를 구하기는 비교적 간단하다. 固有函數의 完全性 및 規格直交성은 (8b)식과 같이 모든 固有

函數의 重疊으로 보일수 있다. p, q 및 w 가 特異點을 가졌거나 斷面區間이 無限大일 경우. 固有函數는 連續 spectrum 을 가진다. 이때 無限點에서의 境界條件은 定義하기 곤란하며, 직접 固有函數를 얻기란 거의 불가능하다. 설혹 이러한 固有函數가 구해졌다 해도, 이를 規格化하는 문제 및 完全성을 보장하는 문제는 더욱 어려운 일이다. 이러한 난점을 피하기 위하여 기하학적으로 비슷한 有限斷面에 대해 規格化된 固有函數를 구한후, 이 固有函數로 부터 斷面을 無限大化하여 無限斷面の 固有函數를 얻을 수 있다. 이때 不連續 mode spectrum 은 連續 spectrum 이 된다. 特性 Green 函數는 無限點에서 境界條件이 定義되므로 斷面이 無限이건 有限이건 관계없이 직접 구할 수 있으며, 이 特性 Green 函數로 부터 完全한 規格化된 固有函數系를 구할 수 있다.

特性 Green 함수(characteristic Green's function) $g(x, x'; \lambda)$ 는 다음식에 의해 정의된다.

$$\left\{ \frac{d}{dx} p(x) \frac{d}{dx} - q(x) + \lambda w(x) \right\} g(x, x'; \lambda) = -\delta(x-x'), x_1 < x' < x_2 \quad (9)$$

이때의 境界條件은

$$\left\{ p \frac{d}{dx} + \alpha_2 \right\} g(x, x'; \lambda) = 0, x = x_2 \quad (10)$$

로 주어진다. 여기서 λ 는 임의의 媒介變數로서 $g(x, x'; \lambda)$ 가 單一解가 되도록 제약 받는다. 이 점에 대해서는 뒤에서 더 논하도록 하겠다.

식(9)에 정의된 特性 Green 函數 $g(x, x'; \lambda)$ 는 적절히 定義된 傳送線에서 點電源에 의한 電壓 또는 電流라 解析할 수 있다. 特性 Green 함수와 mode Green 函數¹⁾와는 前者에서 λ 가 特定되지 않았다는 점이 다르다.

特性 Green 函數로 부터 完全한 固有函數系 f_m 을 유도하기 위하여, 잠시 完全한 固有函數系가 주어졌 있다고 가정한다. 따라서 임의의 적절한 함수 $F(x)$ 는 식(7a)와 같이 展開할 수 있으므로 $g(x, x'; \lambda)$ 는 다음과 같이 表示할 수 있다.

$$g(x, x'; \lambda) = \sum_m g_m(x'; \lambda) f_m(x), \quad x_1 < x < x_2 \quad (11a)$$

여기서 係數 g_m 은 (7b)로 부터

$$g_m(x'; \lambda) = \int_{x_1}^{x_2} w(\xi) f_m^*(\xi) d\xi$$

$$g(\xi, x'; \lambda) d\xi \quad (11b)$$

(11a) 및 (8b)를 (9)에 代入하고, 積分과 合算의 순수를 바꾸어, 상호 독립인 各 固有函數의 係數들을 간추리면,

$$g_m(x'; \lambda) = -\frac{f_m^*(x')}{\lambda - \lambda_m} \quad (12)$$

을 얻게된다. (12)를 (11a)에 代入하여 特性 Green 函數를 전개하면,

$$g(x, x'; \lambda) = -\sum_m \frac{f_m(x) f_m^*(x')}{\lambda - \lambda_m} \quad (13)$$

이 展開式으로 부터 알수있듯이 $g(x, x'; \lambda)$ 는 固有值인 $\lambda = \lambda_m$ 에서 無限大가 되며 $\lambda = \lambda_m$ 은 g 의 特異點이 된다.

(13)의 $g(x, x'; \lambda)$ 를 點電源에 의한 電壓이라 가정하면, 여러가지 物理的인 的의를 이해하는데 도움이 된다. 즉 이 電壓 g 는 媒介變數 λ 가 自由共振이 일어나는 값인 λ_m 이 아닐 때 有限이며 잘 定義된다. α_2 및 x_2 가 정해지면 自由共振은 $\lambda = \lambda_m$ 에서 일어나며, 이때 전압 g 는 無限大가 되어 定義되지 않는다. 따라서, 回路網 問題의 單一解를 보장하기 위하여, 조건 $\lambda \neq \lambda_m$ 이 필요하게 된다. 만약 媒介變數 λ 를 複素變數라 가정하면 $g(x, x'; \lambda)$ 는 複素數 平面 λ 에서 $\lambda = \lambda_m$ 점을 제외하고는 λ 의 regular function 이 된다. $\lambda = \lambda_m$ 에서 $g(x, x'; \lambda)$ 는 無限大가 되며 simple pole singularity 를 갖는다. 自由共振 條件인 $\lambda = \lambda_m$ 은 點電源을 제거했을 때도 계속 전압이 존재함을 意味하며, 函數의 表現으로 自由共振解는 homogeneous 한 (1)식을 만족시킨다. 결론적으로, (1)을 만족시키는 固有函數解의 여러 성질은, 근본적으로 特性 Green 函數 g 의 特異能에 관련된다. 모든 가능한 自由共振 즉 完全한 固有函數系를 결정하는 문제는 직접 $g(x, x'; \lambda)$ 의 모든 特異點을 複素 λ -平面에서 조사하는데 연관되어 있다. 有限斷面에서 自由共振은 不連續적인 값 λ_m 에서 일어나며, 이는 g 의 simple pole singularity 로서 特定된다. 그러나 領域이 無限이 되거나, p, q 혹은 w 가 特異點을 갖는다면, 이러한 不連續的인 自由共振은 連續 spectrum 으로 化하게 되며, 이 경우 $g(x, x'; \lambda)$ 는 branch point singularity 를 갖게 된다. 이때 g 가 單一值를 갖

도록 定義하기 위해서 複素 λ -平面에 branch cut 를 정의하게 된다.

만일 식(13)을 複素 λ -平面에서 g 의 모든 特異點을 포함하는 經路 C 를 통해 적분하면, Cauchy's 정리⁷⁾로부터 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{2\pi j} \oint_C g(x, x'; \lambda) d\lambda \\
 & = -\sum_m f_m(x) f_m^*(x') \left(-\frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{d\lambda}{\lambda - \lambda_m} \right) \\
 & = \sum_n f_n(x) f_n^*(x') \\
 & = \frac{\delta(x - x')}{\omega(x')} \quad (14)
 \end{aligned}$$

여기서 적분은 시계 반대 方向으로 행해졌다. 사실 $\lambda = \lambda_m$ 이라는 조건이 미분방정식 (9)의 單一解를 위하여 가정 되었지만, 그 解는 analytic continuation⁷⁾에 의하여 λ 가 λ_m 에 무한히 접근할 경우에도 유효하다. 또한 (14)식의 적분은 g 의 simple pole singularity 즉 固有函數의 不連續 spectrum의 경우를 간정 하였지만, 이 방법은 g 가 branch point singularity, 즉 連續 spectrum을 갖는 경우에도 적용할 수 있다. 뿐만 아니라, 이 방법은 損失이 있는 物質이나 境界條件(p, q, w 혹은 α_2 가 實數가 아닌 경우: Nonhermitian), 즉 固有值인 λ_m 이 複素值인 경우에도 적용 가능하다. 이 경우에 (8b)의 $f_m(x')$ 은 통상 f_m 의 adjoint로 代置된다.

결론적으로, 完全한 規格 直交函數系를 얻는 문제는, inhomogeneous 미분방정식 (9)의 解를 결정하고 이 特性 Green 함수의 모든 特異點을 포함하는 複素 λ -平面上的 積分經路를 통해 식 (14)에서와 같이 적분하는 문제로 환원된다.

4. 特性 Green 函數解⁵⁾

特性 Green 函數 $g(x, x'; \lambda)$ 는 $x \neq x'$ 때 homogeneous 미분방정식을 만족시킨다. \overleftarrow{g} 및 \overrightarrow{g} 를 식 (9)의 homogeneous 방정식을 만족시키고 식(10)의 境界條件中 \overleftarrow{g} 는 x_1 에서의 조건, \overrightarrow{g} 는 x_2 에서의 조건을 각각 만족시키는 解, 즉

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{d}{dx} p \frac{d}{dx} - q + \lambda \omega \right) \overleftarrow{g}(x) = 0, \\
 & \left(p \frac{d}{dx} + \alpha_1 \right) \overleftarrow{g} = 0 \text{ at } x = x_1 \quad (15a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left(\frac{d}{dx} p \frac{d}{dx} - q + \lambda \omega \right) \overrightarrow{g}(x) = 0, \\
 & \left(p \frac{d}{dx} + \alpha_2 \right) \overrightarrow{g} = 0 \text{ at } x = x_2 \quad (15b)
 \end{aligned}$$

이라 가정하면, 원하는 解인 g 는

$$g(x, x'; \lambda) = A \overleftarrow{g}(x <) \overrightarrow{g}(x >) \quad (16)$$

로서 구해진다. 이러한 g 는 $x \neq x'$ 에서 식(9)를 만족시키며, $x = x'$ 에서 요구되는 g 의 連續성을 常數 A 에 의하여 만족시키게 되므로 식(9)의 解가 된다. 여기서

$$\begin{aligned}
 x < & = \left\{ \begin{array}{l} x, \quad x < x' \\ x', \quad x' < x \end{array} \right\} \\
 x > & = \left\{ \begin{array}{l} x, \quad x > x' \\ x', \quad x' < x \end{array} \right\} \quad (17)
 \end{aligned}$$

常數 A 를 구하기 위하여 식(9)의 兩邊을 $x = x'$ 에서 적분하면, $g(x, x'; \lambda)$ 는 連續函數이므로 다음을 얻는다.

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left\{ p(x) \frac{dg}{dx} \Big|_{x' - \epsilon}^{x' + \epsilon} \right\} = -1$$

즉 (17)식의 관계를 이용하면,

$$\begin{aligned}
 & Ap(x') \left\{ \overleftarrow{g}(x') - \frac{d\overleftarrow{g}(x')}{dx'} - \overrightarrow{g}(x') - \frac{d\overrightarrow{g}(x')}{dx'} \right\} \\
 & = -1 \quad (18)
 \end{aligned}$$

을 얻게되며, 여기서 A 를 구하여 식(16)에 대입하면,

$$g(x, x'; \lambda) = \frac{\overleftarrow{g}(x <) \overrightarrow{g}(x >)}{-W(\overleftarrow{g}, \overrightarrow{g})} \quad (19)$$

을 얻는다. 여기서 W 는 Wronskian determinant로서

$$W(\overleftarrow{g}, \overrightarrow{g}) = p \left(\overleftarrow{g} \frac{d\overrightarrow{g}}{dx} - \overrightarrow{g} \frac{d\overleftarrow{g}}{dx} \right) \quad (20)$$

이는 x 값에 관계없이 항상 常數가 된다.

5. 特性 Green 函數 및 完全한 固有函數系

그림 1의 간단한 有限 또는 無限 斷面에 對해 完全한 固有函數系를 직접 구하고, 이를 特性 Green 函數로부터 구하는 方法과 비교 하겠다. 그림 1(a)는 一次元 有限斷面이며, (1b)는 半自由 空間, (1c)는 自由空間 문제이다. 그림 1(a) 문제에 알맞는 完全한 規格 直交 固有 函數系를 구한 후, 이 결과에서 a 를 無限大로 할 경우 半

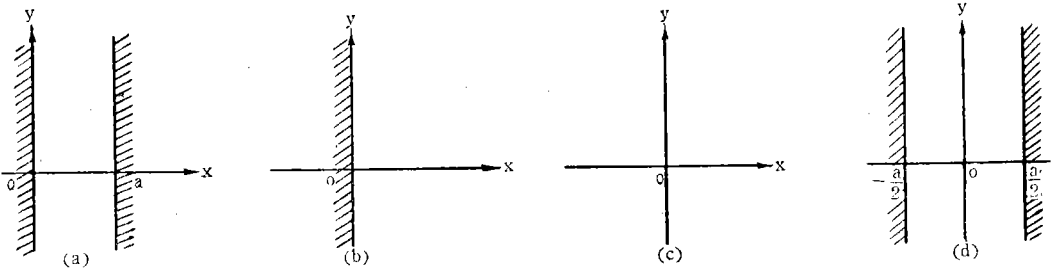


그림 1. 간단한 有限斷面 및 無限斷面の 例

自由空間(그림 1(b))에 관한 固有函數系를 얻는다. 반면에 自由空間에 關한 固有函數系를 얻기 위해서는, 그림 1(d)의 有限斷面에 대한 完全한 固有函數系를 구한후 a 를 無限大化 하여야 한다.

特性 Green 函數는 無限斷面에서도 有限斷面에서도 같이 직접 구할 수 있는데, 이는 無限點에서 境界條件이 radiation condition ($g=0$)으로 확정되기 때문이다. 그림 1의 (a), (b) 및 (c)에 대한 特性 Green 函數를 유도하고, 그 特異點을 조사한후 식(14)에 의해 完全한 規格直交 固有函數系를 유도 하여 직접 固有函數를 구한 결과와 비교하겠다.

(A) 固有函數 方法

그림 1(a) 문제는 식(1)에서 $p=w=1, q=0$ 일 때의 미분방정식

$$\left(\frac{d^2}{dx^2} + \lambda_m\right) f_m = 0, \quad 0 \leq x \leq a \quad (21)$$

을 만족하고, 境界條件은

$$f_m = 0, \quad x=0, \quad a \quad (22)$$

이 된다. 이를 만족하는 解는

$$f_m = A \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (23)$$

가 되며, 이때 固有值

$$\lambda_m = \frac{m\pi}{a}, \quad m=1, 2, \dots \quad (24)$$

이 된다. 規格化는 식(6b)에 의하여 결정되며, 이 조건으로부터 상수 A 는

$$A = \frac{1}{\sqrt{\int_0^a \sin^2\left(\frac{m\pi x}{a}\right) dx}} = \sqrt{\frac{2}{a}} \quad (25)$$

이 된다. 固有函數系의 完全성을 나타내는 delta

함수는 (8b)식으로 부터

$$\delta(x-x') = \frac{2}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{m\pi x'}{a}, \quad 0 < \frac{x}{x'} < a \quad (26)$$

이 된다. 그림 1(b)의 半自由空間에 對해서는 (26)으로 부터

$$\delta(x-x') = \lim_{a \rightarrow \infty} \left[\frac{2}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{m\pi x'}{a} \right] \quad (27)$$

이 될 것이다. 이점 spectrum component 와의 간격인 $\Delta\xi = \frac{(m+1)\pi}{a} - \frac{m\pi}{a} = \frac{\pi}{a}$ 는 a 가 無限大가 되므로써 無限小가 되고, 따라서 連續 spectrum 이 되며, summation 은 積分이 되어 (27) 식은 다음과 같이 쓸수 있다.

$$\delta(x-x') = \lim_{\Delta\xi \rightarrow 0} \left[\frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \sin \xi_m x \sin \xi_m x' \Delta\xi \right] = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin \xi x \cdot \sin \xi x' d\xi, \quad 0 < \frac{x}{x'} < \infty \quad (28)$$

으로 부터 規格化된 固有函數 f_m 은

$$f_m = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin \xi x, \quad 0 < x < \infty, \quad 0 < \xi < \infty \quad (29)$$

無限空間에서의 delta 函數를 구하기 위하여, 식(26)에서 x 를 $(x - \frac{a}{2})$ 로 x' 를 $(x' - \frac{a}{2})$ 로 바꾸어 놓으면,

$$\delta(x-x') = \frac{2}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \cos \frac{(2m-1)\pi x}{a}$$

$$\begin{aligned} & \cdot \cos \frac{(2m-1)\pi x'}{a} + \frac{2}{a} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{2m\pi x}{a} \\ & \cdot \sin \frac{2m\pi x'}{a} - \frac{a}{2} \left\langle \frac{x}{x'} \right\rangle \frac{a}{2} \quad (30) \end{aligned}$$

의 경우 固有函數系는 서로 直交하는 x 에 대한 우함수 및 기함수로서 다음과 같다.

$$f_m(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \begin{cases} \cos \frac{(2m-1)\pi x}{a} \\ \sin \frac{2m\pi x}{a} \end{cases}, \quad m=1, 2, 3, \dots, \quad -\frac{a}{2} < x < \frac{a}{2} \quad (31)$$

(28)식에서와 같은 방법으로 $a \rightarrow \infty$ 의 경우 (30)식은 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \delta(x-x') &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \xi x \cos \xi x' d\xi \\ &+ \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \sin \xi x \cdot \sin \xi x' d\xi \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \xi(x-x') d\xi, \\ &-\infty < \frac{x}{x'} < \infty \quad (32) \end{aligned}$$

더욱 잘 알려진 δ 함수의 展開로는 (32)식의 \cos 함수를 exponential 함수로 표시한 경우로서 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \delta(x-x') &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{j\xi(x-x')} d\xi \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-j\xi(x-x')} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\xi(x-x')} d\xi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{j\xi(x'-x)} d\xi \quad (33) \end{aligned}$$

이는 곧 delta 函數를 Fourier integral representation⁸⁾으로 表示한 경우이며, 이 경우의 固有函數는

$$f_m(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-j\xi x}, \quad -\infty < x < \infty, \quad -\infty < \xi < \infty \quad (34)$$

가 된다.

(B) 特性 Green 函數 方法

4절에서 설명한 方法을 적용하여 特性 Green 函數를 그림 1(a), (b) 및 (c)의 경우에 대하여 구하려 한다. $x=0$ 및 $x=a$ 에서 境界條件 $\vec{g}(0)$

$= \vec{g}(a) = 0$ 을 만족하는 \vec{g} 및 \vec{g} 는 식(21) 및 (23)으로 부터

$$\vec{g} = \sin \sqrt{\lambda} x \quad (35a)$$

$$\vec{g} = \sin \sqrt{\lambda} (a-x) \quad (35b)$$

이 된다. 식(20)에 표시된 Wronskian 은

$$\begin{aligned} W(\vec{g}, \vec{g}) &= -\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} x \cdot \cos \sqrt{\lambda} (a-x) \\ &\quad - \sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} (a-x) \cos \sqrt{\lambda} x \\ &= -\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} a \quad (36) \end{aligned}$$

로 계산되며 x 에 對해 독립이다. 구하는 特性 Green 函數 g 는 식(35), (36)을 식(19)에 대입하여 얻는다.

$$g(x, x'; \lambda) = \frac{\sin \sqrt{\lambda} x \cdot \sin \sqrt{\lambda} (a-x)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} a} \quad (37)$$

특성 Green 함수의 特異點은 식(37)에서 보듯이 pole singularity가 $\sin \sqrt{\lambda} a | \lambda_m = 0$ 을 만족시키는 $\lambda = \lambda_m$ 에 존재한다. 즉

$$\begin{aligned} \sqrt{\lambda_m} a &= (m\pi) \quad \text{또는} \\ \lambda_m &= \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2, \quad m=1, 2, \dots \quad (38) \end{aligned}$$

(37)식의 g 는 $\sqrt{\lambda}$ 의 우함수로서, $\lambda=0$ 은 Branch point singularity⁷⁾가 아니다. 식(14)로 부터 delta 함수는

$$\begin{aligned} \delta(x-x') &= -\frac{1}{2\pi j} \oint_c \frac{\sin \sqrt{\lambda} x \cdot \sin \sqrt{\lambda} (a-x)}{\sqrt{\lambda} \sin \sqrt{\lambda} a} d\lambda \quad (39) \end{aligned}$$

로 표시된다. 여기서 $\sin \sqrt{\lambda} a$ 를 $\lambda = \lambda_m$ 부근에서 전개하면

$$\begin{aligned} \sin \sqrt{\lambda} a &= \sin \sqrt{\lambda_m} a + (\lambda - \lambda_m) \cos \sqrt{\lambda_m} a \\ &+ a \cdot \frac{a}{2\sqrt{\lambda_m}} + \dots \quad (40) \end{aligned}$$

이 되는데, $\sin \sqrt{\lambda_m} a = 0$ 이므로 식(39)는 다음과 같이 된다.

$$\begin{aligned} \delta(x-x') &= \frac{2}{a} \left(-\frac{1}{2\pi j} \right) \sum_{m=1}^{\infty} \oint_{c_m} \frac{\sqrt{\lambda_m} \sin \sqrt{\lambda} x a \sin \sqrt{\lambda} (a-x)}{\sqrt{\lambda} \cos \sqrt{\lambda_m} a (\lambda - \lambda_m)} d\lambda \quad (41) \end{aligned}$$

여기서 積分 經路 c 및 c_m 은 그림 2(a)에 표시되어 있다. Cauchy 정리에 의하여 적분을 전개

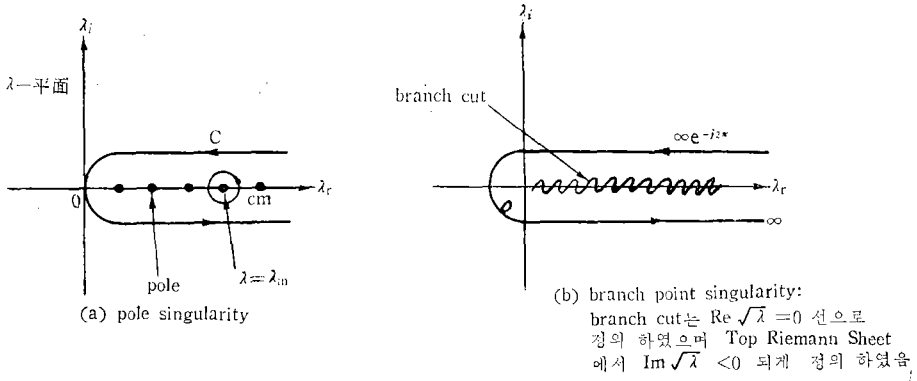


그림 2. 複素 λ-平面에서 g의 特異點 및 積分 經路

하면 (41)식은

$$\begin{aligned} \delta(x-x') &= -\frac{2}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin\sqrt{\lambda_m} x \cdot \sin\sqrt{\lambda_m} (a-x)}{\cos\sqrt{\lambda_m} a} \\ &= \frac{2}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \sin\sqrt{\lambda_m} x \cdot \sin\sqrt{\lambda_m} x \\ &= \frac{2}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \sin\sqrt{\lambda_m} x \sin\sqrt{\lambda_m} x' \end{aligned} \quad (42)$$

가 되며, (26)의 결과와 동일하다.

그림 1(b)의 문제도 그림 1(a) 문제와 같은 미분방정식이 적용되나, $g(a)=0$ 의 境界條件 대신 radiation condition 인 $g(\infty)=0$ 이 주어진다. 만일 複素媒介變數 λ 의 허수부분이

$$I_m \sqrt{\lambda} < 0 \quad (43)$$

이 된다고 가정 할때, $\vec{g}(\infty)=0$ 을 만족시키는 解는

$$\vec{g} = e^{-j\sqrt{\lambda}x} \quad (44)$$

가 된다. \overleftarrow{g} 는 그림 1(a)의 경우에서와 마찬가지로

$$\overleftarrow{g} = \sin\sqrt{\lambda}x \quad (44b)$$

가 되며, Wronskian 은

$$\begin{aligned} W &= -j\sqrt{\lambda} \epsilon^{-j\sqrt{\lambda}x} \sin\sqrt{\lambda}x \\ &= -\sqrt{\lambda} \cos\sqrt{\lambda}x \epsilon^{-j\sqrt{\lambda}x} = -\sqrt{\lambda} \end{aligned} \quad (45)$$

이 되어 g 는 다음과 같이 된다.

$$g(x, x'; \lambda) = \frac{\sin\sqrt{\lambda}x \cdot \epsilon^{-j\sqrt{\lambda}x'}}{\sqrt{\lambda}} \quad (46)$$

(46)식의 $g(x, x'; \lambda)$ 는 $\lambda=0$ 에서 branch point singularity를 가진다. Top Riemann Sheet⁷⁾ 위에서 (43)식의 조건을 만족시키기 위해 branch Cut⁷⁾를 그림 2(b)에서와 같이 정의할때, g 는 單價函數로 정의된다. 이 경우 delta 函數는 식 (46)을 식(14)에 대입하여 얻는다.

$$\begin{aligned} \delta(x-x') &= -\frac{1}{2\pi j} \oint_C \frac{\sin\sqrt{\lambda}x \cdot \epsilon^{-j\sqrt{\lambda}x'}}{\sqrt{\lambda}} d\lambda \\ &= -\frac{1}{2\pi j} \int_{\epsilon-2j\pi}^0 \frac{\sin\sqrt{\lambda}x \cdot \epsilon^{-j\sqrt{\lambda}x'}}{\sqrt{\lambda}} d\lambda \\ &\quad - \frac{1}{2\pi j} \int_0^{\epsilon j\pi} \frac{\sin\sqrt{\lambda}x \cdot \epsilon^{-j\sqrt{\lambda}x'}}{\sqrt{\lambda}} d\lambda \end{aligned}$$

여기서 첫 항에 적분변수 $\hat{\lambda} = \lambda \epsilon^{j2\pi}$ 를 사용한 후 두째 항을 합하면

$$\begin{aligned} \delta(x-x') &= -\frac{1}{2\pi j} \int_0^{\infty} \frac{\sin\sqrt{\hat{\lambda}}x \cdot \epsilon^{-j\sqrt{\hat{\lambda}}x'}}{\sqrt{\hat{\lambda}}} [\epsilon^{-j\sqrt{\hat{\lambda}}x} \\ &\quad - \epsilon^{j\sqrt{\hat{\lambda}}x'}] d\lambda \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin\sqrt{\lambda}x \cdot \sin\sqrt{\lambda}x'}{\sqrt{\lambda}} d\lambda \end{aligned} \quad (47)$$

여기서 적분변수 $\lambda = \xi^2$ 이라 할때,

$d\lambda = 2\xi d\xi = 2\sqrt{\lambda} d\xi$ 가 되어 식(47)은 (28)식의 결과가 된다.

그림 1(c)에 보인 自由空間의 경우에는 特性 Green 函數 方法이 더욱 간단함을 보일수가 있다.

식(43)의 조건을 가정할때 $x = -\infty$ 및 $x = \infty$ 에서 각각 radiation condition 을 만족시키는 \vec{g} 및 \overleftarrow{g} 는

$$\overleftarrow{g} = e^{j\sqrt{\lambda}x} \quad (48a)$$

$$\vec{g} = e^{-j\sqrt{\lambda}x} \quad (48b)$$

가 되며, $W = -2j\sqrt{\lambda}$ 가 되므로 特性 Green 函數 g 는

$$g = \frac{e^{j\sqrt{\lambda}x} e^{-j\sqrt{\lambda}x'}}{2j\sqrt{\lambda}} \quad (49)$$

여기서 (47)식을 유도할 경우 사용한 적분변수 변환 및 $\gamma = \xi^2$ 의 변환을 이용하면, delta 函數는 쉽게 다음과 같이 유도할 수 있다.

$$\delta(x-x') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\xi(x-x')} d\xi, \quad \begin{matrix} -\infty < x < \infty \\ -\infty < x' < \infty \end{matrix} \quad (50)$$

6. 電磁界의 導波 mode 에 의한 展開

그림 3에 보인바와 같이 線電源이 도파관내의 점 (x', y') 에 놓여 있을때, 도파관內 임의의 점에서 전자계는 Scalar Green 函數 $G(x, z; x', z')$ 로 부터 구할 수 있다. 이때 $G(x, z; x', z')$ 는

$$(\nabla^2 + k^2)G(x, z; x', z') = -\delta(x-x')\delta(z-z') \quad (51)$$

導波管벽에서의 境界條件 및 $z = \pm\infty$ 의 radiation condition 을 만족시킨다. $z = \text{常數}$ 인 平面을 導波管 斷面으로 생각할 때 完全한 mode 函數系는 식(26) 또는 (42)에서

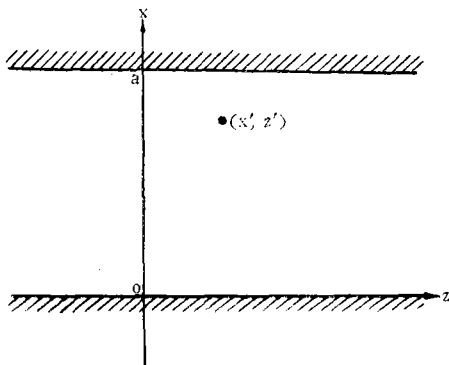


그림 3. 平行板導波管의 線電源

$$\delta(x-x') = \frac{2}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{m\pi x'}{a} = -\frac{1}{2\pi j} \oint_C g_x(x, x'; \lambda) d\lambda \quad (52)$$

로 주어진다. 여기서 $g_x(x, x'; \lambda)$ 는 식(37)에 積分經路 C 는 그림 (2b)에 각각 주어져 있다. Scalar Green 函數 G 를 x 방향 mode 의 重疊으로 展開할 때, mode 振幅係數는 z 및 z' 의 함수이며, 이때 G 는 다음과 같이 展開된다.

$$G(x, z; x', z') = \sum_m g_z(z, z'; \hat{\lambda}_m) \frac{2}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{m\pi x'}{a} \quad (53)$$

식(53)을 (51)에 대입하여, 左右항의 각 mode 振幅係數를 같이 놓으면

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + \hat{\lambda}_m \right) g_z(z, z'; \hat{\lambda}_m) = -\delta(z-z') \quad (54)$$

을 얻는다. 여기서 g_z 는 $z = \pm\infty$ 에서 radiation condition 을 만족시켜야 한다. 이러한 성질을 갖는 g 는 식(49)와 같다. 이때 G 는 (51)식을 만족시킴으로, g_z 의 媒介變數 $\hat{\lambda}_m$ 는

$$\hat{\lambda}_m = k^2 - \left(\frac{m\pi}{a} \right)^2 \quad (55)$$

즉 Scalar Green 函數 G 는 z 方向을 進行方向으로 생각할때

$$G(x, z; x', z') = \frac{1}{ja} \sum_{m=1}^{\infty} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{m\pi x'}{a} \frac{e^{-j\sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2} |z-z'|}}{\sqrt{k^2 - \left(\frac{m\pi}{a}\right)^2}} \quad (56)$$

이 되며, 이를 “ z 方向으로 導波된 展開”라 부른다.

傳播方向을 z 方向으로 택하는 대신 x 方向으로 택할 수도 있으며, 이때의 G 는 식(26) 및 (50)에서

$$G(x, z; x', z') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\xi(z-z')} \frac{\sin(\sqrt{k^2 - \xi^2} x) \sin(\sqrt{k^2 - \xi^2} [a-x'])}{\sqrt{k^2 - \xi^2} \sin(\sqrt{k^2 - \xi^2} a)} d\xi \quad (57)$$

이 되며, 이를 “ x 方向으로 導波된 展開”라 부른다. 일반적으로 그 表現方法은 다르지만, z 方向

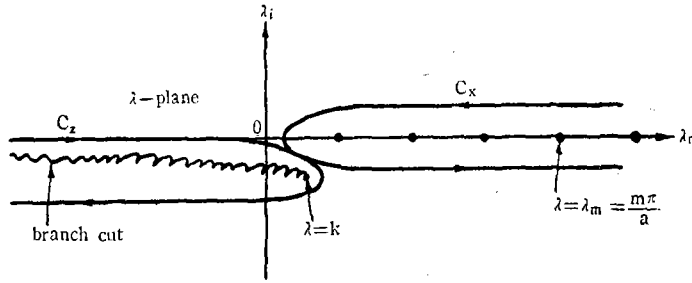


그림 4. G의 積分經路 Cx 및 Cz

으로 導波된 展開는 x 方向으로 導波된 展開와 同一하다. 同一한 結果를 식(56)에서는 無限級數 合으로, 식(57)에서는 積分으로 表示하였으며, 주어진 電磁界 問題에서 收斂速度가 빠른 展開를 이용할 것이다. 導波管 內에 몇개 안되는 mode 가 존재하는 경우 (56)식이 편리한 식이될 것이나, 무수히 많은 mode 가 존재하는 경우 (56)식보다는 (57)식의 積分이 淸급하기가 용이할 것이다.

가장 일반적인 展開方法은 特性 Green 函數와 mode 函數系의 關係를 利用하여 表示할 수 있다. 즉 위의 경우 (56)식의 mode 함수 대신 特性 Green 函數 $g_z(x, x'; \lambda)$ 를 사용하면,

$$G(x, z; x', z') = -\frac{1}{2\pi j} \int_{C_z} g_z(x, x'; \lambda) g_z(z, z'; \sqrt{k^2 - \lambda^2}) d\lambda \quad (58)$$

이 되며 이때 積分經路 C_z 는 $g_z(x, x'; \lambda)$ 의 모든 特異點을 포함하나, g_z 의 特異點은 하나도 포함하지 않는다. 그림 2(b)에 표시된 g_z 의 branch point $\hat{\lambda}=0$ 및 branch cut는, λ -平面에서 그림 4에서와 같이 變換된다. Top Riemann Sheet에서 $I_m \sqrt{\lambda} = I_m \sqrt{k^2 - \lambda^2} < 0$ 으로 정의되므로 Top Sheet의 $|\lambda| = \infty$ 에서 g_z 및 g_z 는 0이 되고, 積分路 C_x 를 g_z 의 特異點인 branch cut를 포함하는 積分路 C_z 로 deform 할 수 있다. 이렇게 되면 Scalar Green 函數 G는 導波方向에 關係없이

(58)식과 같이 表示할 수 있으며, 複素 λ -平面에서 積分路의 deform으로 다른 展開를 쉽게 얻을 수 있다. 3次元 問題에도 똑 같은 方法을 적용할 수 있는 것이다.

參 考 文 獻

- 1) 羅正雄: "電磁界의 Mode 解析 및 合成", 電子工學會誌, 第8卷 第6號, pp. 312-320 (1971年 12月).
- 2) N. Marcuvitz: Waveguide Handbook, MIT Radiation Lab. Series, vol. 10, Dover, New York 1965.
- 3) A. Sommerfeld, Partial Differential Equations in physics, vol. 6, Academic Press, New York 1964, pp. 189.
- 4) M. J. Lighthill, Introduction to Fourier Analysis and Generalized Functions, Cambridge Univ. Press 1958.
- 5) L. B. Felsen and N. Marcuvitz, Model Analysis and Synthesis of Electromagnetic Fields, Polytechnic Institute of Brooklyn, R-726-59, PIB-654, p. 40.
- 6) F. B. Hildebrand, Methods of Applied Mathematics, Prentice-Hall, 1952.
- 7) E. Hille, Analytic Function Theory, Blaisdell Pub. Co., Now York 1959.
- 8) A. Papoulis, The Fourier Integral and Its Applications, McGraw-Hill, New York 1962.