非對稱卷線軸單相電動機의 等價回路에 관해서

논 문
21～1～1

An Equivalent Circuit for a Single-Phase Motor with Non-Quadrature Stator Windings

박 민 호*
(Min Ho Park)

Abstract

General steady state equivalent circuits are derived for the family of single phase motor having two windings with non-quadrature. First, the fundamental voltage equations of motor are derived by Faraday-Krichhoff's low in the fiew of the flux distribution in the modified motor with Kron primitive machine. Those equations are arranged in to f-b equations by transformation matrix.

To using the above equations for circuit; 1) The concept of current-source was much help to solve the relations between matrix impedance equation and circuit analysis. 2) The simplification of the circuit to the mutual impedance matrix elements is easy to considerations of motor characteristics in the case of inserted external auxiliary winding impedance. Finally, this equivalent circuit showing as a single phase induction motor with quadrature winding is described by each conditions.

1. 緖 言

非對稱軸單相誘導電動機의 運轉特性 및 起動特性을 검토하기 앞서 基本式의 유도와 等價回路작성이 필요하다. 물론 非對稱卷線軸으로 사용되어오던 shaded電動機의 等價回路가 Kron 씨에 의해 해석되었고[1] 또 Buchanan 씨는 回轉磁界에 의한 각 卷線에 誘起되는 電壓式에서 等價回路를 유도하였다.[2]

筆者는 非對稱卷線軸 2相誘導電動機에 대해 Krichhoff 法則에 따라 d-q 磁束分布에서 平衡運轉條件, 最適條件을 알기위해 卷線比, 非對稱角을 포함한 정밀한 電壓式으로부터 f-b 變換으로 誘導한 等價回路를 作成하였다.

이 回路에 각각의 電動機의 조건을 적용시키면서 종래의 캐패시터電動機, 2相電動機, 純單相電動機의 等價回路와 비교한 결과 일치하므로, 이 작성방법이 타당하다는 것을 알고 아래와 같이 기술한다.

2. 一般等價回路

그림 1에 표시한 바와 같이 籠型回轉子와 直軸 da 상에 主卷線M, 直軸에서 α角度만큼 떨어진 위치에 補助卷線 A를 가지고 있는 固定子로 구성된 非對稱卷線軸單相電動機가 $\omega=\omega_0(1-s)$의 角速度로 회전하는 경우를 생각한다.

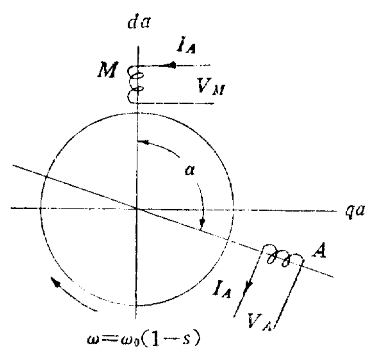

그림 1. 非對稱卷線軸 單相電動機의 配置
Fig 1. Schamatic arrangement of single phase motor with non-quadrature windings.

이 電動機는 等價 Kron primitive 機械로 표시하면 그

* 정회원 : 서울대학교 공과대학 교수(공학박사)

림 2가 되고, 각 固定子卷線은 漏洩磁束 ϕ_{1M}, ϕ_{1A}, 回轉子를 鎖交하는 ϕ_{gd}, ϕ_{gq}, 그리고 回轉子를 통과하지 않은 卷線相互磁束 ϕ_{Ml}, ϕ_{Al} 등이 있다. 回轉子의 漏洩磁

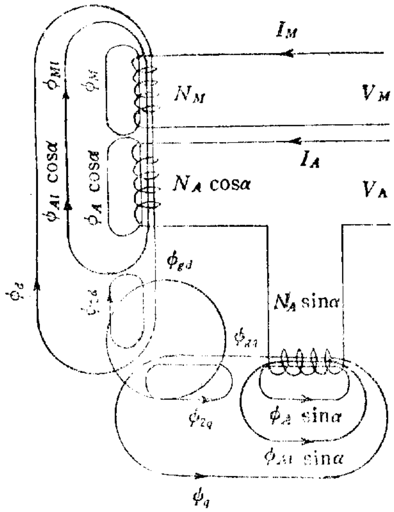

그림 2. 非對稱卷線軸電動機의 磁束分布
Fig 2. Fluxes of modified non-quadrature motor.

束은 ϕ_{2d}, ϕ_{2q}가 된다. 여기서 ϕ_M, ϕ_A, ϕ_{1M}, ϕ_{1A}, ϕ_{Ml}, ϕ_{Al} 그리고 ϕ_q는 두 卷線軸간의 角度 α가 영일때의 磁束이고, α값에 따라 위의 값의 $\cos\alpha$배가 된다. 磁束의 卷線에 대한 관계[3] 또 卷線과 回路와의 관계를 Faraday-Krichhoff 法則에서 표 1과 각 相에 대한 4개의 電壓方程式이 얻어진다.

표 1. Faraday 法則에서의 $\phi-\omega_0 L$의 관계

卷　　線	磁　　束	리 액 턴 스
主 卷 線 M	ϕ_{1M}	$\omega_o L_{1M}=X_{1M}$
	ϕ_{Ml}	$\omega_o L_{Ml}=X_{Ml}$
補 助 卷 線 A	ϕ_{1A}	$\omega_o L_{1A}=X_{1A}$
	ϕ_{Al}	$\omega_o L_{Al}=X_{Al}$
回 轉 子 R	ϕ_{2q}	$\omega_o L_{2q}=X_{2q}$
	ϕ_{2d}	$\omega_o L_{2d}=X_{2d}$
卷 線 M−A−R	ϕ_d	$\omega_o L_q=X_q$
	ϕ_q	$\omega_o L_d=X_d$

$$\begin{pmatrix} V_M \\ V_A \\ V_{2d} \\ V_{2q} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_{1M}+jX_{1M}+j\left(X_{Ml}+\frac{X_d}{b^2}\right) & ja\left(X_{Ml}+\frac{X_d}{b^2}\right)\cos\alpha & j\frac{X_d}{b} & 0 \\ ja\left(X_{Ml}+\frac{X_d}{b^2}\right)\cos\alpha & R_{1A}+jX_{1A}+j\left(X_{Al}+\frac{a^2X_d}{b^2}\cos^2\alpha+\frac{a^2X_q}{b^2}\sin^2\alpha\right) & j\frac{aX_d}{b}\cos\alpha & j\frac{aX_q}{b}\sin\alpha \\ j\frac{X_d}{b} & j\frac{aX_d}{b}\cos\alpha+(1-s)\frac{aX_q}{b}\sin\alpha & (R_{2d}+jX_{2d})+jX_d & (1-s)(X_{2q}+X_q) \\ -(1-s)\frac{X_d}{b} & j\frac{aX_q}{b}\sin\alpha-(1-s)\frac{aX_d}{b}\cos\alpha & -(1-s)(X_{2d}+X_d) & (R_{2q}+jX_{2q})+jX_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_M \\ I_A \\ I_{2d} \\ I_{2q} \end{pmatrix} \quad (1)$$

이러한 基本式은 變換 matrix를 적용시키면 定常狀態에 대한 d-q理論과, f-b 즉 正相方向과 逆相方向의 電壓, 電流로 變換된다.(부록 2) 이 方程式에 의한 等價回路를 유도하면 그림 3과 같다.

(1) 固定子卷線回路에 대한 考察

지금 식(14)에서 回轉子 matrix는 相互結合要素 즉 $j\{(X_{2d}-X_{2q})+(X_d-X_q)\}/b^2$은 대칭동일 값이므로 passive 要素만으로 相互結合되어 있다고 보아지나, 固定子 matrix에서는 相互結合은 같지를 않다. 즉 식(14)의 固定子側임피이던스 matrix를 표시하면

$$Z_{stator}=\begin{pmatrix} Z_1 & Z_2 \\ Z_3 & Z_4 \end{pmatrix} \quad (2)$$

이고, 여기서 $Z_1=Z_4$이나 $Z_2 \neq Z_3$이므로 $Z_2 \sim Z_3$의 차 $\pm 4j(R_{1M}+jX_{1M})\cot\alpha$가 active 要素로 나타난다. 즉 結合 matrix형식이면서 結合要素의 작용을 하지않은 부분이 생긴다.

본 논문에서는 이를 電流源(current source)의 개념을 도입하여 $4j(R_{1M}+jX_{1M})\cot\alpha$를 처리하였다. 또 $V_{1f}-I_{1b}$, $V_{1b}-I_{1f}$ 結合 matrix의 어느것을 기준으로 두느냐에 따라서 等價回路가 달라질 것이다. 그리고 개퍼시터 電動機와 같이 補助卷線에 外部캐패시턴스를 사입하는 경우, 等價回路에서 補助卷線임피이던스는 단일항으로 나타내는 것이 편리하므로 補助卷線의 R_{1A}, X_{1A}, X_{Al}는 集中單一項이 되도록 정리한다.

$V_{1b}-I_{1f}$간의 相互 matrix要素 Z_3는

$$Z_3=(R_{1M}+jX_{1M})(1+j\cot\alpha)^2+j\frac{X_{Ml}}{\sin^2\alpha}-\frac{R_{1A}+j(X_{1A}+X_{Al})}{a^2\sin^2\alpha}+j\frac{X_d-X_q}{b^2} \quad (3)$$

$V_{1f}-I_{1b}$간의 結合 matrix 要素 Z_2는

$$Z_2=Z_3-4j(R_{1M}+jX_{1M})\cot\alpha \tag{4}$$

$V_{1f}-I_{1f}$간 즉 正相임피이던스 matrix 要素 Z_1는

$$\begin{aligned} Z_1= & -(R_{1M}+jX_{1M})\ (1+j\cot\alpha)^2-j\frac{X_{Ml}}{\sin^2\alpha} \\ & +\frac{R_{1A}+(X_{1A}+X_{Al})}{a^2\sin^2\alpha}+j\frac{X_d+X_q}{b^2} \\ & +\frac{R_{1M}+jX_{1M}}{\sin^2\alpha}+(R_{1M}+jX_{1M})\ (1+j\cot\alpha)^2 \\ & +j\frac{X_{Ml}}{\sin^2\alpha}-j\frac{X_{Al}}{a^2\sin^2\alpha}+2jX_{Ml} \\ = & 2\{R_{1M}+j(X_{1M}+X_{Ml})\}+2j(R_{1M}+jX_{1M})\cot\alpha \\ & -(R_{1M}+jX_{1M})(1+j\cot\alpha)^2-j\frac{X_{Ml}}{\sin^2\alpha} \\ & +\frac{R_{1A}+j(X_{1A}+X_{Al})}{a^2\sin^2\alpha}+j\frac{X_d+X_q}{b^2} \end{aligned} \tag{5}$$

$V_{1b}-I_{1b}$간 즉 逆相임피이던스 matrix 要素 Z_4는 Z_1과 같은 수법으로 풀이하면

$$\begin{aligned} Z_4= & 2\{R_{1M}+j(X_{1M}+X_{Ml})\}+2j(R_{1M}+jX_{1M})\cot\alpha \\ & -4j(R_{1M}+jX_{1M})\cot\alpha-(R_{1M}+jX_{1M})(1+j\cot\alpha)^3 \\ & -j\frac{X_{Ml}}{\sin^2\alpha}+\frac{R_{1A}+j(X_{1A}+X_{Al})}{a^2\sin^2\alpha}+j\frac{X_d+X_q}{b^2} \\ & +4j(R_{1M}+jX_{1M})\cos\alpha \end{aligned} \tag{6}$$

이상으로 等價回路를 표시하기 위한 maxrix를 정리하면 식(2)는 다음과 같다.

$$Z_{stator}=\begin{pmatrix} \begin{pmatrix} R_{1M}+j(X_{1M}+X_{1Ml}) \\ +j(R_{1M}+jX_{1M})\cot\alpha+\frac{-Z_{Mm}+Z_{Am}}{2} \\ +j\frac{X_d+X_q}{2b^2} \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} \frac{Z_{Mm}-Z_{Am}}{2}-2j(R_{1M}+jX_{1M})\cot\alpha \\ +j\frac{X_d-X_q}{2b^2} \end{pmatrix} \\ \left(\frac{Z_{Mm}-Z_{Am}}{2}+j\frac{X_d-X_q}{2b^2}\right) & \begin{pmatrix} R_{1M}+j(X_{1M}+X_{Ml}) \\ -j(R_{1M}+jX_{1M})\cot\alpha+\frac{-Z_{Mm}+Z_{Am}}{2} \\ +j\frac{X_d+X_q}{2b^2} \\ +2j(R_{1M}+jX_{1M})\cot\alpha \end{pmatrix} \end{pmatrix} \tag{7}$$

여기서

$$\left.\begin{aligned} Z_{Mm} &=(R_{1M}+jX_{1M})(1+j\cot\alpha)^2+j\frac{X_{Ml}}{\sin^2\alpha} \\ Z_{Am} &=\frac{R_{1A}+j(X_{1A}+X_{Al})}{a^2\sin^2\alpha} \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

이라고 하면 Z_{Mm}, Z_{Am}는 相互結合要素를 표시한다. 따라서 그림 3에 있어 b−c 간에는 $Z_{Am}-Z_{Mm}$의 값이 존

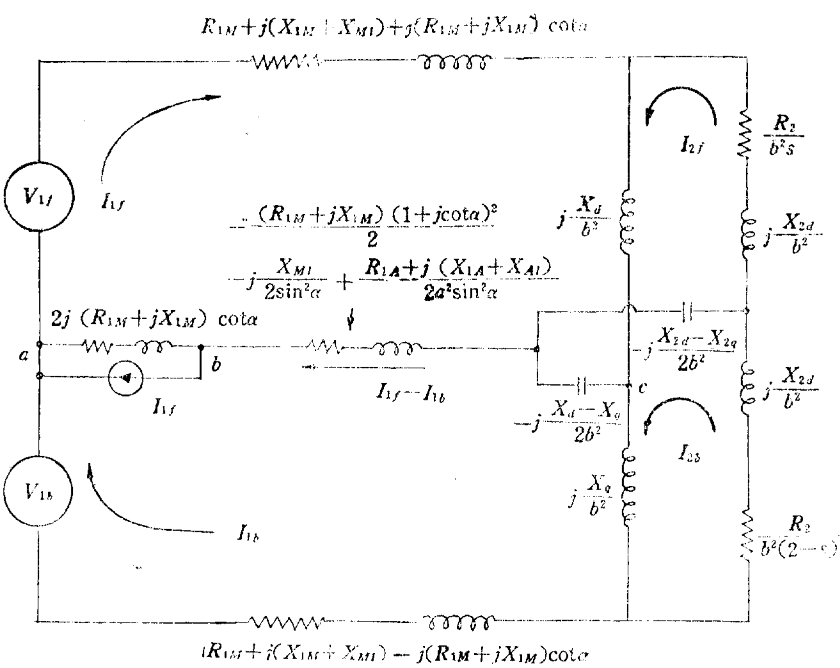

그림 3. 非對稱卷線軸을 갖인 單相電動機에 대한 一般等價回路

Fig 3. General equivalent circuit for single phase motor with non-quadrature stator windings

제해야 하고, 正相, 逆相임피이던스 Z_{1d}, Z_{1q}는

$$\left.\begin{aligned}Z_{1d}&=R_{1M}+j(X_{1M}+X_{Ml})+j(R_{1M}+jX_{1M})\cot\alpha\\Z_{1q}&=R_{1M}+j(X_{1M}+X_{Ml})-j(R_{1M}+jX_{1M})\cot\alpha\end{aligned}\right\}\quad(9)$$

이 되고 그림 3에 표시한바와 같다. 그리고 正相, 逆相 印加電壓 V_{1f}, V_{1b}는

$$\begin{pmatrix}V_{1d}\\V_{1q}\end{pmatrix}=[C]_t\begin{pmatrix}V_A\\V_M\end{pmatrix}$$

이므로

$$\left.\begin{aligned}V_{1f}&=\frac{1}{\sqrt{2}}(V_{1d}-jV_{1q})\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(V_M-j\,\frac{-aV_M\cos\alpha+V_A}{a\,\sin\alpha}\right)\\V_{1b}&=\frac{1}{\sqrt{2}}(V_{1d}+jV_{1q})\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(V_M+j\,\frac{-aV_M\cos\alpha+V_A}{a\,\sin\alpha}\right)\end{aligned}\right\}\quad(10)$$

으로 표시된다.

(2) 非對稱卷線軸캐패시터電動機

이 電動機는 空隙이 균일한 誘導電動機이므로

$X_d=X_q=X_m$, $X_{2d}=X_{2q}=X_2$

$R_{2d}=R_{2q}=R_2$, $V_{2f}=V_{2b}=0$

이고, $X_{2d}-X_{2q}=0$, $X_d-X_q=0$이되고 또 콘덴서임피이던스 $Z_c=R_c+jX_c$는 補助卷線의 等價 임피이던스로 $-(R_c+jX_c)/(2a^2\sin^2\alpha)$의 값으로 삽입되므로 그림 4는 이때의 等價回路가 된다.

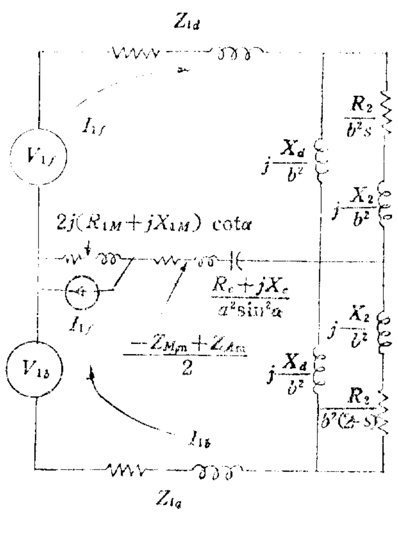

그림 4. 非對稱卷線軸캐패시터電動機

Fig 4. Equivalent circuit of capacitor motor with non-quadrature windings.

3. 等價回路의 適用

본 等價回路의 타당성을 증명하기 위해 종래 電動機의 조건을 이 回路에 적용하여 이미 發表된 電動機의 等價回路와 비교한다.

(1) 캐패시터電動機

$X_d=X_q=X_m$, $X_{2d}=X_{2q}=X_2$, $\alpha=\pi/2$이므로 식(8)에서 $Z_{Mm}=(R_{1M}+jX_{1M})+jX_{Ml}$, $Z_{Am}=\{R_{1A}+j(X_{1A}+X_{Al})+Z_c\}/a^2$이고

$$Z_{Am}-Z_{Mm}=-(R_{1M}+jX_{1M})+\frac{R_{1A}+jX_{1A}+Z_C}{a^2}$$

$$jX_{Ml}=jX_{Al}/a^2,\quad j(R_{1M}+jX_{1M})\cot\alpha=0$$

또 식(10)에서

$$V_{1f}=\frac{1}{\sqrt{2}}(V_M-jV_A),\quad V_{1b}=\frac{1}{\sqrt{2}}(V_M+jV_A)$$

이고, 그림 3의 等價回路의 固定子측은 그림 5와 같고, 이것은 종전의 캐패시터電動機의 等價回路와 같다[1].

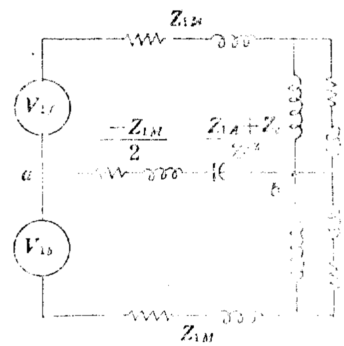

그림 5. 캐패시터電動機의 等價回路

Fig 5. Capacitor motor equivalent circuit for $\alpha=\pi/2$

(2) 平衡 2 相電動機

平衡卷線이므로 $a=1$이고 $\alpha=\pi/2$, 또 $R_{1M}=R_{1A}$, X_{1M}

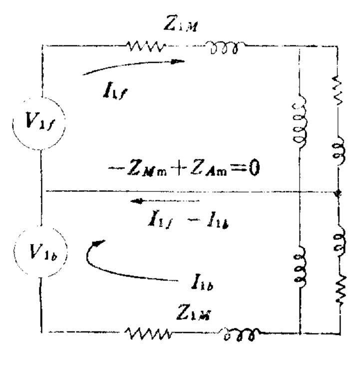

그림 6. 平衡 2 相誘導電動機

Fig. 6. Two phase induction motor

$+X_{Ml} - X_{1A} + X_{Al}$이므로 그림 4의 $a-b$ 간의 임피이던스는 영이다.(그림 6)

(3) 純單相電動機

單相誘導電動機에서는 $V_A = 0$, $a = 0$이므로 식(10)에서

$$V_{1b} = V_{1f} = \sqrt{2}\,V_M$$

$$I_{1f} = I_{1b} = I_A/2$$

이면 그림 3의 $b-c$ 간의 電流 $I_{1f} - I_{1b} = 0$이므로 그림 7과 같다.

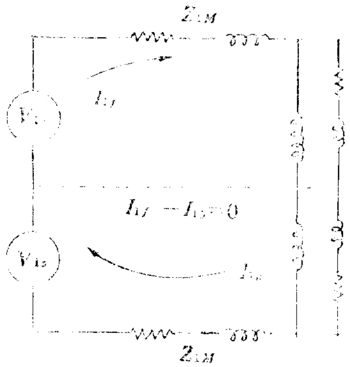

그림 7. 純單相誘導電動機
Fig 7. Single phase induction motor without auxiliary winding.

4. 結　　論

固定子 2卷線의 非對稱軸電動機에 대한 일반적 等價回路를 유도하였다.

(1) $f-b$ 變換式의 等價回路의 作成에서 電流源개념을 사용하므로서 回路를 합리화시켰다.

(2) 2卷線相互임피이던스의 選定을 (1)의 조건을 도입하였기 때문에 임의로 할 수 있다. 여기서는 非對稱卷線電動機의 대부분이 캐페시터電動機고 補助卷線에 외부임피이던스가 삽입되므로 mutual 要素(그림 3의 $b-c$ 간)인 補助卷線의 임피이던스를 단일항으로 포함시켰다.

(3) 非對稱電動機의 平衡條件, 最適條件을 구하는 回路에 중점을 두었다

이상의 점들을 중점으로 하여 풀이한 이 等價回路가 이 계통의 電動機의 풀이에 도움이 된다고 하면 필자로서는 다행으로 생각하는 바이다.

마지막으로 본 연구는 蓮庵文化財團 연구비 지급으로 이루어진 것이고, 이러한 연구를 할 수 있도록 적극 후원하여 주신 재단이사에 심심한 사의를 표하는 바이다.

부록 1. 記號

I_{1f}, I_{1b}: 固定子正相, 逆相分電流

V_{1f}, V_{1b}: 固定子正相, 逆相分電壓

V_M, V_A: 主卷線, 補助卷線 印加電壓

X_d, X_q: 直軸, 橫軸의 勵磁리액턴스

R_{1M}, R_{1A}: 固定子卷線抵抗

X_{1M}, X_{1A}: 固定子卷線漏洩리액턴스

X_{Ml}, X_{Al}: 2卷線의 相互漏洩리액턴스

$a = N_A/N_M$: 卷線의 卷線比

$b = N_R/N_M$: 主卷線과 回轉卷線의 比

R_{2d}, R_{2q}: 回轉子 直軸, 橫軸 卷線抵抗

X_{2d}, X_{2q}: 回轉子 直軸, 橫軸 卷線漏洩리액턴스

α: 非對稱角度

s: 슬립

부록 2. $d-q$ 變換 및 $f-b$ 變換

식(1)을 $d-q$ 變換하기 위해

$$[I_{MA}] = [C]\ [I_{dq}]$$

$$[V_{dq}] = [C]_t\ [V_{MA}]$$

에서 變換 matrix $[C]$, $[C]_t$는 다음과 같다.

$$[C] = \begin{pmatrix} 1 & -\cot\alpha & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1}{a\ \sin\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{b} \end{pmatrix} \qquad (11)$$

$$[C]_t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\cot\alpha & \dfrac{1}{a\sin\alpha} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{b} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{b} \end{pmatrix} \qquad (12)$$

이고

$$[Z_{dq}] = [C]_t\ [Z_{MA}][C] \qquad (13)$$

를 얻는다. 이 식을 $f-b$ 變換하기 위한 變換 matrix는 $[C_r]$과 轉置 matrix $[C_r]_t$로 $[Z_{dq}]$를 變換하여 구한것이 식(14)이다. 여기서 $[C_r]$는

$$[C_r] = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ -j & j & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -j & j \end{pmatrix}$$

이다.

$$
\begin{pmatrix} V_{1f} \\ V_{1b} \\ \dfrac{V_{2f}}{s} \\ \dfrac{V_{2b}}{(2-s)} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}
\begin{pmatrix}
\dfrac{R_{1M}+jX_{1M}}{\sin^2\alpha}+\dfrac{R_{1A}+jX_{1A}}{\alpha^2\sin^2\alpha}+2jX_{Ml}+j\dfrac{X_d+X_q}{b^2} & (R_{1M}+jX_{1M})(1-j\mathrm{cat}\alpha)^2-\dfrac{R_{1A}+jX_{1A}}{a^2\sin^2\alpha}+j\dfrac{X_d-X_q}{b_l} & j\dfrac{X_d+X_q}{b^2} & j\dfrac{X_d-X_q}{b^2} \\
(R_{1M}+jX_{1M})(1+j\cot\alpha)^2-\dfrac{R_{1A}+jX_{1A}}{a^2\sin^2\alpha}+j\dfrac{X_d-X_q}{b^2} & \dfrac{R_{1M}+jX_{1M}}{\sin^2\alpha}+\dfrac{R_{1A}+jX_{1A}}{a^2\sin^2\alpha}+2X_{Ml}+j\dfrac{X_d+X_q}{b^2} & j\dfrac{X_d-X_q}{b^2} & j\dfrac{X_d+X_q}{b^2} \\
j\dfrac{X_d+X_q}{b^2} & j\dfrac{X_d-X_q}{b_2} & \dfrac{2R_2}{s}+j\dfrac{X_{2d}-X_{2q}}{b_2}+j\dfrac{X_d+X_q}{b^2} & j\dfrac{X_{2d}-X_{2q}}{b^2}+j\dfrac{X_d-X_q}{b^2} \\
j\dfrac{X_d-X_q}{b^2} & j\dfrac{X_d+X_q}{b^2} & j\dfrac{X_{2d}-X_{2q}}{b^2}+j\dfrac{X_d-X_q}{b^2} & \dfrac{2R_2}{(2-s)}+j\dfrac{X_{2d}+X_{2q}}{b^2}+j\dfrac{X_d+X_q}{b^2}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} I_{1f} \\ I_{1b} \\ I_{2f} \\ I_{2b} \end{pmatrix} \tag{14}
$$

참 고 문 헌

(1) Kron "Equivalent Circuit of Electric Machinery" J, Wiley Co., New York (Book)

(2) L.W Buchanan "An Equivalent Circuit for a Single-Phase Motor Having Space Harmonics in its Magnetic Field" IEEE Trans. (PAS) Vol. PAS-84, No. 11 pp. 999-1007, November 1965.

(3) K.Y. Tang and R.L. Cosgriff" Two Axis Method of Analyzing Electric-Machines", AIEE Trans. (PAS), Vol. 74, pp. 1449-1455, February 1956

(4) P.L Alger "The Nature of Induction Machines" Gordon and Breach Science Publishers. New York (Book)