Bull. Korean Math. Soc.
Vol. 8 (1971), pp. 21-36

情報量과 情報價値의 比較

金 載 周

§0. 緖 論

不確實性下에서 行動의 決定을 하지 않으면 안되는 狀況에서 情報라는 것은 무엇인가에 對하여 考察해 보자. 決定者가 未知의 自然狀態에 關하여 미리 가지고 있는 판단에 얼마만큼의 影響을 부여하는 것이 "情報"임에 틀림없다. 미지의 自然狀態에 關한 情報란 하나의 確率變數로 그의 (客觀的) 確率法則이 狀態空間의 要素가 주어지면 알려지는 것으로 定義된다. [1]에 의하면 自然의 狀態에 對한 知識을 實驗의 수단으로 얻고자 하는 立場에서 情報量을 情報自身과 함께 自然狀態 위의 事前分布의 不確實性과 事後分布의 不確實性의 期待値 差로서 생각했다. 어떤 特定된 決定問題를 解決함에 있어서 決定者에게 情報가 주어지면 情報는 [1] [3]에 定義된 情報價値에 의하여 實値化된다. 情報價値의 定義의 있어서 達成可能한 最大의 期待效用에 의하여 定義되지만 最小의 期待損失을 使用해도 됨은 自明한 일이다. 이 논문에서는 後者의 입장을 취했다. 情報價値를 硏究함에 있어 情報收集費를 計算에 넣는 것이 當然하나 두개의 情報價値를 比較함에 있어 같은 費用이 든다면 문제는 간단하나 만일 다르다면 무척 複雜化될 것이 豫想되므로 여기서는 情報費用을 無視한 當然한 純情報價値만을 取扱하고자 한다. 비록 狀態空間과 그것에 관한 情報가 주어진다고 하드래도 情報量은 主觀的으로 決定되는 事前確率法則(主觀的確率에 關하여는 [10] 참조)에 의하여 달라질 수 있고, 情報價値에 있어서도 決定者의 主觀에서 決定되는 損失函數와 事前確率法則에 의하여 달라진다. 그러면 두 개의 情報를 比較함에 있어 다음과 같은 問題點이 일어난다. 情報價値가 큰 것은 반드시 情報量이 큰 것인가 事前確率法則과 損失函數에 관계 없이 成立하자면 어떤 條件이 必要한가. 事前確率이 들어 갔을때는 어떤가. 事前確率과 損失函數가 들어갔을 때는 어떤가에 對하여 單純한 경우에 限定해서 메쓰를 가하여

分析해 보고자 함이 本論文의 目的이다. 情報量과 情報價値의 生產管理 工事入札 등 실제문제에 應用面을 살펴봄도 중요하다고 보나 여기서는 紙面關係上 省略한다.

§1. 不確實性의 測度, 情報量 및 情報價値

(s, S) 를 可測인 狀態空間, ξ 를 (s, S) 위에 定義된 事前確率測度, ξ 가 (s, S) 任意의 測度 λ 에 關하여 絕對連續이라하고 $d\xi=\xi(s)d\lambda$ 라 하자 그러면

(i) 未知의 狀態 $s\epsilon S$ 에 關한 不確實性의 測度 $H(\xi)$ 를 Shannon [9]에 따라 Lindley [8]은 다음과 같이 定義했다.

$$H(\xi)=-\int \xi(s)\log \xi(s)d\lambda \tag{1.1}$$

(ii) (a, A)를 可測인 行動空間, $W(\cdot,\cdot)$를 $(s\times \mathrm{a},\ S\times A)$위에 定義된 可測인 損失函數라 하자. 그때 이들 要素, (s, S), ξ, (a, A), W는 基本決定問題 D_0을 規定한다고 하고 이것을 $D_0\equiv\{s, \xi, \mathrm{a}, W\}$로 나타낸다. 基本決定問題 D_0에 직면한 不確實性의 測度로 다음과 같은 量을 定義한다.

$$R_0(D_0)\equiv R_0(\xi|W)\equiv\inf_{a\epsilon \mathrm{a}}\int W(s, a)d\xi(s) \tag{1.2}$$

여기서 $R_0(D_0)$는 D_0에 있어서 Bayes 危險을 나타낸다.

특히 $S=\{s_1\cdots, s_m\}$, $\xi=(\xi(s_1), \cdots, \xi(s_m))\equiv(\xi_1, \cdots, \xi_m)$ 여기서 $\xi_i\geqq 0$, $\Sigma\xi_i=1$ 라 두면 [1], [2]에 依하여 다음과 같은 補助定理가 成立함은 잘알려져 있다.

補助定理 1.1.

(1) $H(\xi)$는 $\xi\epsilon S^{m-1}$의 凹函數이다. 단 S^{m-1}은 $m-1$ 次元 單體로 $S^{m-1}\equiv\{(\gamma_1, \cdots, \gamma_m); \gamma_i\geqq 0, \Sigma\gamma_i=1\}$ 이다.

(2) $R_0(\xi|W)$ 역시 W에 依存하는 $\xi\epsilon S^{m-1}$의 凹函數이다.

(3) S^{m-1}위의 定義된 凹函數 $\phi(\xi)$는 適當한 損失函數 W를 가지는 $R_0(\xi|W)$로 나타낼 수 있다.

定義 1.1. $\tilde{x}$를 可測空間 (X, χ) 위에 定義된 確率變數로 $s\epsilon S$가 주어졌을 때 (X, χ) 위의 測度 μ에 關한 確實密度 $f(x|s)$ 알려질 수 있다고 가정한다. 그때 만일 決定者가 $\tilde{x}$의 實現値 x를 알 수 있으면 $s\epsilon S$에 對한 情報 $e(\tilde{x})$가 그에게 얻어질 수 있다고 하고 $\tilde{x}$의 實現値 x를 情報 $e(\tilde{x})$의 通報라고 부른다.

만일 $S=\{s_1, \cdots, s_m\}$, $X=\{X_1, \cdots, X_n\}$라 두면 情報 $e(\tilde{x})$는 Markov 行列 $\Lambda\equiv\|\lambda_{ij}\|$, $i=1, \cdots, m$; $j=1, \cdots, n$에 依하여 規定되고 Λ를 情報行列 이라고도 하며 여기서

$$\lambda_{ij}=Pr\{\tilde{x}=x_j \mid s=s_i\}=f(x_j \mid s_i) \tag{1.3}$$

이다. $s \epsilon S$에 對한 情報 $e(\tilde{x})$는 ξ와 W에 關하여 獨立으로 주어짐은 말할 필요도 없다. $\tilde{x}=x$ 觀測 後 事後確率法測 $\xi(s \mid X)$는 Bayes의 定理에 依하여

$$\xi(s \mid X)=\xi(s)f(X \mid s)/f(X), \text{ 단 } f(X)=\int\xi(s)f(X \mid s)ds \tag{1.4}$$

로 주워진다. 간단히 하기 위하여 $\tilde{x}=x$가 주어졌을 때 事後確率測度를 $\xi(X)$로 나타낸다. 특히, 만일 $S=\{s_1, \cdots, s_m\}$, $\xi=(\xi_1, \cdots, \xi_m)\epsilon S^{m-1}$이면 $\xi(X)=(\xi(s_1 \mid x), \cdots, \xi_1(s_m \mid x))=\xi_1(X), \cdots, \xi_m(X))\epsilon S^{m-1}$이다. $\tilde{x}=x$를 觀測한 後의 不確實性의 測度를 $H(\xi(X))$로 나타내며 그것의 期待値

$$m(\tilde{x} \mid \xi)=E[H(\xi(\tilde{x}))]=\int H(\xi(X))f(X)d\mu \tag{1.5}$$

를 Rényi [6]는 $e(\tilde{x})$를 觀測한 後의 損失情報量이라 定義했다. 이것은 通信理論에서 曖昧度에 해당하는 量이다.

定義 1.2. (s, S) 위의 事前確率測度가 ξ일 때 情報 $e(\tilde{x})$가 提供하는 情報量 $I(\tilde{x} \mid \xi)$는

$$I(\tilde{x} \mid \xi)\equiv H(\xi)-m(\tilde{x} \mid \xi) \tag{1.6}$$

로 定義한다. $I(\tilde{x} \mid \xi)\geqq 0$ 임은 잘 알려져 있다. 一面 情報 $e(\tilde{x})$가 基本決定問題 D_0를 풀기爲한 決定者에게 주워지면 그때 그는 決定問題 $D\equiv\{D_0; e(\tilde{x})\}$을 가진다고 말하고 決定問題 D에 있어서 $\tilde{x}=x$가 觀測된 後의 危險을 $R_0(\xi(X) \mid W)$로 나타낸다. 이것의 期待値

$$R(\tilde{x} \mid \xi, W)\equiv R(D)\equiv E[R_0(\xi(\tilde{x}) \mid W)] \tag{1.7}$$

를 $e(\tilde{x})$을 觀測한 後에 期因되는 損失決定量이라 부른다. 이것은 決定問題 $D=\{D_0; e(\tilde{x})\}$에 있어서 Bayes 危險임은 말할 필요도 없다. (1·6)과 같이 다음과 같은 量을 定義한다.

$$V(\tilde{x} \mid \xi, W)\equiv R_0(\xi \mid W)-R(\tilde{x} \mid \xi, W). \tag{1.8}$$

定義 1.3. (1.8)에서 定義된 $V(\tilde{x} \mid \xi, W)$를 基本決定問題 D_0에 對한 $e(\tilde{x})$의 情報價値 라고 부른다. $V(\tilde{x} \mid \xi, W)\geqq 0$는 말할 필요도 없고, 이것은 ξ와 W에 依存하는 量이다.

DeGroot [1]은 다음과 같은 事實을 記明했다.

補助定理 1.2. S^{m-1}에 定義된 非負의 函數 $U(\xi)$가 不確實性의 測度가 되기 위한 必要充分條件은 $U(\xi)$가 凹函數이다.

위의 사실에서 $H(\xi)$와 $R_0(\xi|W)$는 둘다 不確實性의 測度라고 볼 수 있다.

§2. 單純한 경우의 情報量과 情報價値의 幾何學的인 表現.

$S=\{s_1, s_2\}$, $\xi=(\xi_1, \xi_2)$이고 $e(\tilde{x})$가 두 개의 通報 x_1과 x_2 즉 $X=\{x_1, x_2\}$를 가지는 경우의 情報量의 幾何學的인 表現을 해 보자.

전과같이

$$\lambda_{ij} \equiv Pr\{\tilde{x}=x_j | s=s_i\} = f_i(x_j) \tag{2.1}$$

그리고 $f(x_j)=\xi_1 f_1(x_j)+\xi_2 f_2(x_j)$, $i=1,2$: $j=1,2$ 이다.

$a>1$인 固定된 數 a에 對하여 函數 $h_a(\cdot)$를

$$\begin{aligned} h_a(X) &\equiv -X\log_a X-(1-X)\log_a(1-X) \\ &\equiv h_a(1-X), \text{ 단 } 0 \leqq X \leqq 1 \end{aligned} \tag{2.2}$$

와 같이 定義한다. ($h_a(\cdot)$를 $h(\cdot)$로 표기하기로 한다.)

(i) 情報量의 幾何學的인 表現

$H(\xi)=h(\xi_1)$, $0 \leqq \xi_1 \leqq 1$ 이므로 이것의 그래프는 그림 1과 같이 된다. 주워진 $\xi=(\xi_1, \xi_2)$과 $e(\tilde{x})$에 對하여 C, C_1, C_2를 각각 ξ_1, $\xi_1(x_1)$, $\xi_1(x_2)$을 나타내는 橫座標의 點이라 하자. 여기서 $\xi_1(x_j)$은 $\tilde{x}=x_j$, $j=1,2$가 주워졌을때 S_1의 事後確率을 나타낸다. 그러면 $CP=h(\xi_1)$, $C_jD_j=h(\xi_1(x_j))$, $j=1,2$ 이고 (1.5)에 의하여

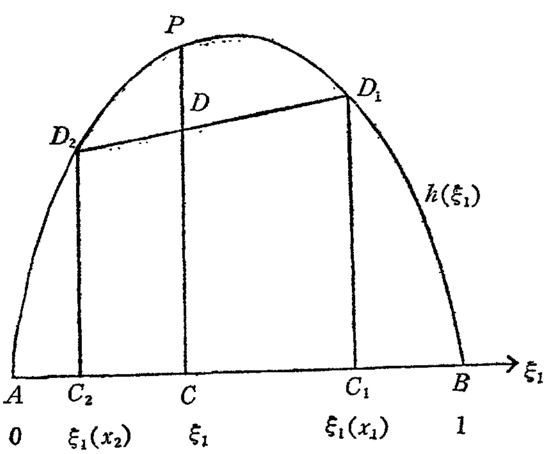

그림 1

$$m(\tilde{x}|\xi)=f(x_1)\cdot C_1D_1+f(x_2)C_2D_2 \tag{2.3}$$

이다. 여기서

$$f(x_1)+f(x_2)=1 \tag{2.4}$$

이다.

$$E[\xi_1(\tilde{x})]=f(x_1)\xi_1(x_1)+f(x_2)\xi_1(x_2)=\xi_1 \tag{2.5}$$

이므로 만일 $\xi_1(x_2)\leqq\xi_1(x_1)$ 이면

$$\xi_1(x_2)\leqq\xi_1\leqq\xi_1(x_1) \tag{2.6}$$

이다.

$$C_2C:CC_1=f(x_1):f(x_2) \tag{2.7}$$

이므로 (2·3)~(2·7)에서

$$m(\tilde{x}|\xi)=CD \tag{2.8}$$

임을 알 수 있고 (1.6)과 (2.8)에서 $I(\tilde{x}|\xi)=CP-CD$ 즉

$$I(\tilde{x}|\xi)=DP \tag{2.9}$$

이다.

(ii) 情報價値의 幾何學的인 表現

(i)의 경우와 마찬가지로 $S=(s_1,s_2)$, $\xi=(\xi_1,\xi_2)$, $X=(X_1,X_2)$라 하고 $A=\{a_1,a_2\}$라 두면 損失行列은 一般性을 잃지 않고 表 1과 같이 表現할 수 있다. 여기서 $W_i\geqq 0$, $i=1,2$ 이다.

	a_1	a_2
S_1	0	W_1
S_2	W_2	0

表 1

두 개의 通報에 限定했으므로 情報行列은 表 2와 같

	x_1	x_2
S_1	λ_{11}	λ_{12}
S_2	λ_{21}	λ_{22}

表 2

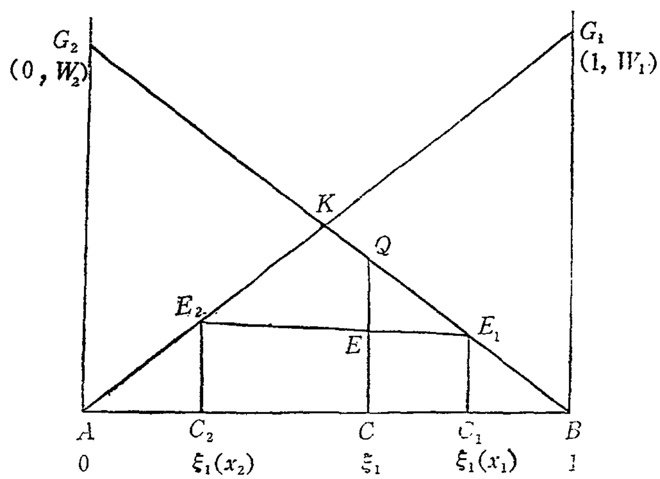

그림 2.

이 된다.

$V(\tilde{x}|\xi, W)$를 幾何學的으로 表現하기 위하여 두 點 $G_1=(1, W_1)$과 $G_2=(0, W_2)$를 그림 2에서와 같이 취한다. K를 두직선 AG_1과 BG_2의 交點이라 하면 折線 AKB는 $R_0(\xi|W)$, $0\leqq\xi_1\leqq1$을 나타낸다. (1)과 같은 方法으로 特定된 $\xi=(\xi_1, \xi)$에 對하여 $R_0(D_0)\equiv R_0(\xi|W)=CQ$, $R(\tilde{x}|\xi, W)=CE$를 나타내므로

$$V(\tilde{x}|\xi, W)=EQ \tag{2.10}$$

이다. 단 여기서 주의하여야 할 점은 $W_i\geqq0$ $i=1,2$는 그래프의 形態를 決定하고 λ_{ij}, $i=1,2$; $j=1,2$는 $\xi_1(x_2)$와 $\xi_1(x_1)$의 位置 決定에 영향을 주므로 $\xi_1(x_2)\leqq\xi_1(x_1)$ 이라는 가정하에 그렸다. ([2], [11] 참조.)

§3. 두 개의 情報量과 情報價値의 比較

$D_0=\{S, \xi, a, W\}$를 基本決定問題라 하고 여기서 $S=\{s_1, \cdots, s_m\}$이고 $\xi=(\xi_1, \cdots, \xi_m)\epsilon S^{m-1}$이라 하자. 우선 다음과 같은 것들을 定義한다.

定義 3.1. $s\epsilon S$에 關한 두개의 情報 $e(\tilde{x})$와 $e(\tilde{y})$에 對하여

$$V(\tilde{x}|\xi, W)\geqq V(\tilde{y}|\xi, W) \tag{3.1}$$

가 모든 ξ와 W에 對하여 성립하면 "$e(\tilde{x})$는 $e(\tilde{y})$보다 더 情報的이다"라고 부르고

$$V(\tilde{x})\geqq V(\tilde{y}) \tag{3.2}$$

로 나타낸다.

定義 3.2. 만일 어떤 固定된 $\xi\epsilon S^{m-1}$에 對하여

$$V(\tilde{x}|\xi, W)\geqq V(\tilde{y}|\xi, W)$$

가 모든 W에 對하여 성립하면 "特定된 ξ에 對하여 $e(\tilde{x})$는 $e(\tilde{y})$보다 더 情報的이다"라고 말하고

$$V(\tilde{x}|\xi)\geqq V(\tilde{y}|\xi) \tag{3.3}$$

로 나타낸다. 情報量에 있어서도 情報價値의 경우와 마찬가지로 다음과 같은 것을 定義한다.

定義 3.3. $s\epsilon S$에 關한 두 개의 情報 $e(\tilde{x})$와 $e(\tilde{y})$에 對하여

$$I(\tilde{x}|\xi)\geqq I(\tilde{y}|\xi) \tag{3.4}$$

가 모든 ξ에 對하여 成立하면 "$e(\tilde{x})$는 $e(\tilde{y})$보다 더 情報量的이다"라고 부르고

$$I(\tilde{x}) \geqq I(\tilde{y}) \tag{3.5}$$

로 나타내고 固定된 ξ에 對하여 (3·4)가 成立하면 그냥 (3.4)式으로 나타낸다.

다음은 아래와 같은 條件을 定義한다.

條件(ϕ): S^{m-1} 위에 定義된 任意의 凹 函數 $\phi(\xi)$에 對하여

$$E[\phi(\xi(\tilde{x}))] \leqq E[\phi(\xi(\tilde{y}))] \tag{3.6}$$

가 모든 $\xi \epsilon S^{m-1}$에 對하여 成立한다.

그러면 補助定理 1.1과 (1.6)式 (1.8)式 그리고 DeGroot [1]에 依하면 $m(\tilde{x}|\xi)$는 非負 凹函數임을 알 수 있으므로 다음의 定理가 成立함을 곧 알 수 있다.

定理 3.1. $V(\tilde{x}) \geqq V(\tilde{y}) \Longleftrightarrow$ 條件(ϕ) $\Longleftrightarrow I(\tilde{x}) \geqq I(\tilde{y})$ (단 여기서 $\Longleftrightarrow$ 記號는 完全 條件을 나타낸다)

	y_1	y_2
S_1	λ'_{11}	λ'_{12}
S_2	λ'_{21}	λ'_{22}

表 3

지금부터 單純한 경우 즉 $S=\{s_1, s_2\}$, $\xi=(\xi_1, \xi_2)$, $A=\{a_1\ a_2\}$ 이고 損失行列, 情報行列이 각각 表 1,2,3과 같이 주워질 때 두개의 通報 $X=\{x_1, x_2\}$, $Y=\{y_1, y_2\}$를 가지는 情報 $e(\tilde{x})$와 $e(\tilde{y})$의 情報量과 情報價値의 比較에 對하여 限定하여 생각해 보기로 한다.

주워진 어떤 ξ에 對하여 $s \epsilon S$에 關한 두 개의 情報 $e(\tilde{x})$과 $e(\tilde{y})$에 對한 다음의 두 條件을 定義한다.

條件 ($\pi:\xi$): 任意의 한 $\xi=(\xi_1, \xi_2)>0$ 에 對하여

$$\xi_1(x_2) \leqq \xi_1(y_2) \leqq \xi_1(y_1) \leqq \xi_1(x_1) \tag{3.7}$$

條件 (Λ): 情報行列의 要素들 사이에 다음의 관계가 동시에 성립한다.

$$\lambda_{11}+\lambda_{22} \geqq 1,\ \ \lambda'_{11}+\lambda'_{22} \geqq 1,\ \frac{\lambda_{21}}{\lambda_{11}} \leqq \frac{\lambda'_{21}}{\lambda'_{11}},\ \ \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{22}} \leqq \frac{\lambda'_{12}}{\lambda'_{22}} \tag{3.8}$$

補助定理 3.1. 條件($\pi:\xi$)$\Longleftrightarrow$條件(Λ)

(證明) $\xi_1(x_2) \leqq \xi_1(x_1) \Longleftrightarrow \dfrac{\xi_1\lambda_{12}}{\xi_1\lambda_{12}+\xi_2\lambda_{22}} \leqq \dfrac{\xi_1\lambda_{11}}{\xi_1\lambda_{11}+\xi_2\lambda_{21}}$

$$\Longleftrightarrow 1+\frac{\xi_2}{\xi_1}\frac{\lambda_{22}}{\lambda_{12}} \geqq 1+\frac{\xi_2\lambda_{21}}{\xi_1\lambda_{11}}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\lambda_{22}}{\lambda_{12}} \geqq \frac{\lambda_{21}}{\lambda_{11}} \quad \Longleftrightarrow \lambda_{11}+\lambda_{22} \geqq 1 \tag{3.9}$$

같은 方法으로

$$\xi_1(y_2) \leqq \xi_1(y_1) \Longleftrightarrow \lambda'_{11}+\lambda'_{22} \geqq 1 \tag{3.10}$$

$$\xi_1(x_2) \leqq \xi_1(y_2) \Longleftrightarrow \frac{\xi_1\lambda_{12}}{\xi_1\lambda_{12}+\xi_2\lambda_{22}} \leqq \frac{\xi_1\lambda'_{12}}{\xi_1\lambda'_{12}+\xi_2\lambda'_{22}}$$

$$\Longleftrightarrow 1+\frac{\xi_2}{\xi_1}\cdot\frac{\lambda_{22}}{\lambda_{12}} \geqq 1+\frac{\xi_2}{\xi_1}\cdot\frac{\lambda'_{22}}{\lambda'_{12}}$$

$$\Longleftrightarrow \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{22}} \leqq \frac{\lambda'_{12}}{\lambda'_{22}} \tag{3.11}$$

같은 方法으로

$$\xi_1(y_1) \leqq \xi_1(x_1) \Longleftrightarrow \frac{\lambda_{21}}{\lambda_{11}} \leqq \frac{\lambda'_{21}}{\lambda'_{11}} \tag{3.12}$$

(3.9), (3.10), (3.11) 및 (3.12)를 종합하면 補助定理 3.1 이 成立함을 알 수 있다. 그러므로 증명됨.

定理 3.2. $V(\tilde{x}) \geqq V(\tilde{y}) \Longleftrightarrow$ 條件 $(\pi:\xi) \Longleftrightarrow I(\tilde{x}) \geqq I(\tilde{y})$.

(證明) 우선 먼저 $V(\tilde{x}) \geqq V(\tilde{y})$ 條件 $(\pi:\xi)$임을 幾何學的인 表現으로 증명하여 보자. (2·6)式에 의하여 $\xi_1(x_2) \leqq \xi_1 \leqq \xi_1(x_1)$ 임을 알고 같은 方法으로 $\xi_1(y_2 \leqq \xi_1 \leqq \xi_1(y_1)$ 임을 안다. 즉

$$\xi_1(x_2),\ \xi_1(y_2) \leqq \xi_1 \leqq \xi_1(x_1),\ \xi_1(y_1) \quad (3.13)$$

이다. 따라서 條件 $(\pi:\xi)$ 와 綜合하면

$$\xi_1(x_2) \leqq \xi_1(y_2) \leqq \xi_1 \leqq \xi_1(y_1) \leqq \xi_1(x_1) \tag{3.14}$$

가 成立함을 안다. 임의의 주어진 損失行列 W에 對하여 그림 2 에서와 같은 방법으로 $R_0(\xi|W)$, $0 \leqq \xi_1 \leqq 1$ 는 그림 3에서 折線 AKB로 주어지고 어떤 고정된 ξ에 對하여 $V(\tilde{x}|\xi, W)=EQ$ $\geqq E'Q=V(\tilde{y}|\xi, W)$ 즉 $V(\tilde{x}|\xi) \geqq V(\tilde{y}|\xi)$ 임을 안다 (3·14)에 의하여 ξ_1의 上限과 下限

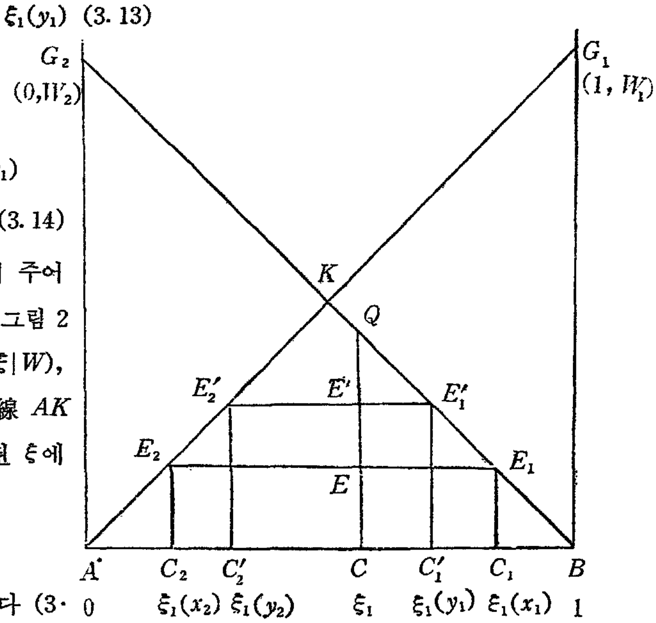

그림 3

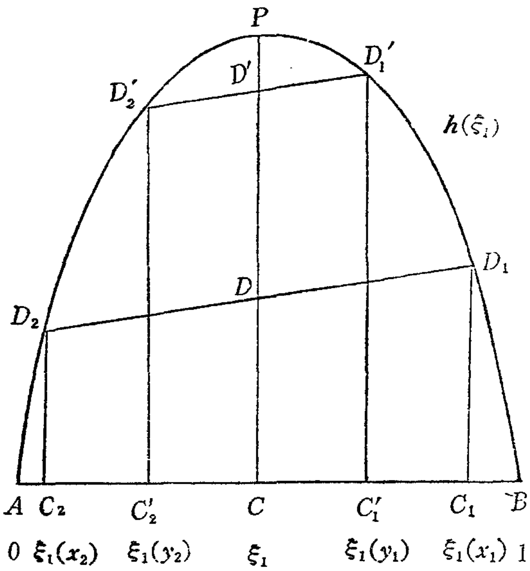

그림 4.

은 定하여 지므로 그림 3 에서 明白히 條件$(\pi:\xi)$ 下에서는 $EQ \geqq EQ'$ 이고 條件$(\pi:\xi)$을 만족하는 모든 ξ_1에 對하여 성립하므로 $V(\tilde{x}) \geqslant V(\tilde{y})$이다. 情報量에 있어서도 마찬가지 방법으로 그림 4에서 $I(\tilde{x}|\xi) = DP \geqq D'P = I(\tilde{y}|\xi)$이고 條件$(\pi:\xi)$ 下에서 모든 ξ_1에 對하여 성립하므로 $I(\tilde{x}) \geqslant I(\tilde{y})$ 이다. 역으로 $V(\tilde{x}) \geqslant V(\tilde{y})$이면 條件$(\pi:\xi)$밖에 없다는 것을 증명하자. (3.13)式으로 부터 다음의 4 가지 경우가 $\xi_1(x_j)$와 $\xi_1(y_j)$ 사이에 일어난다.

(1): $\xi_1(x_2) \leqslant \xi_1(y_2) \leqslant \xi_1 \leqslant \xi_1(x_1) \leqslant \xi_1(y_1)$ (3.15)

(2): $\xi_1(y_2) \leqslant \xi_1(x_2) \leqslant \xi_1 \leqslant \xi_1(y_1) \leqslant \xi_1(x_1)$ (3.16)

(3): $\xi_1(x_2) \leqslant \xi_1(y_2) \leqslant \xi_1 \leqslant \xi_1(y_1) \leqslant \xi_1(x_1)$ (3.17)

(4): $\xi_1(y_2) \leqslant \xi_1(x_2) \leqslant \xi_1 \leqslant \xi_1(x_1) \leqslant \xi_1(y_1)$ (3.18)

(1)의 특별한 경우 즉 $K=E_1$인 경우가 그림 5와 같이 된다. 이 경우는 $E=Q$ 이므로 $V(\tilde{x}|\xi, W) = EQ = 0 < E'Q = V(\tilde{y}|\xi, W)$ 이다. 따라서 모든 ξ에 對하여

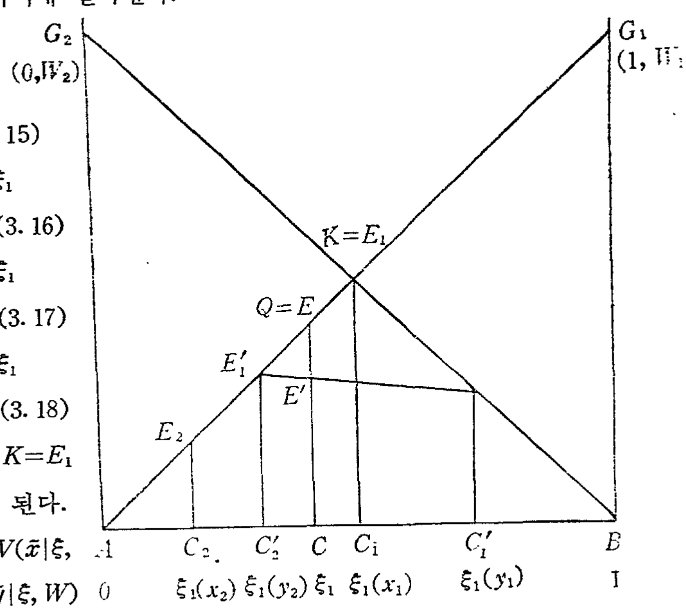

그림 5.

$V(\bar{x}) \geqq V(\bar{y})$가 성립하지 않음을 알 수 있다. 같은 (1) 경우로 그림 6과 같은 경우를 생각해 보자

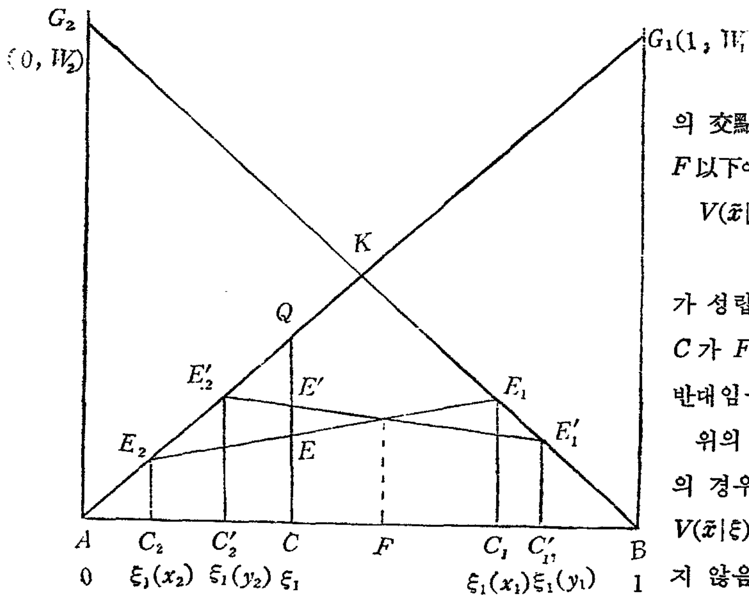

그림 6.

C가 $E_1'E_2'$와 E_1E_2의 交點의 AB軸上의 座標, F以下에 있을때는

$$V(\bar{x}|\xi, W) = EQ \geqq E'Q = V(\bar{y}|\xi, W)$$

가 성립함을 알 수 있으나 C가 F以上에 있을때는 그 반대임을 알 수 있다.

위의 사실을 종합하면 (1)의 경우 모든 ξ에 對하여 $V(\bar{x}|\xi) \geqq V(\bar{y}|\xi)$가 성립하지 않음을 나타낸다. (2)의 경우는 (1)의 경우와 마찬가지 방법으로 모든 ξ에 對하여 $V(\bar{x}|\xi) \geqq V(\bar{y}|\xi)$가 成立하지 않음을 알 수 있고 (3)의 경우는 條件$(\pi:\xi)$의 경우이고 (4)의 경우는 (3)의 경우의 반대경우 즉, 모든 ξ에 對하여 $V(\bar{x}|\xi) \leqq V(\bar{y}|\xi)$ 임을 알 수 있다. 그러므로 $V(\bar{x}) \geqq V(\bar{y})$이면 條件$(\pi:\xi)$ 밖에 없다는 것을 알 수 있다. 情報量에 있어서도 情報價値에서의 증명과정과 마찬가지 과정을 밟으면 $I(\bar{x}) \geqq I(\bar{y})$ 위한 條件은 條件$(\pi:\xi)$ 밖에 없음을 알 수 있다. 그러므로 證明됨. 補助定理 3.1과 定理 3.2에 의하면 다음의 定理가 성립함은 곧 알 수 있다.

定理 3.3. $V(\bar{x}) \geqq V(\bar{y}) \Longleftrightarrow$ 條件$(A) \Longleftrightarrow I(\bar{x}) \geqq I(\bar{y})$ (3.19)

이 定理는 실제적인 兩者擇一 問題에 직면했을 때 情報量이라든가 情報價値의 복잡한 계산을 거치지 않고 情報行列만 가지고 어느것이 더 情報的인가 혹은 情報量的인가를 판단하게 하는 중요한 역할을 할 수 있다. 그러나 이것은 情報價値의 比較와 情報量의 比較에 있어서 아무런 구별점을 주지 않는다.

Miyasawa [4]는 任意의 固定된 $\xi = (\xi_1, \xi_2) > 0$에 對하여 다음의 定理를 증

명했다.

定理 3.4. (i) $V(\tilde{x}|\xi)\geqslant V(\tilde{y}|\xi)\Rightarrow I(\tilde{x}|\xi)\geqslant I(\tilde{y}|\xi)$ (3.20)

(ii) $I(\tilde{x}|\xi)\geqslant I(\tilde{y}|\xi)\nRightarrow V(\tilde{x}|\xi)\geqslant V(\tilde{y}|\xi)$ (3.21)

($A\Rightarrow B$는 A가 B되기 위한 充分條件을 나타낸다.)

다음으로 $V(\tilde{x}|\xi, W)\geqslant V(\tilde{y}|\xi, W)$ 되기 위한 條件과 $I(\tilde{x}|\xi)\geqslant I(\tilde{y}|\xi)$와의 關係에 對하여 조사 해보고자 한다.

定理 3.5. (i) 條件 $(\pi:\xi)\Rightarrow V(\tilde{x}|\xi, W)\geqslant V(\tilde{y}|\xi, W)$ (3.22)

(ii) $V(\tilde{x}|\xi, W)\geqslant V(\tilde{y}|\xi, W)\nRightarrow$ 條件$(\pi:\xi)$ (3:23)

(證明) (i) 定理 3.2에 의하여 條件$(\pi:\xi)$ 下에서는 모든 ξ,와 W에 $V(\tilde{x}|\xi, W)\geqslant V(\tilde{y}|\xi, W)$ 이므로 固定된 ξ, W에 對하여 성립함은 明白하다. (ii) 條件$(\pi:\xi)$ 이외에도 (3.15)式의 경우 고정된 ξ, W에 對하여 그림 6에서 明白히 C가 F點 以下에 있으면 $V(\tilde{x}|\xi, W)\geqslant V(\tilde{y}|\xi, W)$ 이고 (3.16)式의 경우도 $V(\tilde{x}|\xi, W)\geqslant V(\tilde{y}|\xi, W)$인 경우가 있으므로 증명됨.

系 3.1. 條件$(\pi:\xi)$ 下에서

$$V(\tilde{x}|\xi, W)\geqslant V(\tilde{y}|\xi, W)\Longleftrightarrow I(\tilde{x}|\xi)\geqslant I(\tilde{y}|\xi) \tag{3.24}$$

定理 3.2와 定理 3.5에서 명백하므로 증명은 省略한다.

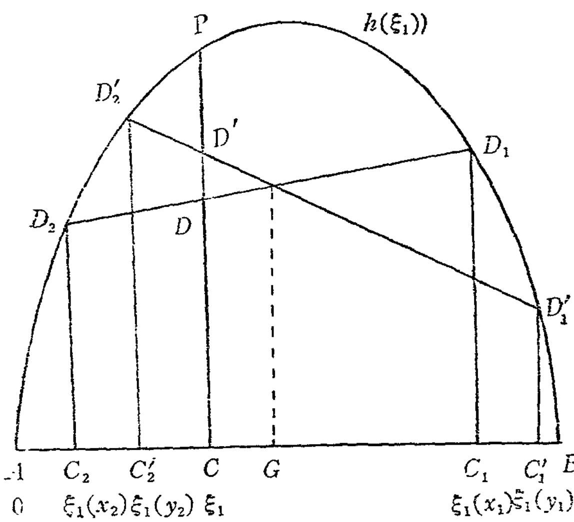

그림 7

系 3.2. (3.15)式과 (3.16)式의 경우는 그림 6과 그림 7에서 F點과 G點이 AB 軸上에서 一致하면

$$V(\tilde{x}|\xi, W)\geqslant V(\tilde{y}|\xi, W)$$
$$\Longleftrightarrow I(\tilde{x}|\xi)\geqslant I(\tilde{y}|\xi) \tag{3.25}$$

이다.

(證明) (3.15)式의 경우 $F=G$이면 $C'_2F=C'_2G$이다.

$C'_2\leqslant C\leqslant G\Longleftrightarrow I(\tilde{x}|\xi)\geqslant I(\tilde{y}|\xi)$

$C'_2\leqslant C\leqslant F\Longleftrightarrow$

$V(\tilde{x}|\xi, W\geqslant V(\tilde{y}|\xi, W)$

만일 다음과 같은 경우는

$$G \leqslant C \leqslant C_1 \Longleftrightarrow I(\tilde{x}|\xi) \leqslant I(\tilde{y}|\xi)$$

$$F \leqslant C \leqslant C_1 \Longleftrightarrow V(\tilde{x}|\xi, W) \leqslant V(\tilde{y}|\xi, W)$$

이고 또 $C'_2 \leqslant C \leqslant G$ 와 $C'_2 \leqslant C \leqslant F$ 는 같은 것이므로 $V(\tilde{x}|\xi, W) \geqslant V(\tilde{y}|\xi, W) \Longleftrightarrow I(\tilde{x}|\xi) \geqslant I(\tilde{y}|\xi)$ 임을 알 수 있다. 같은 方法으로 (3.16)式의 경우도 $F=G$ 라는 條件下에 $V(\tilde{x}|\xi, W) \geqslant V(\tilde{y}|\xi, W) \Longleftrightarrow I(\tilde{x}|\xi) \geqslant I(\tilde{y}|\xi)$ 임을 알 수 있다. 그러므로 증명됨.

이상의 것을 종합하면 (3.15) (3.16) 式의 경우 $F \fallingdotseq G$ 이면 $V(\tilde{x}|\xi, W) \geqslant V(\tilde{y}|\xi, W)$라고 해서 $I(\tilde{x}|\xi) \geqslant I(\tilde{y}|\xi)$라고 말할 수 없고, 그逆도 성립하지 않음을 나타낸다. 특별한 制約條件을 除하면 ξ와 W가 고정되었을 경우는 情報價値가 크다고 해서 情報量이 큰 것도 아니고 情報量이 크다고 해서 情報價値가 큰 것도 아님을 알 수 있다.

定義 3.4. 情報行列 $\Lambda \equiv \|\lambda_{ij}\|$, $i, j=1, \cdots, m$ 에 있어서 $\lambda_{ii}=1$, $\lambda_{ij}=0$, $j \neq i$ 일 때 즉 Λ가 m次 單位行列일 때 Λ를 가지는 情報 $e(\tilde{x})$를 完全情報라고 부른다.

定理 3.2로 부터 다음의 系를 얻는다. (여기서는 單純한 경우만을 취급한다)

系 3.3. s에 關한 모든 情報 $e(\tilde{y})$에 對하여 $V(\tilde{x}) \geqslant V(\tilde{y})$ 혹은 $I(\tilde{x}) \geqslant I(\tilde{y})$ 되기 위한 必要充分條件은 $e(\tilde{x})$가 s에 關한 完全情報 이다.

(證明) $e(\tilde{x})$가 s에 關한 完全情報라고 하면 情報行列 Λ는 單純行列

$$\Lambda = \left\| \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix} \right\| \tag{3.26}$$

이고 (1.4)式에 의하여 $\xi_1(x_1)=1$, $\xi_1(x_2)=0$. 이며 $0 \leqslant \xi_1(y_2)$, $\xi_1(y_1) \leqslant 1$ 이므로 $V(\tilde{x}) \geqslant V(\tilde{y})$, $I(\tilde{x}) \geqslant I(\tilde{y})$ 이다. 역으로 $V(\tilde{x}) \geqslant V(\tilde{y})$ 혹은 $I(\tilde{x}) \geqslant I(\tilde{y})$되기 위해서는 條件$(\pi : \xi)$가 成立하지 않으면 안된다. 모든 $e(\tilde{y})$에 對하여 성립하자면 $\xi_1(y_2)=0$, $\xi_1(y_1)=1$ 의 경우도 있으므로 $\xi_1(x_2)=0$, $\xi_1(x_1)=1$ 이 되지 않으면 안된다. 그러므로 $e(\tilde{x})$는 完全情報다.

完全情報란 未知의 狀態에 對하여 情報를 收集함과 同時에 完全히 아는 것이므로 다른 어떤 情報보다 情報價値 혹은 情報量이 크다는 것은 우리의 直觀과 一致하는 結果를 系 3.3은 말해주고 있다.

定義 3.5. $S=\{s_1, \cdots, s_m\}$에 關한 두 개의 情報 $e(\tilde{x})$, $e(\tilde{x}')$가 있어 $\Lambda=\Lambda'$ 일 때 두 개의 情報 $e(\tilde{x})$, $e(\tilde{x}')$는 同値라고 부르고

$$e(\tilde{x})\equiv e(\tilde{x}') \tag{3.27}$$

로 나타낸다.

定義 3.6. S에 關한 情報를 $e(\tilde{x})$: $X=\{x_1, \cdots, x_N\}$라고 하자. 이때 S, Λ와는 전혀 무관계인 $N\times N'$ 形의 Markov 行列 $B=\|\beta_{jk}\|$ 및 通報의 집합 $Z=\{z_1, \cdots, z_{N'}\}$가 存在하여 $\tilde{x}=x_j$가 觀測되었을 때 各 通報 $z_k\in Z$가 確率 β_{jk}로 일어나는 傳達機構가 存在하여 決定者가 傳達機構를 通하여 일어나는 通報 z_k만을 알 수 있다고 하자. 이것을 $e(\tilde{z})$로 나타내고 $e(\tilde{z})$를 $e(\tilde{x})$로 부터 傳達機構 B에 의하여 傳達된 情報. 간단히 $e(\tilde{z})$를 $e(\tilde{x})$로 부터의 $B-$ 傳達情報라고 말한다. $e(\tilde{z})$가 s에 관한 情報라는 것은 다음과 같은 事實로 곧 알 수 있다.

(1) $f(z_k|s_i)\equiv P(z_k|s_i)=\sum_{j=1}^{N}\lambda_{ij}b_{jk}\geqslant 0$

(2) $\sum_{k=1}^{N'}P(z_k|s_i)=\sum_{j=1}^{N}\lambda_{ij}\sum_{k=1}^{N'}b_{jk}=1$

따라서 $e(\tilde{z})$의 情報行列 $\Lambda'=\|\lambda'_{ik}\|$는 다음과 같이 주어진다.

$$\Lambda'=\Lambda\cdot B \tag{3.28}$$

情報 $e(\tilde{x})$, $e(\tilde{y})$에 關하여 情報行列 Λ, Λ' 사이에 (3·28)식이 성립하는 Markov 행렬 B가 存在하면 $e(\tilde{y})$는 $e(\tilde{x})$로 부터의 傳達情報라는 것과 同値이다.

單純한 경우에 있어서 情報 $e(\tilde{x})$와 傳達情報 $e(\tilde{z})$ 사이의 情報量과 情報價値의 비교를 하기 위하여 J. Marschak [3]과 David Blackwell [7]의 다음과 같은 결과를 인용하고자 한다.

條件 (G): $$\frac{f(z_k|s_i, x_j)}{f(z_k|x_j)}\equiv\frac{f(s_i|z_k, x_j)}{f(s_i|x_j)}\equiv\frac{f(x_j, z_k|s_i)}{f(x_j|s_i)f(z_k|x_j)}=1 \tag{3.29}$$

條件 (Γ): $\Lambda'=\Lambda\Gamma$ (3.30)

條件 (B): μ를 $N\times N'$의 Markov 行列의 集合이라고 하면

(B_0) $B\in\mu$ (3.31)

(B_1) $\Lambda'=\Lambda B$

인 行列 $B=\|\beta_{jk}\|$가 存在한다.

그러면 다음과 같은 補助定理가 成立한다.

補助定理 3.1. $(G)\Rightarrow(\Gamma)\Rightarrow(B)$ (3.32)

補助定理 3.2. $p_1, \cdots, p_n$: $p_i > 0$, $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$ 이고

$q_1, \cdots, q_n$: $q_i > 0$, $\sum_{i=1}^{n} q_i = 1$ 이면

$$\sum_{i=1}^{u} p_i \log \frac{p_i}{q_i} \geqq 0 \tag{3.33}$$

(증명은 [11] 참조)

단순한 경우 다음의 定理가 成立함을 보이자.

定理 3.6. $I(\tilde{x}) \geqq I(\tilde{z})$ 되기 위한 充分條件은 $e(\tilde{z})$가 $e(\tilde{x})$로 부터의 傳達情報이다.

(證明) 補助定理 3.1에 의하여 $(G) \Rightarrow I(\tilde{x}) \geqq I(\tilde{z})$ 임을 증명하면 된다.
(1·6)式에 의하여

$m(\tilde{z}|\xi) \geqq m(\tilde{x}|\xi)$ 즉 $m(\tilde{z}|\xi) - m(\tilde{x}|\xi)$가 모든 ξ에 對하여 成立함을 밝히면 된다. 定義에 의하여

$$\begin{aligned} m(\tilde{x}|\xi) &= \sum_{j=1}^{2} H(f(s_i|x_j))f(x_j) \\ &= \sum_{j=1}^{2} \left(-\sum_{i=1}^{2} f(s_i|x_j) \log f(s_i|x_j) \right) f(x_j) \\ &= -\sum_{j=1}^{2} \sum_{i=1}^{2} f(x_j) f(s_i|x_j) \log f(s_i|x_j) \\ &= -\sum_{j=1}^{2} \sum_{i=1}^{2} f(s_i, x_j) \log f(s_i|x_j) \end{aligned} \tag{3.34}$$

이다. 그러므로

$$\begin{aligned} m(z|\xi) - m(\tilde{x}|\xi) &= -\sum_{i=1}^{2} \sum_{k=1}^{2} f(s_i|z_k) \log f(s_i|z_k) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} f(s_i, x_j) \log f(s_i|x_j) \\ &= -\sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \sum_{k=1}^{2} f(s_i, x_j, z_k) \log f(s_i|z_k) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \sum_{k=1}^{2} f(s_i, x_j, z_k) \log f(s_i|x_j) \\ &= \sum_{i=1}^{2} \sum_{j=1}^{2} \sum_{k=1}^{2} f(s_i, x_j, z_k) \log \frac{f(s_i|x_j)}{f(s_i|z_k)} \end{aligned}$$

이다. 條件 (G)에 의하여

$$=\sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} f(s_i, x_j, z_k)\log\frac{f(s_i|x_j.z_k)}{f(s_i|z_k)}$$

$$=\sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2} f(x_j, z_k)\left\{\sum_{i=1}^{2} f(s_i|x_j, z_k)\log\frac{f(s_i|x_jz_k)}{f(s_i|z_k)}\right\}$$

〔 〕는 補助定理 3.2에 의하여 零보다 크거나 같다. 그러므로 모든 ξ에 대하여 항상

$$m(\tilde{z}|\xi)-m(\tilde{x}|\xi)\geqslant 0 \tag{3.35}$$

이다. 定理 3.2.와 定理 3.6.을 결합하면 다음의 것을 얻는다.

定理 3.7. $e(\tilde{z})$가 $e(\tilde{x})$의 傳達情報이면 $V(\tilde{x})\geqslant V(\tilde{z})$이다.

여기서 等式이 成立하는 경우는 $B=\|\beta_{jk}\|$가 單位行列이 되는 경우다. 通信理論의 언어를 빌리면 傳達機構가 雜音이 없는 通信路와 一致하는 경우이다. 定理 3.6과 定理 3.7은 우리의 常識과 符合한다. 즉 傳達情報란 原情報에 비하면 항상 價値面에서나 量的인 면에서 적다는 것을 말해준다.

§4. 結 論

두 개의 情報를 가지는 單純한 경우에 情報量과 情報價値의 比較에서 여러가지 흥미 있는 결과를 얻었다. 通報가 많아지면 (1.6)式에서 알 수 있듯이 情報量은 점점 더 커진다. 어떤 속도로 커지는가에 對해서는 Rényi [5] [6]에 잘 나타나 있다. 情報價値에 있어서도 (1.8)式을 보면 마찬가지나, 서론에서 언급했듯이 情報를 收集하는데는 情報費用이 들므로 만일 정보비를 가산한다면 情報價値의 比較는 意思決定者에 있어 중요한 역할을 한다. 이상의 결과를 보면 대개 情報價値가 크면 情報量도 크다는 것을 알 수 있다. 두 개의 정보 가운데 情報量이 큰 것을 택할 것인가 情報價値가 큰 것을 택할 것인가를 생각해 보면 情報水準의 目的은 거의 利害關係에 結付되므로 情報價値가 큰 것을 택함이 더 바람직하다고 본다. 損失函數 대신 効用函數로 情報價値를 定義해도 거의 같은 결과를 얻음을 부기하고 싶다.

References

[1] M.H. DeGroot., *Uncertainty, Information, and Sequential Experiments*, Ann. Math Stat., Vol. 32 (1962).

[2] 〃 , *Optimal Statistical Decisions*, McGraw Hill Book Co., (1970).

[3] Jacob Marschak and Koichi Miyasawa., *Economic Comparability of Information Systems*, International Economic Review, Vol. 2 (1968).

[4] Koichi Miyasawa., *Information Value and the Entoropy Formulas*, (To be Presented at the Second World Congress of the Econometric Society in Cambridge, England: September, 1970).

[5] A, Rényi., *On the Amount of Information and the Neyman-Pearson lemma*, Festschrift for J. Neyman, Wiley 1966, pp. 281—288.

[6] 〃 , *On some basic problems of statistics from the point of view of information theory*, Proc. of Fifth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, University of California Press (1967).

[7] Blacwell,David., *Comparison of Experiments*, in J. Neyman, ed., Proc. of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probabaility (Berkley: University of Cahifornia Press, 1951) 93—102.

[8] Lindley, D. V., *On a Measure of the Information Provided by an Experiment*, Ann. Math. Stat. Vol. 27 (1956).

[9] Shannon, C.E., *A Mathematical Theory of Communication*, Bell System Technical Journal, Vol. 14, (1943).

[10] Raiffa., *Decision Analysis*, Addison-Wesley (1968).

[11] Ash, R., *Informaion Theory*, NewYork: John Wiley & Sons, Inc., (1965).

서울대학교 공과대학