技術解說

電磁界의 Mode 解析 및 合成

正會員 羅 正 雄*

Model Analysis and synthesis of Electromagnetic Fields

Ra, Jung-Woong, *Member*

1. 서 론

세계 2차 대전중 Radar를 발전시키기 위한 연구 결과중 J. Schwinger[1]를 중심으로 발전된 電磁界의 Modal Analysis and Synthesis(Mode의 解析 및 合成) 방법은 Microwave 回路素子로 사용되는 Waveguide(導波管) 內 不連續點 혹은 內部物體에 의하여 散亂되는 電磁界의 解析을 위해 사용되어 왔다. 여러가지 導波管문제에 이 방법을 응용한 예는 N. Marcuvitz의 Waveguide Handbook[2]으로 출판되었으며, 그 외에도 많은 電磁界의 境界値문제 解析에 우월성을 보여왔다[3]

임의의 領域에서 주어진 境界條件을 만족시키는 電磁界를 계산하는데는 여러 방법이 있을 수 있다. Maxwell 方程式과 주어진 境界條件 및 初期條件을 만족시키기만 하면 문제의 解가 되기때문이다. Vector 量인 電磁界는 임의로 선정한 傳播方向의 成分과 이와 直交하는 斷面方向 成分의 和로 표시할 수 있다. 일반적으로 傳播方向 成分의 電磁界는 斷面方向 成分에 의해 완전히 特定지워 진다. 電磁界源(Source)이 없는 임의의 斷面에서 주어진 境界條件을 만족하는 解를 固有函數(Eiqenfunction)라 한다. 電磁界 문제에서 잘 알려진 固有函數로는 平面波 函數, 圓壔波 函數 및 球面波 函數를 들 수 있다. 斷面成分의 電磁界는 일반적으로 무수히 많은 平面波 固有函數 또는 圓壔波 固有函數등의 重疊(Superposition)으로 表示(Represent)할 수 있다. 이러한 固有函數를 工學用語化하여 Mode 函數라 부른다.

임의의 斷面에서 주어진 境界條件을 만족시키는 Mode 函數를 求했다고 가정할 때, 이 面에서의 電磁界를 求하는 문제는 곧 各 Mode의 振幅係數를 求하는 문제가 된다. 이렇게 各 Mode의 振幅係數를 결정하는 문제를 Mode 解析이라 부른다. Vector 電磁界를 표시하기 위해 vector mode 函數를 선택하면, 振幅係數는 Scalar 量이 되며 傳送線式에서 求할 수 있게 된다. 이렇게 各 Mode의 振幅係數를 傳送線式에서 求하면 구하려 하는 電磁界는 모든 Mode의 合成으로 얻어지게 된다.

2. 기본 개념

임의의 斷面을 가진 壔形領域이 導體로 둘러싸였을때 電磁界를 생각하자.

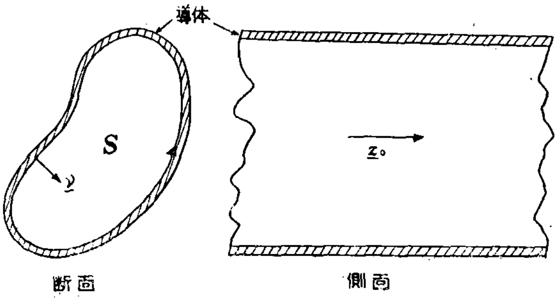

그림 1. 임의의 단면을 가진 導波管

* 韓國科學院
Korea Advanced Inst. of science.

그림 1에서 보인바와 같이 傳播方向을 z, 이와 直交하는 斷面座標를 vector ρ로 표시한다. z方向의 電磁界는 E_z 및 H_z라 하고 이들의 斷面成分을 각각 E_t 및 H_t라 한다. 임의의 점에서 電磁界는 時間및 空間座標의 函數이다. 따라서 電磁界를 表示하는데는 일반적으로 空間 固有函數뿐만 아니라 時間 固有函數의 重疊이 필요하게 된다.

주어진 문제에 있어서 時間및 空間의 對稱性은 문제를 간단히 풀 수 있는 중요한 요소이다. 固有函數 즉 mode 函數를 구할 平面 혹은 曲面을 선택 잘못하면 상호독립이 될 各 mode의 振幅係數가 상호종속이 될 수 있다. 이러한 경우 문제의 解를 얻기란 용이치 못하다. Maxwell 方程式은 時間變位에 대해 不變이므로 電磁界를 時間調和函數(time harmonic) 項인 $e^{j\omega t}$와 空間座標에 의존하는 項의 곱으로 나타낼 수 있다. 여기서 ω는 角周波數이다. 또한 壔形領域에서는 境界條件이 z軸에 독립이므로 電磁界 方程式이 z 變位에 대해 不變이며 電磁界의 z依存 項을 分離시킬 수 있다. 따라서 電磁界의 各 mode는 斷面座標에만 의존하는 vector 型이 되며, 이는 時間 t 및 z軸에 독립이다.

이러한 斷面座標에 의존하는 mode 函數는 境界面의 형태에 따라 다른 解를 갖는다. z軸上 임의의 점에서 境界面의 형태가 特定되면 mode 函數가 결정되며, 電磁界의 문제는 앞서 기술한바와 같이 1) 各 mode의 振幅係數를 결정하는 문제(mode 解析)와 2) mode의 重疊에 의한 電磁界의 계산(mode 合成)으로 환원된다. 이러한 mode의 解析및 合成은 수학적으로 말할때 變換定理(transformation theorem)에 의한다. 즉 임의의 波形은 대응하는 spectrum 函數의 振幅係數들에 의해 결정된다. 주어진 문제에 적절한 mode 函數는 斷面에서의 境界條件을 만족시키며, z軸上의 境界條件은 各 mode의 振幅係數에 의해 만족되며 진폭계수를 얻기 위해서는 各 mode 函數를 spectrum 函數로 變換시킨다. 결과적으로 얻어지는 振幅係數의 관계식은 傳送線式이 되며, 時間및 空間座標에 의존하는 vector 電磁界의 문제를 잘 알려진 回路문제로 대치시킬 수 있게 된다.

위에서 설명한 개요를 數式을 사용하여 생각해 보기로 하자. 電磁界의 各 mode를

$$e(\rho,\ k_t)\ e^{j\omega t}$$
$$h(\rho,\ k_t)\ e^{j\omega t}$$

라 하자. 여기서 ρ와 ω는 앞에서 정의된 바와 같이 斷面座標와 角周波數를 表示하며, k_t는 斷空間의 週期를 표시한다. vector mode 函數 e와 h는 電磁界 斷面成分이 斷面座標에 의존함을 보이며, $e^{j\omega t}$는 이 成分의 時間依存特性을 보인다. ω와 k_t는 各各 各 mode의 時間週期와 空間週期를 표시하며, k_t는 斷面을 特定지우는 두개의 常數에 의해 결정된다.

z軸上 임의의 점에서 斷面 電磁界成分의 mode 振幅係數를

$$V(z;\ \omega, k_t),$$
$$I(z;\ \omega,\ k_t)$$

라 표시하고, 이를 周波數 (ω, k_t)에 해당되는 定常狀態의 "電壓"및 "電流"라 定義한다. 이 mode 成分의 斷面成分 電磁界는 임의의 時間및 空間 $(r,\ t)$에서

$$V(z;\ \omega,\ k_t)\quad e(\rho;\ k_t)\ e^{j\omega t}$$
$$I(z;\ \omega, k_t)\qquad h(\rho;\ k_t)\ e^{j\omega t}$$

로 표시할 수 있다. mode 函數 e 및 h가 z方向으로 不變이므로 傳播方向으로의 傳送特性은 振幅係數인 V 및 I가 규정짓는다. 傳送方向으로 進行하는 電力은 斷面成分의 電界와 磁界를 cross product 하여 얻을 수 있으며, 특히 規格化(normalization)가 적절한 mode 函數를 선택할 경우 아래와 같이 계산된다.

$$P=Re(VI^*).$$

여기서 Re는 實數部分을, $*$는 complex conjugate를 의미한다. 이는 回路網 解析에서 사용되는 電壓및 電流의 定義와 동일함을 보여준다.

위에 설명한 바와 같이 문제에 적절한 mode函數가 구해졌을때, 電磁界를 결정하는 문제는 곧 mode의 電壓및 電流 V와 I를 구하는 mode 解析문제가 된다. 電界 및 磁界가 Maxwell 方程式을 만족시키는 것은 곧 V와 I가 波動性質을 갖고 傳送線式을 만족시킴을 의미한다. 결과적으로 V 및 I를 결정하는 문제는 잘 알려진 傳送線 문제가 된다. 이렇게 z 方向으로 送傳되는 mode 波는 傳播性質에 따라 傳播波및 非傳播波로 구분할

수 있다. 傳播波 mode 는 주어진 振幅으로 傳送方向으로 進行되는 반면, 非傳播波 mode 의 振幅은 波源으로 부터 멀어갈수록 감쇄되어 far field 에서는 생략할 수 있게 된다. 따라서 非傳播波 mode 는 波源부근에 집중 된다. 非傳播波 mode 數는 항상 무수히 많은데 반해, 傳播波 mode 數는 약간수 혹은 무한대로 존재한다. 일반적으로 많이 사용되는 기기에서는 單一 mode 의 傳播波만이 존재한다. 導波管 內에서 電磁界문제를 푸는데는 傳播波 mode 만이 존재하는 영역과 傳播波및 非傳播波 mode 가 동시에 존재하는 영역을 구분함이 편리하다.

振幅係數 V 및 I 를 결정하는 立體(distributed) 回路網 문제를 낮은 저주파 lumped 回路網 문제와 비교해 보기로 하자. Lumped 回路網에서는 單一 空間 mode 만이 傳播되며, 이 mode 의 電壓 및 電流는 Coil, Condenser 등 回路素子를 연결하는 電線에 傳送되는중에 變하지 않게 되는데 이는 그 電線의 길이가 波長에 비해 대단히 짧기 때문이다. 이러한 회로에서는 素子의 端點이 정확히 정의되며, 이 端點에서 電壓및 電流의 關係는 回路素子의 電力特性을 완전히 결정지워 준다 그러나 고주파대에서 사용되는 立體 回路網에서는 mode 의 電壓과 電流가 回路素子(window 등)를 연결하는 導波管 傳送도중 계속 變한다. 따라서 回路素子의 정확한 위치를 z 軸上에 정의하여야 하며, 이 端點에서 뿐 아니라, 導波管內에서의 電壓 電流 特性도 동시에 고려하여야 한다. 만일 이러한 導波管內에 單一 mode 만이 존재한다면 window 등 回路素子에서 충분히 떨어진 점에서의 電磁界는 이 單一 mode 의 電壓 및 電流만으로 특정지워지며 따라서 電力등 제반 특성이 간단히 결정된다.

임의의 점에서 電磁界를 表示하는 문제는 mode 의 合成문제이다. 예를 들어 波源을 직접 접하는 부분 혹은 window 등 不連續 回路素子에서의 電磁界는 모든 傳播波 mode 및 非傳播波 mode 를 綜合 重疊하여 얻게된다. 저주파대의 回路素子에서는 통상 空間 mode 의 電流 電壓을 素子端에서 측정, 電力등 제 특성을 계산하게 되는데 여기서 mode 合成문제는 주로 單一 空間 mode 의 時間 t에 대한 重疊(예; transient 문제)이 되겠다. 일반적으로 電磁界의 계산문제에는 많은 空間 mode 의 合成문제 뿐만 아니라 時間 mode 의 合成문제도 중요하다. 그러나 여기서는 空間 mode 의 解析및 合成만을 생각하려 한다.

3. Mode의 解析및 合成[4)]

時間에 對한 mode 의 解析및 合成은 일반 回路網 理論등에서 많이 사용되어왔으며 현금에는 pulse 의 傳播문제, dispersive medium 에서의 電磁波 傳播[5)] 문제등에 많이 이용된다. 여기서는 電界源혹은 磁界源이 주어졌을때 定常狀態의 電磁界를 결정하는 문제에 국한하려 한다. 또한 傳送方向인 z 에 直交하는 斷面이 z 의 값에 관계없이 균일한 문제에 국한하겠다. 물론 균일치 않은 斷面문에도 같은 방법에 의해 해석되지만, 여기서는 생략한다. 電磁界 $\boldsymbol{E}$ 와 $\boldsymbol{H}$ 는 maxwell 方程式을 만족시킨다:

$$\left.\begin{array}{l} \nabla\times\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})=-j\omega\mu\ \boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})-\boldsymbol{M}(\boldsymbol{r}), \\ \nabla\times\boldsymbol{H}(\boldsymbol{r})=j\omega\epsilon\ \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r})+\boldsymbol{J}(\boldsymbol{r}), \quad \boldsymbol{r}=(\rho,z) \end{array}\right\} \quad (1)$$

여기서 $\boldsymbol{M}$ 및 $\boldsymbol{J}$ 는 주어진 磁界源및 電界源, ϵ 와 μ 는 誘電率(dielectric constant) 및 誘磁率(permeability)을 표시한다. 앞서 기술한대로 복소시간 함수 $e^{j\omega t}$ 를 사용한다. 만일 電磁界源이 時間調和函數에 따른 변화가 아닐때 電磁界 계산에는 各時間周波數成分의 合成이 필요하다.

境界面을 導體라고 가정하면 境界面에서 接線成分(tangential component)의 電界는 영이 된다 즉 斷面을 S 라 하고 S 를 둘러싼 曲線을 s 라 할때 s 上에서

$$\nu\times\boldsymbol{E}=0 \quad (2)$$

여기서 ν 는 s 上에서 法線(normal)方向 單位 vector 이다(그림 1 참조). 境界條件 (2)는 곧 磁界 $\boldsymbol{H}$ 의 法線成分이 영이 됨을 의미하며 境界面이 없는 경우 無限點에서의 radiation 條件이 된다. z 軸上 端點에서의 境界條件은 傳送線式의 解를 구할때 이용될 것이다.

電磁界를 z 方向 成分과 斷面成分으로 나누어 생각해보면, z 方向 成分은 斷面成分에 종속됨을 보일 수 있다. 이를 증명하기 위하여 傳送方向 單位 vector z_0와 식(1)의 첫째식과 vector product 및 scalar product 를 취하면 아래와 같이 된다.

$$j\omega\mu\ \boldsymbol{H}\times z_0+\boldsymbol{M}\times z_0=z_0\times(\nabla\times\boldsymbol{E})$$
$$=-\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{E}+\nabla E_z$$
$$=-\frac{\partial}{\partial z}(z_0E_z+\boldsymbol{E}_t)+(\nabla_t+z_0\frac{\partial}{\partial z})E_z$$
$$=\nabla_tE_z-\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{E}_t, \tag{3a}$$
$$-j\omega\mu H_z-M_z=z_0\cdot(\nabla\times\boldsymbol{E})=-\nabla_t\cdot(z_0\times\boldsymbol{E}) \tag{3b}$$

여기서 斷面 gradient operator $\nabla_t\equiv\nabla-z_0\frac{\partial}{\partial z}$이다. 같은 방법으로 식 (1)의 둘째식으로 부터

$$j\omega\epsilon\ z_0\times\boldsymbol{E}+z_0\times\boldsymbol{J}=\nabla_tH_z-\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{H}_t, \tag{4a}$$
$$j\omega\epsilon E_z+J_z=\nabla_t\cdot(\boldsymbol{H}\times z_0) \tag{4b}$$

를 얻는다. 식 (4b)에서 E_z를 구하여, 식 (3a)에 대입하면

$$-\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{E}_t=j\omega\mu\ \boldsymbol{H}_t\times z_0-\frac{1}{j\omega\epsilon}[\nabla_t\nabla_t\cdot\boldsymbol{H}_t\times z_0-\nabla_tJ_z]+\boldsymbol{M}_t\times z_0$$
$$=jw\ \mu\left(\mathbf{1}+\frac{\nabla_t\nabla_t}{k^2}\right)\cdot(\boldsymbol{H}_t\times z_0)+\boldsymbol{M}'_t\times z_0 \tag{5a}$$

을 얻으며, 같은 방법으로 식 (3b)와 (4a)로 부터

$$-\frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{H}_t=j\omega\epsilon\left(\mathbf{1}+\frac{\nabla_t\nabla_t}{k^2}\right)\cdot(z_0\times\boldsymbol{E}_t)+z_0\times\boldsymbol{J}'_t \tag{5b}$$

를 얻는다. 여기서

$$\boldsymbol{J}'_t=\boldsymbol{J}_t-z_0\times\frac{\nabla_t M_z}{j\omega\mu}=\boldsymbol{J}_t+\frac{\nabla_t\times \boldsymbol{M}_z}{j\omega\mu}, \tag{5c}$$
$$\boldsymbol{M}'_t=\boldsymbol{M}_t+z_0\times\frac{\nabla_t J_z}{j\omega\epsilon}=\boldsymbol{M}_t-\frac{\nabla_t\times\boldsymbol{J}_z}{j\omega\epsilon}, \tag{5d}$$

이며, $k=\omega\sqrt{\mu\epsilon}$는 주어진 영역의 wavenumber이고, $\mathbf{1}$은 $\mathbf{1}\cdot A=A\cdot\mathbf{1}=A$를 만족시키는 單位 dyadic 이다.

이상 보인바와 같이 Maxwell 方程式 (1)은 斷面成分의 관계식 (5)에 의해 만족되며, z 成分의 電磁界는 斷面成分을 구한후 (3b)와 (4b)로 부터 구할 수 있다.

개요에서 설명한 바와 같이 斷面成分電磁界는 固有函數 또는 mode 函數의 重疊에 의하여 表示할 수 있다. 固有函數 혹은 mode 函數란 電磁界源이 없는 斷面에서 주어진 境界條件을 만족시키는 解이다. 一群을 이루는 固有函數는 直交性(orthogonality)과 完全性(completeness)을 구비한다. $z=z$인 斷面에서 한개의 mode 函數에 해당되는 斷面成分 電磁界를 아래와 같이 가정할 수 있다.

$$\boldsymbol{E}_{ti}(\rho,z)=\boldsymbol{e}_i(\rho)e^{-j\kappa_iz} \tag{6a}$$
$$\boldsymbol{H}_{ti}(\rho,z)=Y_i\boldsymbol{h}_i(\rho)e^{-j\kappa_iz} \tag{6b}$$

여기서 斷面成分을 斷面座標 ρ에만 의존하는 vector mode 函數 $\boldsymbol{e}$ 및 $\boldsymbol{h}$와, 傳送方向 z에 의존하는 函數의 곱으로 표시하였다. i는 各 mode를 나타내며 二次元의 斷面문제임으로 double index가 된다. Y_i는 $\boldsymbol{e}$와 $\boldsymbol{h}$를 관계지어주는 常數이며 κ_i는 固有値이다. 固有函數의 定義에 따라 식 (5)의 $\boldsymbol{J}$ 및 $\boldsymbol{M}$을 영으로 놓고 식(6)을 이에 대입시키면

$$j\kappa_i\boldsymbol{e}_i(\rho)=j\ \omega\mu Y_i\left(\mathbf{1}+\frac{\nabla_t\nabla_t}{k^2}\right)\cdot(\boldsymbol{h}_i\times z_0), \tag{7a}$$
$$j\kappa_i Y_i\ \boldsymbol{h}_i(\rho)=j\omega\epsilon\left(\mathbf{1}+\frac{\nabla_t\nabla_t}{k^2}\right)\cdot(z_0\times\boldsymbol{e}_i) \tag{7b}$$

를 얻는다. 식 (7)은 4차 미분방정식으로 e_i 및 h_i 의 解를 구하기가 용이치 못하다. 그러나 임의의 vector를 irrotational vector와 solenoidal vector의 和로 표시할 수 있는 vector 정리를 이용할 수 있으며, 이를 위하여 e 및 h 를 아래와 같이 두 vector의 和로 표시한다.

$$e_i(\rho)=e_i'(\rho)+e_i''(\rho), \tag{8a}$$

$$h_i(\rho)=h_i'(\rho)+h_i''(\rho) \tag{8b}$$

斷面 S 內에서 h_i'' 이

$$\nabla_t\times h_i''=0 \tag{9}$$

을 만족한다고 가정하자. 이 가정 아래서

$$\nabla_t\cdot(h_i''\times z_o)=z_o\cdot(\nabla_t\times h_i'')=0 \tag{10}$$

이 되므로, 식 (7a)에서

$$e_i''=\frac{Y_i''}{æ_i''}\omega\mu\, h_i''\times z_o=h_i''\times z_o,\ Y_i''\equiv\frac{æ_i''}{\omega\mu} \tag{11}$$

를 얻는다. 또한 식 (11)의 관계를 식 (10)에 대입하면

$$\nabla_t\cdot e_i''=0 \tag{12}$$

를 얻게 되는데 이는 식(9)와 같은 조건이다. 식 (11)의 관계를 식 (7b)에 대입시켜 h_i''에 대해 풀면

$$\nabla_t\nabla_t\cdot h''_i+k_{ti}''^2 h_i''=0,\ k_{ti}''^2=k^2-æ_i''^2 \tag{13}$$

을 얻는다. 이러한 vector mode h_i'' 및 e_i''에 의한 z 成分의 電磁界는 식 (3b)와 (4b)로부터

$$h_{zi}''=\frac{\nabla_t\cdot h_i''}{j\omega\mu}, \tag{14a}$$

$$e_{zi}''=\frac{1}{j\omega\epsilon}\nabla_t\cdot(h_i''\times z_o)=0 \tag{14b}$$

이 된다. 위에서 본바와 같이 電界 mode 成分中 solenoidal vector 成分인 e_i'' 및 이에 해당되는 h_i''는 電界의 z 成分을 영으로 만든다. 따라서 이러한 mode를 transverse electric(TE) 혹은 H mode라 부른다. H mode에 대한 境界條件은 식 (2)로부터

$$\nu\times e_i''=0 \tag{15}$$

으로 충분하다.

e_i''을 solenoidal vector로 정의했으므로 e_i' 은 S 內에서 irrotational vector 성분으로 정의되어야 할 것이다. 즉

$$\nabla_t\times e_i'=0 \tag{16}$$

식 (16)은 식 (10)과 같은 관계를 성립 시키므로 식 (7b)는

$$h_i'=z_o\times e_i',\quad Y_i'=\frac{\omega\epsilon}{æ_i'} \tag{17}$$

이 되며, 식 (12)와 같은 이유에서

$$\nabla_t\cdot h_i'=0 \tag{18}$$

이 된다. 식(13)에 해당되는 식은 식(7a)로 부터

$$\nabla_t\nabla_t\cdot e_i'+k_{ti}'^2 e_i'=0,\ k_{ti}'^2=k^2-æ_i'^2 \tag{19}$$

가 된다. 따라서 z 成分의 電磁界는 식 (3b) 및 (4b)로 부터

$$h_{zi}'=\frac{\nabla_t\cdot h_i'}{j\omega\mu}=0, \tag{20a}$$

$$e_{zi}'=\frac{\nabla_t\cdot(h_i'\times z_o)}{j\omega\epsilon}=\frac{\nabla_t\cdot e_i'}{j\omega\epsilon} \tag{20b}$$

이 되며 z 成分의 磁界가 영이 된다. 이러한 mode를 transverse magnetic(TM) 혹은 E mode 라 부른다. E mode의 境界條件은 電界의 z 成分이 영이 아니므로 다음의 두 조건으로 표시된다. 즉 s 위에서

$$\nu\times e_i'=0, \tag{21a}$$

$$\nabla_t\cdot(h_i'\times z_o)=0 \tag{21b}$$

(9)식과 (16)식에 표시한 바와 같이 h_i''과 e_i'은 irrotational vector 임으로 scalar potential φ_i 및 ϕ_i 의 gradient로 다음과 같이 표시할 수 있다

$$h_i''(\rho)=-\frac{\nabla_t\,\varphi_i(\rho)}{k_{ti}''} \tag{22a}$$

$$e_i'(\rho)=-\frac{\nabla_t\,\phi_i(\rho)}{k_{ti}'} \tag{22b}$$

여기서 斷面 wave number 는 規格化 常數로 사용하였다. 식 (22)를 식(13)과 (19)에 각각 대입하면 S 內에서

$$\nabla_t^2\varphi_i+k_{ti}''^2\varphi_i=0 \tag{23a}$$

$$\nabla_t^2\phi_i+k_{ti}'^2\phi_i=0 \tag{23b}$$

을 얻으며, h_i'' 및 e_i' 의 정의에 따라 φ_i를 H mode scalar potential ϕ_i를 E mode scalar potential이라 부른다. 또한 e_i 및 h_i가 vector 固有函數이므로 φ_i와 ϕ_i를 scalar 固有函數라고도 부른다. 이들 scalar 固有函數에 對한 境界條件은 식 (15)로 부터

$$0=\nu\times z_o\times(\nabla_t\varphi_i)$$
$$=z_o(\nu\cdot\nabla_t\varphi_i)=z_o\frac{\partial\varphi_i}{\partial\nu},$$

즉 H mode에 대해서는 s 위에서

$$\frac{\partial \varphi_i}{\partial \nu}=0 \qquad (24)$$

이 되며, 식(21), (22b)및 (23b)로 부터 E mode의 境界條件으로는 두개의 조건

$$\phi_i=0, \quad k_{ti}'\neq 0, \qquad (25a)$$

$$\frac{\partial \phi_i}{\partial s}=0, \quad k_{ti}'=0 \qquad (25b)$$

을 얻는다. 조건 (25b)는 $k_{ti}'=0$의 경우로서 $\kappa_i'=k$가 되며, 따라서 transverse electric and magnetic(TEM) mode를 가진다. 이 경우 경계면 s 위에서 ϕ_i=常數가 되어 靜電界 條件이 된다. 이러한 例로는 同軸 cable을 들 수 있다. Scalar 固有函數를 결정하는 미분방정식 (23)은 Helmholtz 方程式이라 알려져 있으며, 경계조건 (24)와 (25a)는 φ_i의 문제가 Neumann 境界値 문제, ϕ_i는 Dirichlet 境界値 문제임을 각각 보여준다. 여러가지 斷面을 가진 導波管에 대한 ϕ와 φ의 解는 Waveguide Handbook[2)]에 수록되어 있다.

위에서 기술한 vector 및 scalar 固有函數는 直交性을 가짐을 보일 수 있다. Vector 恒等式인

$$\nabla_t\cdot[A\nabla_t\cdot B]=(\nabla_t\cdot A)(\nabla_t\cdot B)+A\cdot\nabla_t\nabla_t\cdot B \qquad (26)$$

에서 vector A와 B를 교환하고 그 차를 구하면

$$\nabla_t\cdot\{A\nabla_t\cdot B-B\nabla_t\cdot A\} = A\cdot\nabla_t\nabla_t\cdot B-B\cdot\nabla_t\nabla_t\cdot A \qquad (27)$$

을 얻는다. 식 (27)에 A 대신 e_i'를 B 대신 $e_j'^*$를 대입하고 斷面에서의 積分을 취한후 vector 發散의 定理를 左項에 적용하면

$$\int_s\{e_i'\nabla_t\cdot e_j'^*-e_j'^*\nabla_t\cdot e_i'\}\cdot\nu d_s = \int_S\{e_i'\cdot\nabla_t\nabla_t\cdot e_j'^*-e_j'^*\cdot\nabla_t\nabla_t\cdot e_i'\}dS \qquad (28)$$

을 얻는다. 境界面에서 接線方向 電界는 영이 되므로 法線方向 單位 vector ν와의 scalar product은 영이 되며, 따라서 (28)식의 左項은 영이 된다. 식 (19)의 관계를 (28)식의 右項에 대입하면

$$(k_{ti}'^2-k_{tj}'^{*2})\int_S e_i'\cdot e_j'^*dS=0 \qquad (29)$$

이 되어 vector mode e_i'의 直交性을 보여 준다. (27)식에 $A=h_i''$과 $B=h_j''^*$을 대입하고 같은 방법으로 전개하면 비슷한 直交關係를 얻을 수 있으며, 規格化된 vector mode 函數를 취했다면

$$\int_S e_i'\cdot e_j'^*dS=\delta_{ij}=\int_S e_i''\cdot e_j''^*dS, \qquad (30a)$$

$$\int_S e_i'\cdot e_j''^*dS=0 \qquad (30b)$$

을 얻게 되며 h에 대해서도 동일한 관계식을 얻을 수 있다. 여기서 δ_{ij}는 Kronecker delta 로서

$$\delta_{ij}=\begin{cases}1, & i=j\\ 0, & i\neq j\end{cases} \qquad (31)$$

(26)및 (27)식에서 $\nabla_t\cdot[A\nabla_t\cdot B]$대신 $\nabla_t\cdot[\phi_i\nabla_t\phi_j^*]$를 대입하고 동일한 전개를 하면 scalar mode에 관한 直交關係식을 얻을 수 있다. 즉

$$\int_S\phi_i\phi_j^*dS=\delta_{ij}=\int_S\varphi_i\varphi_j^*dS, \qquad (32a)$$

$$\int_S\varphi_i\phi_j dS=0 \qquad (32b)$$

주어진 斷面 및 境界面에서의 조건을 만족시키는 vector mode의 完全한 一群을 구했다면, 電磁界의 斷面成分은 이들 mode의 重疊에 의하여 다음과 같이 표시 할 수 있다.

$$\boldsymbol{E}_t(\boldsymbol{\rho},z)=\sum_i V_i'(z)\boldsymbol{e}_i'(\boldsymbol{\rho}) +\sum_i V_i''(z)\boldsymbol{e}_i''(\boldsymbol{\rho}), \qquad (33a)$$

$$\boldsymbol{H}_t(\boldsymbol{\rho},z)=\sum_i I_i'(z)\boldsymbol{h}_i'(\boldsymbol{\rho}) +\sum_i I_i''(z)\boldsymbol{h}_i''(\boldsymbol{\rho}), \qquad (33b)$$

$$\boldsymbol{M}'_t(\boldsymbol{\rho},z)\times \boldsymbol{z}_o=\sum_i v'_i(z)\boldsymbol{e}_i'(\boldsymbol{\rho}) +\sum_i v_i''(z)\boldsymbol{e}_i''(\boldsymbol{\rho}), \qquad (33c)$$

$$\boldsymbol{z}_o\times \boldsymbol{J}'_t(\boldsymbol{\rho},z)=\sum_i i_i'(z)\boldsymbol{h}_i'(\boldsymbol{\rho}) +\sum_i i_i''(z)\boldsymbol{h}_i''(\boldsymbol{\rho}) \qquad (33d)$$

이러한 관계를 식 (3b) 및 (4b)에 대입하여 z成分의 電磁界를 얻게 되는데 E_z成分은 E mode로서, H_z成分은 H mode로서만 나타낼 수 있다. 즉

$$j\omega\epsilon E_z(\boldsymbol{r})+J_z(\boldsymbol{r}) =\sum_i I_i'(z)\nabla_t\cdot\boldsymbol{e}_i'(\boldsymbol{\rho}), \qquad (34a)$$

$$j\omega\mu H_z(\boldsymbol{r})+M_z(\boldsymbol{r}) =\sum_i V''_i(z)\ \nabla_t\cdot\boldsymbol{h}_i''(\boldsymbol{\rho}) \qquad (34b)$$

逆으로 斷面成分의 電磁界源 및 電磁界가 주어졌다면 mode의 振幅係數는 아래와 같이 계산된다.

$$V_i(z)=\int_S \boldsymbol{E}_t(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{e}_i^*(\boldsymbol{\rho})dS, \qquad (35a)$$

$$I_i(z)=\int_S \boldsymbol{H}_t(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{h}_i^*(\boldsymbol{\rho})dS, \qquad (35b)$$

$$v_i(z)=\int_S \boldsymbol{M}_t'(\boldsymbol{r})\cdot\boldsymbol{h}_i^*(\boldsymbol{\rho})dS, \qquad (35c)$$

$$i_i(z)=\int_S J'_t(r)\cdot e_i^* dS. \qquad (35d)$$

여기서 ′과 ″을 생략하였는데 이유인즉 이식들은 두가지 mode에 다 같이 사용되기 때문에다. 특히 v_i 및 i_i는 (5)식에 주어진 電流 및 磁流와 vector 의 部分積分公式(二次元에서의 發散定理),

$$\int_S \nabla_t f\cdot A=-\int_S f\nabla_t\cdot A dS + \oint_s f(A\cdot\nu)ds, \qquad (36)$$

을 사용하고 境界條件인 $h_i\cdot\nu=0$ 과 $e_i\cdot\nu=0$ 및 $J_z=0$(실제로 境界面에 J_z 成分이 존재한다 해도 境界面이 導體임으로 映像電流의 極性이 반대로 되어 서로 상쇄되며, 결과적으로 電磁波 放射가 없다)의 조건을 사용하여 아래와 같이 구해진다.

$$v_i(z)=\int_S M(r)\cdot h_i^*(\rho)dS + Z_i^*\int_S J(r)\cdot e_{zi}^*(\rho)dS, \qquad (37a)$$

$$i_i(z)=\int_S J(r)\cdot e_i^*(\rho)dS + Y_i^*\int_S M(r)\cdot h_{zi}^*(\rho)dS \qquad (37b)$$

여기서

$$Y_i'' h_{zi}(\rho)=z_o\frac{\nabla_t\cdot h_i''(\rho)}{j\omega\mu},\quad h'_{zi}=0, \qquad (38a)$$

$$Z_i' e'_{zi}(\rho)=z_o\frac{\nabla_t\cdot e_i'(\rho)}{j\omega\epsilon},\ e''_{zi}=0 \qquad (38b)$$

이며 Y_i''은 H mode admittance로 식(11)에 정의되어 있으며 Z_i'은 E mode impedance로 식(17)에 정의된 Y_i'의 역수가 된다.

식 (33)의 mode 重疊 表現을 斷面成分 電磁界의 관계식 (5)에 대입하고, Σ와 微分의 차례를 서로 바꾸어 mode 函數 e_i 및 h_i의 振幅係數 관계식을 구하면

$$-\frac{dV_i}{dz}=j\kappa_i Z_i I_i+v_i, \qquad (39a)$$

$$-\frac{dI_i}{dz}=j\kappa_i Y_i V_i+i_i \qquad (39b)$$

이는 電壓 및 電流 V_i및 I_i에 관한 傳送線式이며 E mode및 H mode에 똑같이 적용된다. Mode 의 特性 impedance Z_i (admitlance Y_i) 및 mode의 傳播常數 κ_i는 식 (11), (13), (17)및 (19)에 정의 되어 있다.

이러한 傳送線式의 解를 구하는데 있어서 z軸上의 境界條件은 결정적인 역할을 한다. 이러한 경계조건은 傳送線兩端에서의 impedance 혹은 反射係數로 주어짐이 보통이다. 電磁界源이 點源이 아닐때 이에 의한 電壓 및 電流는, 點源에 의한 電壓 및 變流를 구하여 (Green 函數) 이를 電磁界源 體積에 대해 積分하여 구할 수 있다. 따라서 기본이 되는 문제는 곧 點電磁界源 문제가 된다.

이러한 관점에서 $r=r'$에 點 電磁界源

$$J=j\delta(r-r') = j\delta(\rho-\rho')\ \delta(z-z') \qquad (40a)$$

$$M=m\delta(r-r') = m\ \delta(\rho-\rho')\delta(z-z') \qquad (40b)$$

이 존재할 경우 各 mode의 振幅係數 V_i 및 I_i를 傳送線式을 통하여 구하고, 全體 電磁界를 구해보려 한다. 여기서 δ는 delta 函數이며 j와 m는 임의의 方向을 가진 常數 vector 이다. 식 (40)을 식 (37)에 대입하면 電磁界源의 mode 振幅係數 V_i와 I_i를 얻는다.

$$v_i(z)=\delta(z-z')\left[m\cdot h_i^*(\rho') \ j\cdot\left[z_o\nabla_t\cdot e_i'^*(\rho')\right]\frac{1}{j\omega\epsilon}\right. \qquad (41a)$$

$$i_i(z)=\delta(z-z')\left[j\cdot e_i^*(\rho') - m\cdot z_o\frac{\nabla_t\cdot h_i''^*(\rho')}{j\omega\mu}\right. \qquad (41b)$$

여기서 첫째항의 mode 함수는 v_i나 i_i의 mode에 따라가나, 둘째항은 E mode의 v_i'과 H mode의 i_i''에만 유효하다는 의미로 ′과 ″을 mode 함수에 사용하였다. 따라서 V_i와 I_i를 결정하는 문제는 電壓源 v_i 및 電流源i_i이 $z=z'$에 존재할 때의 傳送線문제(그림 2)가 된다. 그림 2에서 Z_T는 $z=z_1$ 혹은 $z=z_2$에서의 境界條件을 특정지우는 impedance 이다.

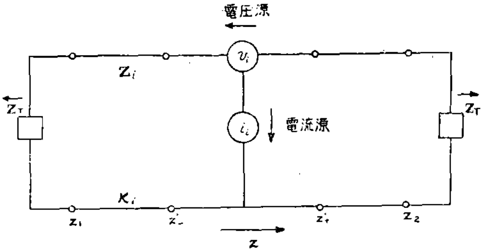

그림 2. 點電磁界 源문제의 등가회로

이러한 回路문제는 비교적 잘 알려져 있으므로 여기서는 간단히 결론만 말하려 한다. 電壓및 電流源 端子에서 電流및 電壓을 계산한 후 임의의 점 z에서 電壓및 電流를 계산하면 $z>z'$ 에서

$$V_i(z,z')=-\frac{1}{2}\left\{v_i\frac{\overrightarrow{Z}_i(z')+Z_i}{\overleftrightarrow{Z}_i(z')}+Z_i i_i\frac{\overrightarrow{Y}_i(z')+Y_i}{\overleftrightarrow{Y}_i(z')}\right\}\left\{e^{-j\kappa_i(z-z')}+\overrightarrow{\Gamma}(z')e^{j\kappa_i(z-z')}\right\} \quad (42a)$$

$$I_i(z,z')=-\frac{1}{2}\left\{i_i\frac{\overrightarrow{Y}_i(z')+Y_i}{\overleftrightarrow{Y}_i(z')}+Y_i v_i\frac{\overrightarrow{Z}_i(z')+Z_i}{\overleftrightarrow{Z}_i(z')}\right\}\left\{e^{-j\kappa_i(z-z')}-\overrightarrow{\Gamma}(z')e^{j\kappa_i(z-z')}\right\} \quad (42b)$$

$z<z'$ 에서는

$$V_i(z,z')=-\frac{1}{2}\left\{-v_i\frac{\overleftarrow{Z}_i(z')+Z_i}{\overleftrightarrow{Z}_i(z')}+Z_i i_i\frac{\overleftarrow{Y}_i(z')+Y_i}{\overleftrightarrow{Y}_i(z')}\right\}\left\{e^{j\kappa_i(z-z')}+\overleftarrow{\Gamma}(z')e^{j\kappa_i(z-z')}\right\} \quad (42c)$$

$$I_i(z,z')=-\frac{1}{2}\left\{-i_i\frac{\overleftarrow{Y}_i(z')+Y_i}{\overleftrightarrow{Y}_i(z')}+Y_i v_i\frac{\overleftarrow{Z}_i(z')+Z_i}{\overleftrightarrow{Z}_i(z')}\right\}\left\{e^{j\kappa_i(z-z')}-\overleftarrow{\Gamma}(z')e^{-j\kappa_i(z-z')}\right\} \quad (42d)$$

여기서 $Z_i(Y_i)$는 특성 impedance (admittance), $\overrightarrow{Z}_i(z')$ 및 $\overleftarrow{Z}_i(z')$는 $z=z'$ 점에서 오른편 방향및 왼편방향으로 본 impedance 이며, $\overleftrightarrow{Z}_i(z')=\overleftarrow{Z}_i(z')+\overrightarrow{Z}_i(z')$이다. 동일한 정의가 admittance $\overleftarrow{Y}_i(z')$ 및 $\overrightarrow{Y}_i(z')$에 적용되며 $\overleftrightarrow{Y}_i(z')=\overleftarrow{Y}_i(z')+\overrightarrow{Y}_i(z')$가 된다. $\overrightarrow{\Gamma}(z')$ 및 $\overleftarrow{\Gamma}(z')$은 z' 에서 각각 오른편 또는 왼편으로 본 電壓 反射係數이며

$$\overleftrightarrow{\Gamma}(z')=\frac{\overleftrightarrow{Z}_i(z')-Z_i}{\overleftrightarrow{Z}_i(z')+Z_i} \quad (43)$$

으로 주어진다.

따라서 여기 구한 mode 振幅 V_i 및 I_i로 부터 E_t와 H_t를 구한후 (식 (33a와 b)) E_z와 H_z를 구하게 된다 (식(3b) 및 (4b)). 그러나 보편

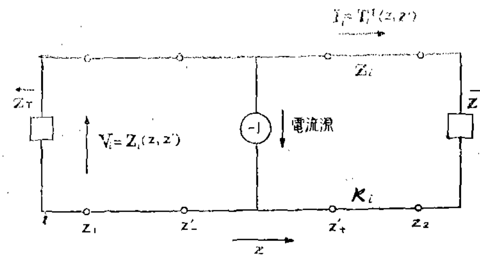

그림 3. 單位 電流源 回路

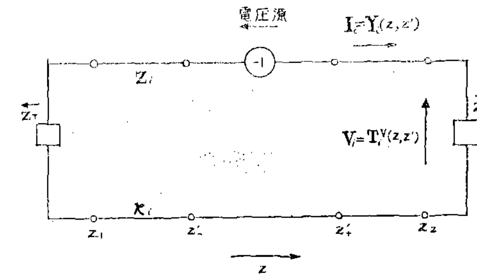

그림 4. 單位 電壓源 回路

성 있는 공식을 얻기 위하여 mode의 電壓 및 電流를 電流源에 의한 성분과 電壓源에 의한 성분으로 구분할 수 있다. 특히 그림 3과 4에 보인바와 같이 單位 電流源과 單位 電壓源에 의한 電壓 및 電流를 각각

$$V_i(z,z')\equiv Z_i(z,z'),\quad i_i=-\delta(z-z')\quad v_i=0, \quad (44a)$$

$$I_i(z\ z')\equiv T^i(z,z'),\quad i_i=-\delta(z-z'),\ v_i=0, \quad (44b)$$

$$V_i(z,z')=T^v(z,z'),\quad v_i=-\delta(z-z'),\ i_i=0, \quad (44c)$$

$$I_i(z,z')=Y_i(z,z'),\quad v_i=-\delta(z-z'),\ i_i=0 \quad (44d)$$

이라 정의하자. 이러한 정의를 이용하면 세기가 v_i 및 i_i를 가진 電源에 의한 電流및 電壓은 다음과 같이 표시할 수 있다.

$$I_i(z)=-Y_i(z'z')v_i(z')-T_i^i(z,z')i_i(z'), \quad (45a)$$

$$V_i(z)=-T_i^v(z,z')v_i(z')-Z_i(z,z')i_i(z') \quad (45b)$$

이 mode 振幅에 식 (41)에 주어진 v_i 및 i_i를 대입하고 E_t 및 H_t를 구한후 E_z 및 H_z를 구하여 全體 電磁界 E 및 H를 구하여 정리하면 다음을 얻는다.

$$\boldsymbol{E}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')=-\boldsymbol{Z}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{j}-\boldsymbol{Te}(\boldsymbol{r},\boldsymbol{r}')\cdot\boldsymbol{m}, \quad (46a)$$

$$H(r,r') = -T_m(r,r')\cdot j - Y(r,r')\cdot m \qquad (46b)$$

여기서 Z, Y와 T_e, T_m은 dyadic impedance, admittance 및 電界와 磁界의 transfer 函數이다. Vector mode 대신 scalar mode ϕ_i 및 φ_i를 사용하고 scalar 函數 S'와 S''을 각각 E mode 및 H mode에 대해 다음과 같이 정의하면

$$S'(r,r') = \frac{1}{j\omega\epsilon}\sum_i \frac{\phi_i(\rho)\phi_i^*(\rho')}{k_{ti}'^2} Y_i'(z,z'), \qquad (47a)$$

$$S''(r,r') = \frac{1}{j\omega\mu}\sum_i \frac{\varphi_i(\rho)\varphi_i^*(\rho')}{k_{ti}''^2} Z_i''(z,z'), \qquad (47b)$$

식 (46)에 사용된 dyadic Green 函數는 다음과 같이 된다.

$$-j\omega\epsilon Z(r,r') = (\nabla\times\nabla\times z_o)(\nabla'\times\nabla'\times z_o) S'(r,r') + k^2(\nabla\times z_o)(\nabla'\times z_o)S''(r,r'), \qquad (48a)$$

$$-j\omega\mu Y(r,r') = (\nabla\times\nabla\times z_o)(\nabla'\times\nabla'\times z_o) S''(r,r') + k^2(\nabla\times z_o)(\nabla'\times z_o)S'(r,r'), \qquad (48b)$$

$$T_e(r,r') = (\nabla\times\nabla\times z_o)(\nabla'\times z_o)S'(r,r') + (\nabla\times z_o)(\nabla'\times\nabla'\times z_o)S''(r,r'), \qquad (48c)$$

$$-T_m(r,r') = (\nabla\times\nabla\times z_o)(\nabla'\times z_o)S''(r,r') + (\nabla\times z_o)(\nabla'\times\nabla'\times z_o)S'(r,r'). \qquad (48d)$$

여기서 ∇은 r 座標系에 작용하며 ∇'은 r'座標系에 작용한다.

지금까지 均一한 斷面을 가진, 그리고 境界面이 導體인 領域에서의 電磁界 문제를 그림 5에 보인바와 같은 과정으로 풀어 봤다. 처음에 電磁界 문제를 어느 特定한 mode에 대한 回路문제화 하여 解析했다. 이 특정 mode에 대한 回路문제를 풀어 mode의 振幅을 구한 후 全電磁界를 各 mode를 重疊시켜 合成함으로서 얻었다. 小數의 mode만이 존재하는 導波管內에서 電力 및 감쇄현상을 알기 위해서는 그림 4의 오른편에 그린회로망 문제의 解로서 충분하다.

斷面成分의 電磁界의 合成이 회로망 문제를 통해 mode의 振幅들을 구하여 公式的으로 얻어졌지만, 많은 경우 이러한 解는 數値計算에 쓸모가 없다. 왜냐하면 合成문제에 있어서는 mode 級數의 收斂速度가 늦기 때문이다. 즉 合成에서는 가장 빨리 收斂하는 公式的인 결과가 요망된다. 이러기 위해서는 수렴성질이 다른 電磁界의 表示(representation) 방법들을 연구해야 할 것이다. 주어진 문제의 特性 mode를 선택하는 방법은 여러 가지가 있을 수 있다. 예를 들어 自由空間(free space)은 斷面이 四角形, 圓壔形, 혹은 楕圓形의 導波管으로도 또는 球形인 非均一 導波管으로도 간주할 수 있다. 또한 限定된 斷面을 가진 導波管이라 하더라도 傳送方向을 선택하는데 따라 다른 函數의 선택이 가능하다.

이러한 방법은 斷面이 均一하지 않고 誘電率과 誘磁率이 z 方向의 함수일 때도 적용이 가능하다 지면 관계로 실제 문제의 예는 생략하며, 앞으로 Green 函數와 固有函數와의 관계및 電磁界의 積分을 고주파대에서 근사적으로 전개하는 steepest descent 방법 등 소개할 기회가 있기 바란다.

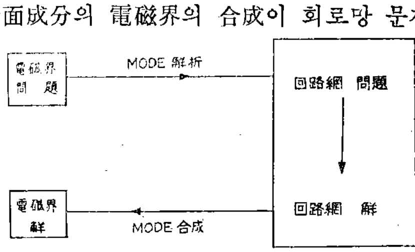

그림 **5**. Mode의 해석및 합성과정

참 고 문 헌

(1) J. Schwinger and D. Saxon: *Discontinuities in Waveguides* notes on Lectures by J. Schwinger, Gordon and Breach Science Pub., New York 1968

(2) N. Marcuvitz: *Waveguide Handbook*, MIT Radiation Lab. Series, Vol. 10, McGraw-Hill, New York 1951 or Dover Pub., New York 1965.

(3) L. B. Felsen and N. Marcuvitz: *Modal Analysis and Synthesis of Electromagnetic Fields*, P. I. B. Report R-446-55(a) and(b), and R-726-59.

(4) N. Marcuvitz and J. Schwinger: "On the Representation of the Electric and Magnetic Fields Produced by Currents and Discontinuities in Waveguides", J. Appl. Phys., Vol. 22, No. 6, June 1951, pp 806-819

(5) L. B. Felsen: "Transients in Dispersive Media, Part I: Theory" and G. M. Whitman & L. B. Felsen, "Transients in Dispersive Media, Part Ⅱ: Excitation of Space Waves and Surface Waves in a BoundedCold magnetoplasma", IEEE Trans. Ant. & Prop. Vol. AP-17, No. 2, March1969, pp 191-208