

2次式 帶域通過濾波器的 時間應答 (The time response of second order band pass filter)

高 丙 俊* · 金 在 功**

(Koh, Byung Joon) (Kim, Jae Kong)

要 約

대역통과여파기는 전달함수에 의한 진동감쇄율과 복소평면을 이용한 극좌표 응답도로써 그 특성이 설명되어 왔으나 여파기를 실제로 사용할 때에 시간에 대한 응답이 중요한 문제로 나타나는바 저주파대에서의 대역통과여파기의 시간에 대한 응답특성을 구하고 다음단의 회로동작에 영향을 주는 요인들의 함수관계를 Analog 전자계산기로 구성한 2차식 RC 능동여파기에 의해 밝혔다.

Abstract

A function relationship between the envelope rise time and Q value of band pass filter is studied by using the time response to the step and sinusoidal inputs.

It is discovered that the above relationship is linear in the very low frequency band. The filter was constructed by the Analog computer so as to do the function of 2nd order RC active band pass.

I. 序 論

最近 IC의 開發로 因하여 能動 RC 帶域通過濾波器는 종래의 다른 여파기와는 달리 소형이며 가벼움고 특히 DC에 가까운 낮은 周波數帶域까지 여파할 수 있으며 그 Q 값 및 安定度를 向上시킬 수 있어서 많은 관심과 아울러 꾸준한 연구가 계속되어 오고 있다.

그러나 이 여파기들에 대해 주로 振動減衰率에 다른 振幅應答特性과 중앙주파수에 있어서의 안정도 등이 연구되어 왔으나, 낮은 주파수대에서는 능동 RC 대역여파기의 R 및 C 값이 커지므로써 응답이 정상상태에 도달하는데 얼마의 上昇時間(envelope rise time)이 必要하게 되는데 이 時間은 振動減衰率에 관계되고 진동감쇄율은 여파기의 Q 값에 관계되어 있기 때문에 上昇時間

과 Q 값에 대하여 相互關係를 해석해 줄 필요성을 느끼게 된다.

예를 들면 여파기의 다음단에 積分回路를 사용한 相關器(correlator)나 이에 준하는 機器 및 回路를 연결하여 사용할 때 여파기의 出力 상승시간이 길다면 여파기의 다음단에 들어가는 入力信號로서는 과도적 시간에 해당되므로 이 過度信號가 다음단의 동작에 미치는 영향을 고려하지 않을 수 없다.

이러한 관점에서 2차식 대역통과여파기의 시간에 대한 특성을 조사하고 단위계단 입력(unit step input)에 대한 출력의 최대치가 주는 「오버셔울」(over-shoot)% 식을 이용하여 固有系統周波數와 출력과의 관계 및 진동감쇄율과 상승시간, Q 값과의 관계를 조사하고, 이 특성으로부터 2차식 대역통과여파기의 사용을 위한 선택방법 및 결정 조건을 정할 수 있도록 하였다.

실험을 위하여 Hitachi 505 Analog 전자계산기와 General Radio 1305-A 發振器를 使用하였으

* 正會員 原子力研究所 電子工學研究室 AERI

** 正會員 東國大學校 電子工學科, Dong Guk Univ.

接受日字: 1971年 10月 20日

며 低周波帶에서의 特性을 알기위하여 주파수를 1Hz로 선택하였으며 傳達函數의 次數가 높을 경우 여파기의 특성은 개선되지만 여파기 회로내의 상호간섭 및 한 소자의 적은 변화가 전체 특성에 크게 미치는 영향을 고려한다면 高次式 대신에 낮은 차수의 전달함수를 종속 접속시키는 것이 効果의이기 때문에 2차식 여파기를選擇하였다.

실험을 위한 Q의 값은 4, 8, 20, 40, 80으로 택하였고, 입력신호로는 단위계단입력과 주파수 1Hz인 정현파와 1±(0.02, 0.04, 0.06, 0.08, 0.1, 0.12, 0.14, 0.16, 0.18) Hz인 정현파를 각각 입력신호로 사용하였다.

II. 2次式 帶域通過 濾波器

대역통과 능동 RC 여파기를 그림 1과 같이 구성하고

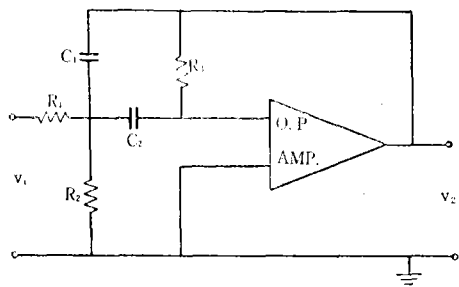


그림 1. 2차식 능동 RC 대역통과여파기의 구성도

$f_0=1\text{Hz}$, $Q=20$ 으로 取하기 위하여 $R_1=10K\Omega$, $R_2=\frac{10}{39}K\Omega$, $R_3=400K\Omega$, $C=C_1=C_2=15.9\mu F$ 로하면 전달함수식은

$$G(s) = \frac{-\frac{1}{R_1 C^2 s^2}}{s^2 + \frac{2}{R_3 C} s + \frac{1}{R_3 C^2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)} \quad (1)$$

$$= \frac{-2\pi s}{s^2 + 0.1\pi s + 4\pi^2} \quad (2)$$

로 된다.

式을 다시쓰면

$$G(s) = \frac{-\omega_0 s}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2} \quad (3)$$

인데 ζ 는 振動減衰率로써 그 값은 $\frac{1}{2Q}$ 이다.

단위계단入力에 대한 (2)식의 특성은

$$V_2(s) = \frac{-\omega_0}{(s + \zeta\omega_0)^2 + \omega_0^2(1 - \zeta^2)} \quad (4)$$

$$v_2(t) = -\frac{\omega_0 e^{-\zeta\omega_0 t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2} t \quad (5)$$

로 된다.

「오우버술」의 최대%(MPO) 값은

$$MPO = \text{EXP}\left(-\frac{\zeta\pi}{\sqrt{1 - \zeta^2}}\right) \times 100 \quad (6)$$

인바 ζ 와의 관계를 그리면 그림 2와 같다.

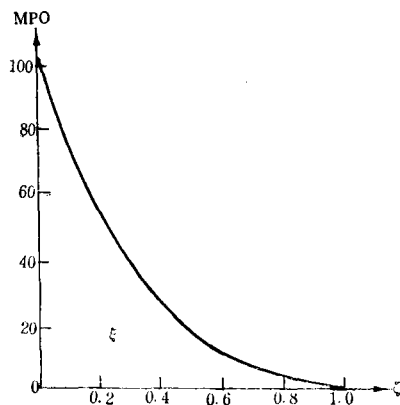


그림 2. 2차식의 진동감쇄율과 MPO와의 관계

(5)식에서

$$\omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2} = \omega_s \quad (7)$$

로 놓으면 (5)식은

$$v_2(t) = \frac{\omega_0 e^{-\zeta\omega_0 t}}{\sqrt{1 - \zeta^2}} \sin \omega_s t \quad (8)$$

인데 이때 ω_s 는 계통의 고유각속도가 된다.

따라서 단위계단입력에 대한 RC 능동여파기의 특성은 系の 고유주파수

$$f_s = \frac{\omega_s}{2\pi} \quad (9)$$

의 지수함수적인 감쇄진동 파형이 되며 系の 發振週期는

$$T_s = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (10)$$

가 된다.

入力이 角速度 ω_s 인 정현파일때 여파기의 출력

$$V_2(s) = \frac{\omega_x}{s^2 + \omega_x^2} \cdot \frac{-\omega_0 s}{s^2 + 2\zeta\omega_0 s + \omega_0^2} \quad (11)$$

을 $\omega_0 \cong \omega_x$, $\omega_0 > \omega_x$, $\omega_0 < \omega_x$ 의 세 경우에 나누어 생각하면,

(i) $\omega_0 \cong \omega_x$ 일때

$$V_2(s) = -\frac{\omega_0}{2\zeta} \left\{ \frac{1}{s^2 + \omega_0^2} - \frac{1}{(s + \zeta\omega_0)^2 + \omega_0^2(1 - \zeta^2)} \right\} \quad (12)$$

$$v_2(t) = -\frac{\omega_0}{2\zeta} \left\{ \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_0 t - \frac{1}{\omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2}} e^{-\zeta\omega_0 t} \sin \omega_0 \sqrt{1 - \zeta^2} t \right. \\ \left. = -\frac{\omega_0}{2\zeta} \left\{ \frac{1}{\omega_0} \sin \omega_s t - \frac{1}{\omega_s} e^{-\zeta\omega_0 t} \sin \omega_s t \right\} \quad (13)$$

$\zeta = 0.025 (Q = 20)$ 이면 $\omega_0 \cong \omega_s$ 로 되어

$$v_2(t) \cong -\frac{1}{2\zeta} [\sin \omega_0 t - e^{-\zeta\omega_0 t} \sin \omega_0 t] \quad (14)$$

로 된다.

ω_0 는 決定된 값이므로 ζ 값을 적당히 택하므로써 상승시간을 조절할 수가 있지만 Q 값을 저하시킬 우려가 있으므로 Q 값과의 관계를 고려하지 않을 수 없게 된다.

(14)식에서 一定振幅에 도달하는 시간을 T 라고 하고

$$\zeta\omega_0 T = K \quad (15)$$

로 놓으면 K 는 振幅에 따라 決定되는 常數가 되며 Q 와 T 와 사이에는

$$Q = \frac{1}{2\zeta} = \frac{\omega_0}{2K} \quad T = K_1 T \quad (16)$$

일차함수 관계가 있게 된다. (但 $\frac{2K}{\omega_0} = K_1$)

ω_0 와 K 값이 결정되면 Q 는 T 에 따라 일의적으로 決定된다.

(ii) $\omega_0 > \omega_x$ 일때

$$V_2(s) = \frac{\omega_x}{s^2 + \omega_x^2} \cdot \frac{-\omega_0 s}{(s + \zeta\omega_0)^2 + \omega_s^2} \cong \frac{-\omega_0 \omega_x s}{(s^2 + \omega_x^2)[(s + \zeta\omega_0)^2 + \omega_0^2]} \quad (17)$$

$$v_2(t) = -\omega_0 \left\{ \frac{\omega_x^2}{(\omega_0^2 - \omega_x^2)^2 + (2\zeta\omega_0\omega_x)^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \sin(\omega_x t + \phi_1) - \omega_x \left\{ \frac{\omega_x^2 + \omega_0^2}{(\omega_0^2 - \omega_x^2)^2 + (2\zeta\omega_0\omega_x)^2} \right\}^{\frac{1}{2}} e^{-\zeta\omega_0 t} \sin(\omega_0 t + \phi_2) \quad (18)$$

여기서 ϕ_1 및 ϕ_2 는 다음과 같다.

$$\phi_1 = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{2\zeta\omega_0\omega_x}{(\zeta\omega_0)^2 + \omega_0^2 - \omega_x^2}$$

$$\phi_2 = \tan^{-1} \left(-\frac{1}{\zeta} \right) + \tan^{-1} \frac{2\zeta\omega_0\omega_x}{(\zeta\omega_0)^2 - \omega_0^2 + \omega_x^2}$$

(iii) $\omega_0 < \omega_x$ 일때

$\omega_0 > \omega_x$ 일때와 같다.

(18)식에서 보건데 첫째항과 둘째항의 角速度가 서로 다르며 同時に 位相差가 있으므로 출력은 指數函數의으로 上昇하지만 각각 다른 두 주파수로 하여금 두 정현파가 서로 간섭되다 따라서 변조파 形態의 파형이 나타나게 된다.

III. 實 驗

여파기의 특성을 알기위하여 (2)식에 대한 Analog 전자계산기 모의를 그림 3과 같이 하였으며 濾波器의 特性을 그림 4와 같이 얻었다.

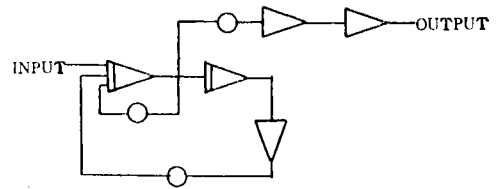


그림 3. 능동여파기의 Analog 계산기 모의

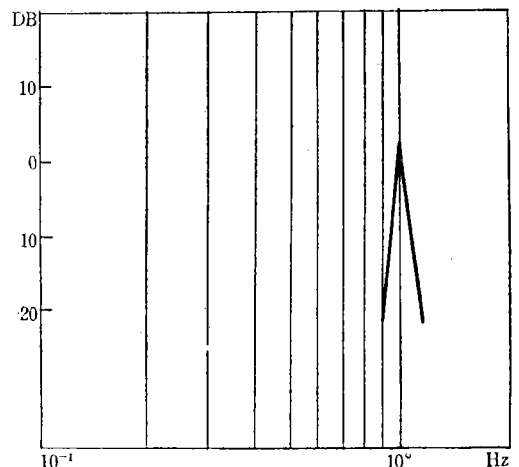


그림 4. 능동여파기의 특성

단위계단入力에 대한 응답은 그림 5와 같고 (8)식과 같이 $\sin t \omega_s t$ 에 대하여 指數함수적으로 減衰되며 ω_s 는 ω_0 와 거의 같다. 入力이 정현파일때

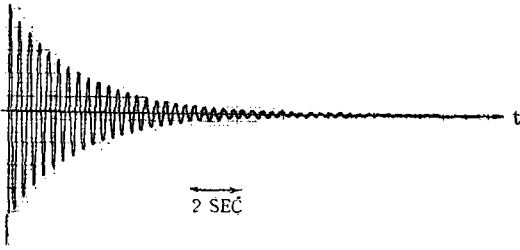


그림 5. 단위계산입력에 대한 시간응답

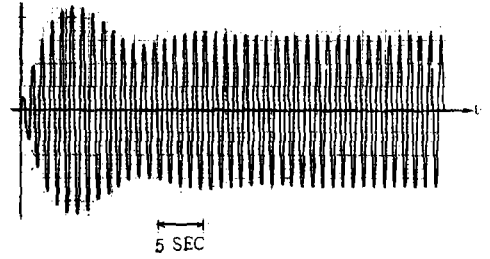


그림 8. 정현파입력에 대한 시간응답
 $\omega_0 < \omega_x, f_x = 1.08Hz, Q = 20$

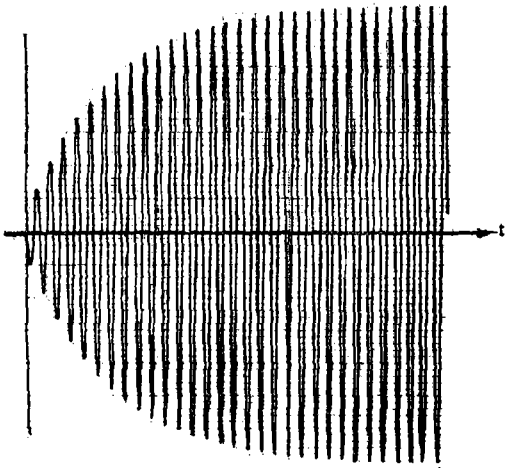


그림 6. 정현파입력에 대한 시간응답
 $\omega_0 = \omega_x, f_x = 1Hz, Q = 20$

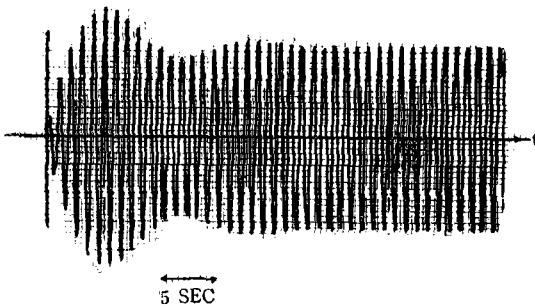


그림 7. 정현파입력에 대한 시간응답
 $\omega_0 > \omega_x, f_x = 0.92Hz, Q = 20$

의 應答는 그림 6, 7, 9와 같다.

그림 6에서 볼때 $\omega_0 \approx \omega$ 때는 單調로운 形態로 增加하며 上昇時間은 (14)式의 $e^{-\zeta\omega_0 t}$ 에 關係되는데 ω_0 가 增加하면 $e^{-\zeta\omega_0 t}$ 가 減小되기 때문에 時

間이 줄어들 것임을 알 수 있다.

最大振幅의 0.9배에 到達하는 時間은 $1 - e^{-\zeta\omega_0 t} = 0.9$ 式에서 구할 수 있으며 그림 6의 境遇는 15秒가 된다.

$Q = 10$ 일때 最大振幅의 0.9배에 到達하는 時間을 1초로 할려면 $f_x = 7.3Hz$ 어야 한다. 따라서 上昇時間은 낮은 周波數대에서 問題됨을 알 수 있다.

그림 7 및 8의 $\omega_0 \approx \omega_x$ 일때는 (18)式과 같이 變調波 形態가 나타났으며 完全 安定狀態까지 이르는 時間은 $\omega_0 = \omega_x$ 때의 上昇時間과 같음을 알 수 있다. 그러나 一般的으로 Q 의 選擇은 電壓振幅의 最大값에서 3dB 떨어지는 점, 다시말해서 電力이 반으로 줄어드는 점을 여파기의 出力값을 위한 점으로 잡을 수 있으나 任意로 選擇하여 다음단 回路의 入力으로 使用할 때는 그때의 Q 값과 上昇時間과의 關係를 考慮해 주면된다.

그림 9, 10, 11, 12, 13, 은 Q 가 각각 80, 40, 20, 8, 4 일때 여파기의 出力을 그린 것이며

最大振幅에서 3dB 떨어지는 點까지의 到達時間을 구하여 Q 와의 關係를 나타내 보면 表 1 및 그림 14와 같다.

표 1. Q 값과 半 電力點 까지의 時間關係
 $f_x = 1Hz$

Q	4	8	20	40	80
반전력점까지의 시간	1.5	3	7.5	15	30

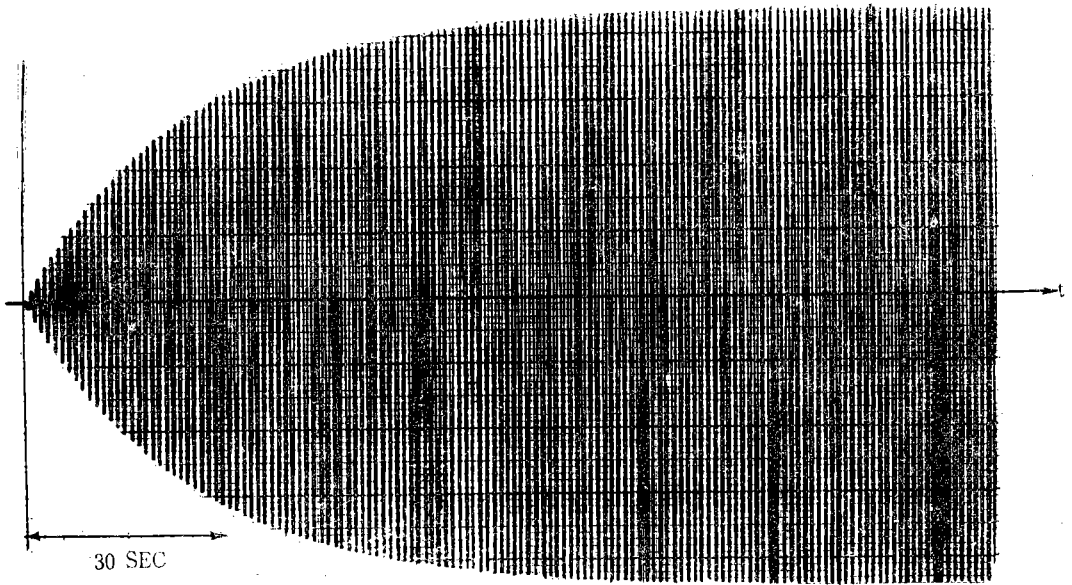


그림 9. $f_x=1Hz, Q=80$

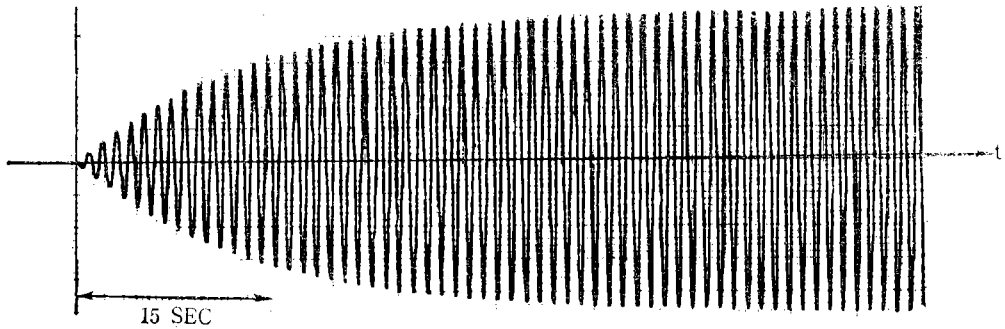


그림 10. $f_x=1Hz, Q=40$

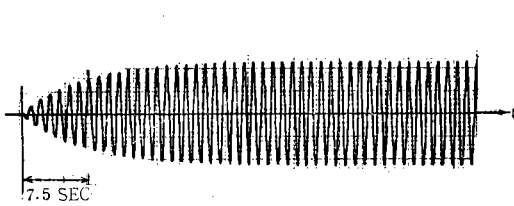


그림 11. $f_x=1Hz, Q=20$

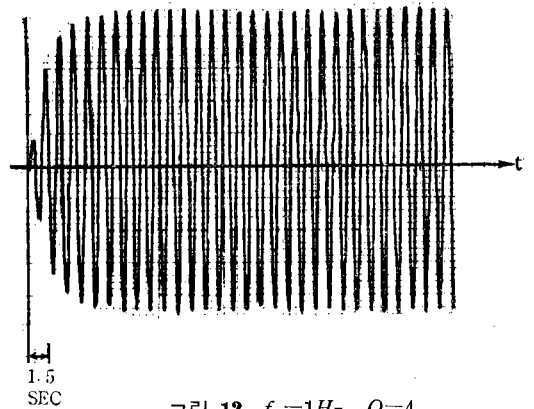


그림 13. $f_x=1Hz, Q=4$

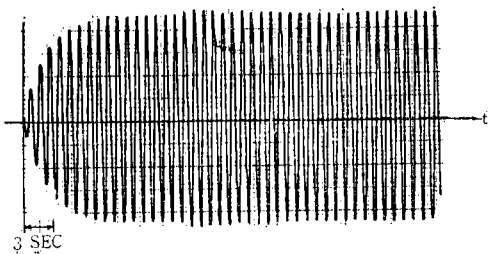


그림 12. $f_x=1Hz, Q=8$

그림 14는 (16)式과 一致하며 그림에 의해서 $Q=40$ 일때 正常狀態까지 15초 걸리며 $Q=50$ 일 때는 19초가 걸림을 알 수 있다.

(16)式의 K_1 은 표 1에서 약 2.67로되며 이 값

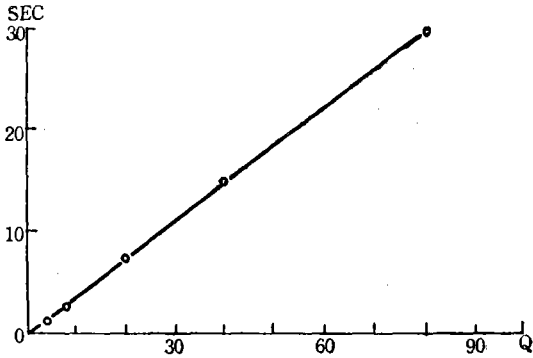


그림 14. 반 전력시간과 Q 와 관계, $f_0=1Hz$

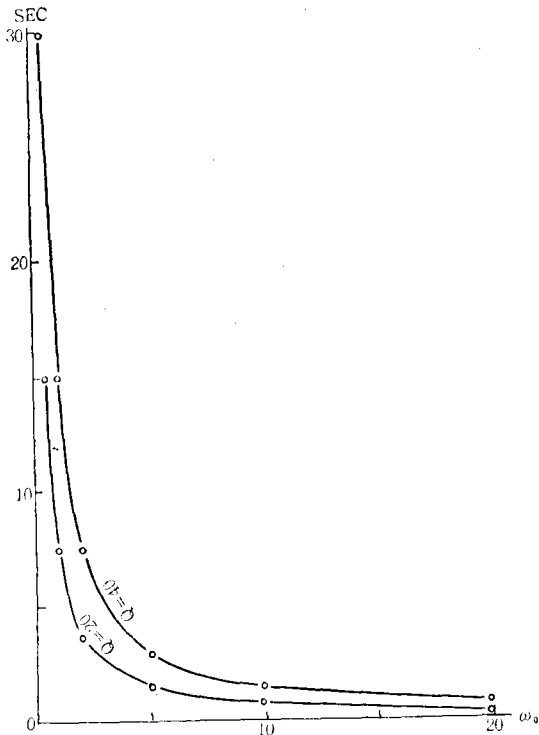


그림 15. 주파수와 시간관계

은 $f_s=1Hz$ 일때 ζ 의 변화에 따른 Q 값을 만족함을 알 수 있으며 (16)식의 의거하여 周波數와 時間과의 關係를 나타내면 그림 15와 같다.

그리고 「오우버슈」의 安全狀態에 대한 振幅크기의 비를 구하여 許容할 수 있는 「오우버슈」%를 찾아 그때의 許容 f_s 의 값을 求하면 손쉽게 2차식 帶域通過濾波器를 使用하였을 때의 損失 및 誤差를 구할 수 있다.

이때는 Q 값에 따른 正常狀態에 到達하는 時

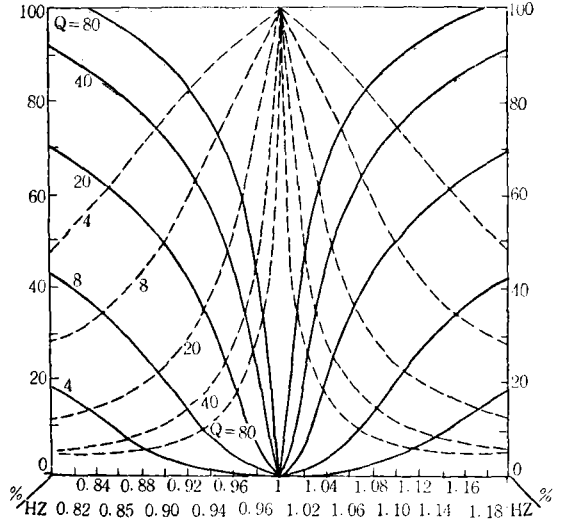


그림 16. 주파수에 따른 Q, 「오우버슈」, 진폭과의 관계

실선 : 안정상태에 대한 「오우버슈」%
점선 : 정상상태에 대한 진폭%

間, Q 값에 따른 振幅크기의 變化量, 그때의 「오우버슈」% 등을 함께 考慮해 주어야 한다.

이의 關係를 그림으로 그리면 그림 16과 같다.

IV. 結 論

2차식 대역통과여파기의 ω_0 와 ω_s 의 關係 그리고 여파기 出力의 上昇時間과 Q와의 關係를 구했다.

식 (10)의 直線의 기울기는 上昇時間의 기준점 및 使用周波數 그리고 Q 값에 의해 變化될 수 있으며 低周波數대역에서는 Q 값과 上昇時間이 逆의 關係가 있음을 考慮해 볼 때 Q 값의 選擇에는 반드시 正常狀態에 到達하는 上昇時間이 考慮되어야 한다.

그리고 特히 出力의 誤差를 보상하기 위하여 그림 16에서 보는 바와 같이 Q 값, 振幅, 여파된 周波數, 「오우버슈」%와의 關係를 考慮해 주어야 함을 알 수 있다.

參 考 文 獻

1. L. P. Huelsman: Theory and Design of Active RC Circuits, McGraw Hill, 1968.

2. S.M. Shinnars: Control Sstem Design, Wiley, 1964.
3. M.F. Gardener and J.L. Barnes: Transients in Linear Systems, Wiley, 1942.
4. W.J. Kerwin and L.P. Huelsman: The Design of High Performance Active RC Band Pass Filters, IEEE International Convention Record, Part 10, March 1966.