

技術解説

Active Filter 設計理論 (I)

金 定 徳*

1. 紹 介

Passive LC Filter가 高周波용으로 使用時에는 設計도 용이할 뿐만 아니라 좋은 性能을 보여 준다. 그러나 이것이 低周波용으로 使用할때 Q 最大値는 대개 100 程度로 限定되어 있다. 실제적으로 100 程度の Q를 얻기 위해서도 부피가 크고 bulky 한 Inductor 를 사용하여야 될 뿐만 아니라 線의 감는 回數增加에 따라 熱 혹은 振動 stress로 인하여 耐久性이 弱하게 된다. 또한 Ferrite Core 等の 使用으로 Inductor 부피를 감소시킬려는 노력은 큰 成果를 보지 못했다고 볼 수 있겠다. 이는 곧 Inductor 特性이 周波數가 낮아짐에 따라 빠른 속도로 低落되는 傾向이 있기 때문이다.

反面 Active Filter 는 부피가 적다는 長點을 가진다. 即 LC Filter 와는 달리 Active Filter IC 형태로 製作될 수 있다는 點이다. 또한 Active Filter 는 入力 및 出力 Impedance 에 구애를 받지 않고 設計될 수 있다. 또 하나의 Passive Filter 에 比較하여 Active Filter 의 長點은 入力側과 出力側 사이에 Signal Loss 가 없다는 點이다.

Active Filter 의 사용용도는 대단히 廣範圍하다고 볼 수 있겠다. 예를들면 Cutoff 周波數가 1Hz 인 Low-pass Filter 혹은 Spike 當 0.5~1 Hz 를 가지고 中間周波數가 50Hz 정도인 Comb Filter 等이다. 또한 廣大域, 적은 Size, Zero Insertion Loss 等이 要求되는 回路에도 使用될 수 있다. 誘導現象 때문에 Coil 이 使用 될 수 없는 回路들에도 Active Filter 가 適合하다.

2. Synthesis 方法의 紹介

要求되는 周波數 및 Phase 特性을 얻기 위한

Active RC Filter 제작에 關하여는 많은 Synthesis 技巧가 發展되었다(1, 2). 그중에서 가장 많이 알려진 技巧로서 다음의 5가지를 들 수 있겠다.

- (1) Gyrator 에 依한 方法.
- (2) Negative-Impedance Converter 에 依한 方法(3, 4, 5)
- (3) Operational Amplifier 에 依한 方法(1, 2, 6, 7)
- (4) State-variable 技巧(8)
- (5) Positive-Impedance Converter 에 依한 方法(10, 11)

以上の 各各 技巧에 對하여 다음에서 자세히 설명하기로 한다.

3. Gyrator 에 依한 Active Filter 設計

Gyrator 는 入力側 Impedance 가 그의 負荷 Admittance 에 比例하는 Nonreciprocity 한 two-port Network 이다. 따라서 Gyrator 負荷側에 Capacitor 를 連結시키면 入力側에서 볼 때 Inductor 의 役割을 할 수 있다. 더구나 Gyrator 는 回路內의 Signal Energy 를 증폭시키지도 않고 소모하지도 않기 때문에 Gyrator 回路內에 Active Element 를 包含하고 있지만 Lossless Passive Network 와 같이 動作된다.

一般的으로 Capacitor 와 Inductor 를 比較할 때 Capacitor 가 Inductor 보다 더 높은 Q Factor 를 가지고 있으며 dissipation 이 더 적기 때문에 Gyrator 와 Capacitor 로써 만든 Inductor 는 Discrete type 의 Inductor 보다 더 良好하다고 볼 수 있다. 따라서 LC Filter 內의 Inductor 를 Gyrator 回路로써 代치 할 수 있으며 實際 Filter 設計의 例는 다음에서 볼 수 있다.

設計方法 1

Active Filter 設計에 있어서 가장 直接的인 方

*陸軍士官學校 教授部

法은 Passive LC Filter 를 먼저 設計하고 그 中에
서 Inductor 를 Gyrator 와 Capacitor 로써 代치하
는 方法이다. 예를들어 damping ratio 가 ξ 이고
共振周波數 w_0 인 2次 Low-pass Filter 를 設計
한다고 생각하자. DC gain 을 1 이라하면 Open-
Circuit Voltage Transfer 函數는

$$T(S) = \frac{V_{out}}{V_{in}} = \frac{w_0^2}{S^2 + 2\xi w_0 S + w_0^2}$$

RLC Filter 로써 上記 Transfer 函數를 Synth-
esis 하면 그림 1 과 같이 된다.

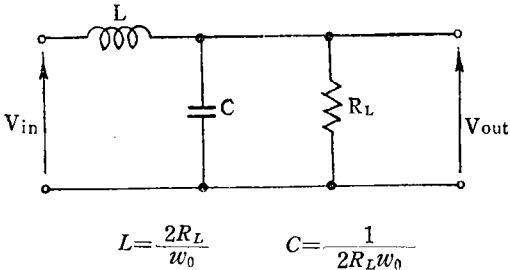


그림 1

그림 1에 있는 回路中 Inductor 를 Gyrator 와
Capacitor 로써 代치하면 그림 2에 있는 回路와
같다.

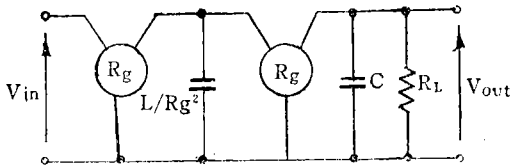


그림 2

그림 2에 있는 Filter 의 Stability 를 조사하기
위해서 Gyrator 계수 Rg 가 Rx 로 變한다고 가정
하면

$$L = \frac{2\xi R_L}{w_0} \cdot \frac{R_x^2}{R_g^2}$$

만일 R_x^2/R_g^2 을 α^2 으로 놓으면 Transfer 函數
는 다음과 같이 된다.

$$T(S) = \frac{1}{LCS^2 + \frac{L}{R_L}S + 1} \\ = \frac{w_0^2}{\alpha^2 S^2 + 2\xi w_0 \alpha^2 S + w_0^2}$$

따라서 DC gain 은 1이 되어 不變이며 共振周波
數와 damping ratio 는 다음과 같이 變한다.

$$w_x = w_0(R_g/R_x)$$

$$\xi_x = \xi \alpha^2$$

즉 Gyrator 계수에 10%의 變化가 있으면 共振
周波數와 damping ratio 는 各各 9%와 20%의 變
化가 생긴다. 上記 方法에 依한 Active Filter 設
計는 容易한 反面 두개의 Gyrator 를 使用해야 되
고 Stability(安定度)가 나쁘다는 短點이 있다.

設計方法 2

이 方法은 두개의 RC Network 를 Gyrator 로
써 연결시키는 Cascaded Network 를 使用한다.

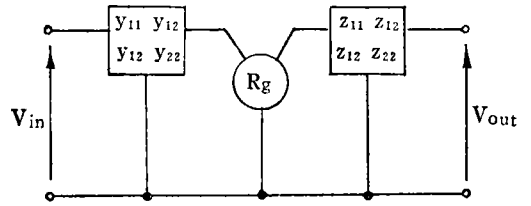


그림 3

各各의 RC Network 는 Two-Port Network 로
써 좌측 Network 는 Y-admittance 계수로써 우
측 Network 는 Z-impedance 계수로써 表示한다.
이와 같은 回路는 다음의 Open-circuit Voltage
Transfer 函數를 갖는다.

$$T(S) = \frac{N(S)}{D(S)} = \frac{-R_g y_{12}(S) z_{12}(S)}{z_{11}(S) + R_g^2 y_{12}(S)}$$

문제는 주어진 T(S)로 부터 RC 係數들을 찾
아 내는 것이다. 이 方法은 Transfer 函數의 Pole
에 基礎를 두고 있기 때문에 동조주파수와 Dam-
ping ratio 에 對하여 良好한 Stability 를 준다. 이
設計上에는 단지 하나의 Gyrator 를 必要로 한다.
設計過程은 다음과 같다.

條1段階: T(S)內의 N(S)와 D(S)를 어떤 任意
의 polynomial Q(S)로 나누면

$$T = \frac{N/Q}{D/Q} = \frac{R_g y_{12}}{z_{11} + R_g^2 y_{22}}$$

第2段階: D/Q 를 $Z_{11} + R_g^2 y_{22}$ 의 형태로 變換
시키기 위하여 $Q = Q_1 \cdot Q_2$ 라 놓으면

$$D/Q = \frac{D_2}{Q_2} + R_g^2 \frac{D_1}{Q_1} = \frac{D_2 Q_1 + R_g^2 D_1 Q_2}{Q_1 Q_2}$$

第3段階: 第2段階의 結果를 $Z_{11} + R_g^2 y_{22}$ 와 비
교하면

$$z_{11} = \frac{D_2}{Q_2}, y_{22} = \frac{D_1}{Q_1}$$

따라서 分母 polynomial D 는 Q_1 과 Q_2 項으로 表

示할 수 있다.

$$D = D_2 Q_1 + Rg^2 D_1 Q_2$$

Calahan(9)이 제안한 技巧을 利用하면 D_2/Q_2 를 RC Impedance가 되도록 그리고 D_1/Q_1 을 RC Admittance가 되도록 만들 수 있다.

上記 設計方法을 說明하기 위하여 다음의 Low-pass Filter 設計를 생각해 보자.

$$T(S) = \frac{w_0^2}{S^2 + 2\xi w_0 S + w_0^2}$$

여기에서 $N = w_0^2$

$$D = S^2 + 2\xi w_0 S + w_0^2$$

Calahan의 Decomposition 方法을 適用하면

$$D = S^2 + 2\xi w_0 S + w_0^2 = K_1(S+a)^2 + K_2(S+b)^2$$

여기에서 未知數 K_1, K_2, a, b 를 計算하여야 한다. 상기 D 式을 展開하여 Coefficient Matching 을 시키면

$$D = (K_1 + K_2)S^2 + (K_1 a + K_2 b)2S + (K_1 a^2 + K_2 b^2)$$

따라서

$$\begin{aligned} K_1 + K_2 &= 1 \\ K_1 a + K_2 b &= \xi w_0^2 \\ K_1 a^2 + K_2 b^2 &= w_0^2 \end{aligned}$$

만일

$$K_1 = \frac{1}{1 + K_2/K_1}, \quad \frac{K_2}{K_1} = n^2 \text{ 이면}$$

$a > b$ 라는 가정에서

$$\begin{aligned} K_1 &= \frac{1}{1+n^2}, \quad K_2 = \frac{n^2}{1+n^2} \\ a &= w_0(\xi + n\sqrt{1-\xi^2}) \\ b &= w_0(\xi - n\sqrt{1-\xi^2}) \end{aligned}$$

또한

$$D_1 = K_0 \frac{Rg^2}{K_2} (s+b)$$

은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} D_2 &= K_1(s+a) \\ Q_1 &= (S+a) \\ Q_2 &= \frac{1}{K_0}(s+b) \end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned} z_{11} &= K_0 K_1 \frac{S+a}{s+b} \\ y_{22} &= K_0 \frac{K_2}{Rg^2} \frac{s+b}{s+a} \end{aligned}$$

Transfer 函數 y_{12} 와 z_{12} 는 $N = w_0^2$ 로 부터 求할 수 있다. 即

$$\begin{aligned} z_{12} &= K_0 \frac{M_2}{s+a} \\ -y_{12} &= k_0 \frac{M_1}{S+a} \end{aligned}$$

여기에서

$$M_2 M_1 = \frac{w_0^2}{K_0 Rg^2}$$

만일

$M_2 = K_2 b / Rg^2$ 와 $M_1 = K_1(a-b)$ 라 택하면 Gy-rator를 包含한 RC Active Filter는 그림 4에 있는 回路와 같이 된다.

設計方法 2의 長點은 1個의 Gy-rator를 使用한 다는 點과 Sensitivity가 낮다는 點이다.

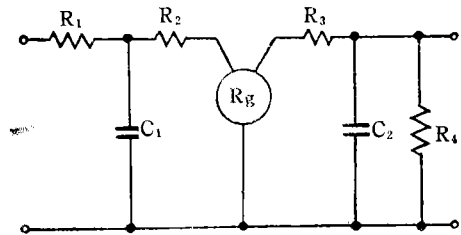


그림 4

$$R_1 = \frac{(1+n^2)^2}{n^3} \cdot \frac{Rg^2}{K_0} \cdot \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi - \frac{1}{n}\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$R_2 = \frac{(1+n^2)}{n^2} \cdot \frac{Rg^2}{K_0}$$

$$R_3 = \frac{1}{(1+n^2)} K_0$$

$$R_4 = \frac{1}{n} K_0 \cdot \frac{\sqrt{1-\xi^2}}{\xi - \frac{1}{n}\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$C_1 = \frac{n^3}{(1+n^2)^2} \cdot \frac{K_0}{Rg^2 w_0} \cdot \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

$$C_2 = n \frac{1}{K_0 w_0 \sqrt{1-\xi^2}}$$

實用的 Gy-rator 回路 :

實用性이 있는 Gy-rator 중의 하나는 B. A. Sheno이에 의한 것으로서 3個의 transistor를 僱用한 回路로써 그림 5에 있는 바와 같이 두개의 transistor는 Common-Emitter 형태로써 使用하며 Forward Amplifier의 役割을 담당하고 나머지 한개는 Common-Collector의 형태로 使用하여 Active Feedback을 준다.

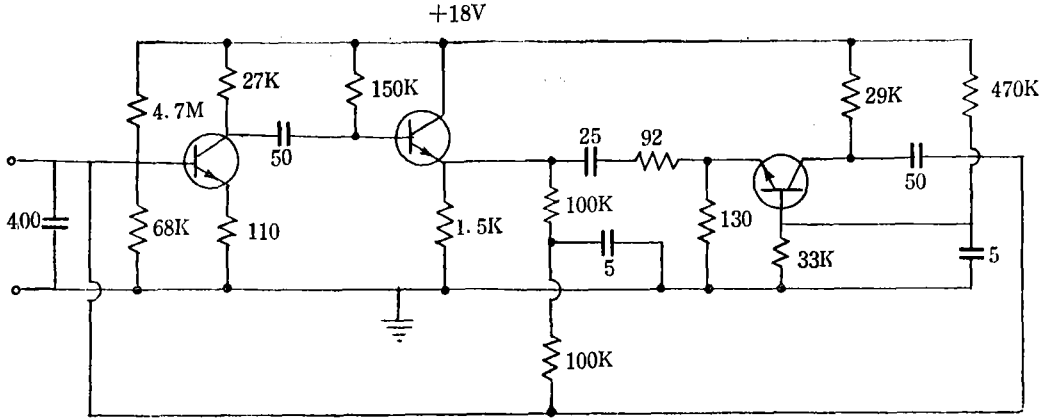


그림 5

上記 回路의 $z_{11}=0.685\Omega$, $z_{12}=-z_{21}=118\Omega$, $z_{11}=2.2\Omega$ 이다.

理想的인 Gyrator 는 $z_{11}=z_{21}=0$ 이어야 한다. 여기에서 Gyrator 저항은 118Ω 라 볼 수 있겠다. 이 回路의 insertion loss 는 周波數 範圍 2KHz로부터 250KHz 까지 10% 以內이다. 또한 出力側이 open 되건 short 되건간에 周波數 500KHz까지는 Stability 가 保障된다.

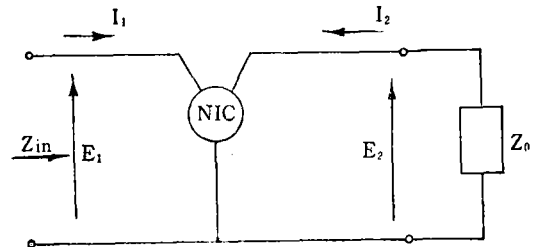


그림 6

4. Negative-Impedance Converter (NIC)를 이용한 Active Filter 設計方法

Negative-Impedance Converter 혹은 NIC 는 two-port device 로써 負荷에 어떤 Impedance가 인가되면 入力側에는 그 Impedance 의 負의 値가 나타나게 한다. 예를들어 저항이 부하로써 연결되면 入力側에서 본 Impedance 는 負抵抗(Negative Impedance)이 된다.

NIC를 數式으로 表現하기 위하여 Chain Matrix 를 使用하면 다음과 같이 定義된다.

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_2 \\ -I_2 \end{pmatrix} \text{ Voltage-Inversion Type.}$$

혹은

$$\begin{pmatrix} E_1 \\ I_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_2 \\ -I_2 \end{pmatrix} \text{ Current-Inversion Type.}$$

만일 負荷의 저항을 Z_0 라 하면 voltage-Inversion 혹은 Current-Inversion NIC 공히

$$Z_{in} = -kz_0 \text{ 를 준다.}$$

NIC를 利用한 Active RC Filter 의 設計는 3가지의 方法이 고안되었다. 卽 Linvill의 方法, Yanagisawa의 方法, Sipress의 方法등이다. 上記 方法들은 모두 1개의 NIC와 부속 RC Network로써 Active Filter를 설계하였다.

Linvill의 方法

두개의 RC Network를 NIC가 연결시켜 주는 Cascaded Network를 사용하였으며 Voltage-Inversion 혹은 Current-Inversion Type을 공히 사용할 수 있다.

만일 Voltage-Inversion Type을 사용하면

$$Z_{21} = \frac{E_2}{I_1} \Big|_{I_2=0} = \frac{z_{21}a \ z_{21}b}{z_{22}a - z_{11}b}$$

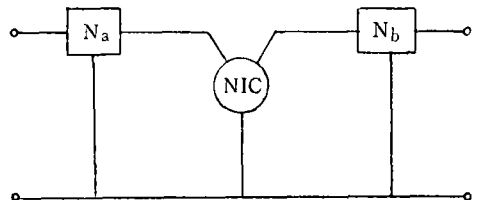


그림 7

여기에서 Subscript a 와 b 는 Network N_a 와 N_b 의 Impedance 계수임을 의미하고, k 는 NIC 의 Voltage Inversion Ratio 이다. 만일 Current Inversion Type 을 사용하면

$$Z_{21} = \frac{kz_{21a} z_{21b}}{kz_{11b} - z_{22a}}$$

Synthesis 方法을 說明하기 위하여 다음의 Low-pass Network 을 설계해보다.

$$\begin{aligned} Z_{21} &= \frac{k_0}{S^2 + k_1S + k_2} \\ &= \frac{z_{21a} z_{21b}}{z_{22a} - kz_{11b}} \\ &= \frac{P/q}{Q/q} \end{aligned}$$

여기에서

$$P = k_0$$

$$Q = S^2 + K_1S + K_2 \text{ 이다.}$$

만일 $q = M(S + Q_1)(S + a_2)$ 를 擇하면

$$z_{21a}z_{21b} = \frac{K_0}{M(S+a_1)(S+a_2)} = \frac{P}{q}$$

$$z_{22a} - kz_{11b} = \frac{S^2 + K_1S + K_2}{M(S+a_1)(S+a_2)} = \frac{Q}{q}$$

Q/q 를 partial fraction 으로 펼치면

$$\frac{S^2 + K_1S + K_2}{M(S+a_1)(S+a_2)} = A_0 + \frac{A_1}{S+a_1} + \frac{A_2}{S+a_2}$$

여기에서

$$A_0 = \frac{1}{M}$$

$$A_1 = \frac{1}{M} \cdot \frac{a_1^2 - K_1a_1 + K_2}{a_2 - a_1}$$

$$A_2 = -\frac{1}{M} \cdot \frac{a_2^2 - K_1a_2 + K_2}{a_2 - a_1}$$

만일 a_1, a_2, K_1, K_2 의 수치를 代入하여 A_1 은 正數 A_2 는 負數로 計算된다고 하면 다음과 같이 assign 할 수 있다.

$$z_{22a} = A_0 + \frac{A_1}{S+a_1}$$

$$-kz_{11b} = \frac{A_2}{S+a_2}$$

다음에는 P/q 를 분배하여 可能한 RC Network 를 만든다.

즉

$$z_{11a} = K_0 \frac{A_0}{A_1} \frac{1}{S+a_1}$$

$$z_{21b} = K_0 \frac{A_0}{A_1} \frac{1}{S+a_2}$$

그리고

$$A_0 = -\frac{A_1A_2}{K_0}$$

계산된 $z_{21a}, z_{22a}, z_{21b}, z_{22b}$ 로 부터 一般的인 RC Synthesis 方法에 依하여 Network N_a 와 N_b 를 설계하면 된다.

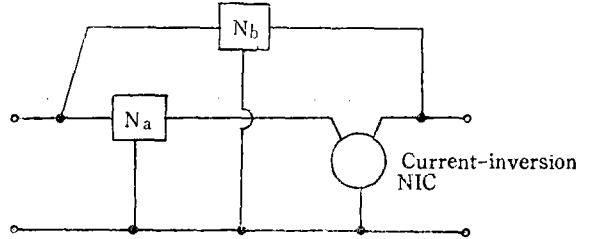


그림 8

Yanagisawa 方法

Yanagisawa 方法에서 RC Network N_a 가 다른 RC Network N_b 그리고 NIC 와 Parallel 로 연결되어 있다. 이 方法에서는 Current-Inversion NIC 를 使用하며 그림 8과 같은 回路에서 전체의 Open-Circuit Voltage Transfer 函數는 다음과 같이 表示된다.

$$T = -\frac{Y_{21b} - k Y_{21a}}{Y_{22b} - k Y_{22a}}$$

만일 그림 8의 회로 Parameter 를 다음과 같이 가정하면 그림 9에 있는 회로와 같이 된다.

$$Y_{21a} = -Y_{1a}$$

$$Y_{22a} = Y_{1a} + Y_{2a}$$

$$Y_{21b} = -Y_{1b}$$

$$Y_{22b} = Y_{1b} + Y_{2b}$$

따라서

$$T = \frac{Y_{1b} - k Y_{1a}}{Y_{1b} - k Y_{1a} + Y_{2b} + k Y_{2a}} = \frac{P}{Q}$$

설계과정을 說明하기 위하여 만일 Transfer 函數 T 가

$$T = \frac{K_0}{S^2 + K_1S + K_0}$$

으로 주어졌다고 하면 $P = K_0, Q = S^2 + K_1S + K_0$ 이다. 여기에서 任意的 polynomial $q = M(s+a)$ 를 擇하여 T 의 分母, 分子를 나누어 주면

$$Y_{1b} - k Y_{1a} = \frac{K_0}{M(s+a)}$$

$$Y_{2b} - k Y_{2a} = \frac{S^2 + K_1 S}{M(s+a)}$$

각각을 Partial fraction 으로 전개하면

$$\frac{K_0}{M(s+a)} = A_0 + \frac{A_1 S}{s+a}$$

$$\frac{S^2 + K_1 S}{M(s+a)} = B_\infty S + \frac{B_1 S}{s+a}$$

여기에서

$$A_0 = \frac{K_0}{aM}, \quad A_1 = -\frac{K_0}{aM}$$

$$B_\infty = \frac{1}{M}, \quad B_1 = -\frac{\alpha - K_1}{M}$$

편의상 $k=1$ 로 놓으면

$$Y_{1b} = A_0, \quad Y_{1a} = -\frac{A_1 S}{s+a}$$

$$Y_{2b} = B_\infty S, \quad Y_{2a} = -\frac{B_1 S}{s+a}$$

따라서 모든 Network Element 는 결정되었다.

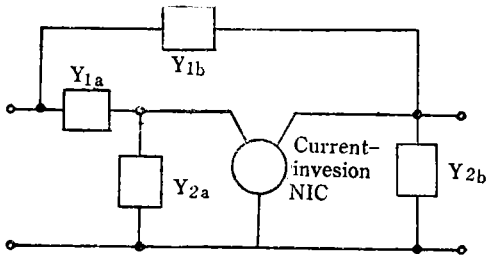


그림 9

Sipress 方法

경우에 따라서는 4개의 Short-Circuit Admittance 係數중 2개의 Admittance 係數가 동시에 주어지고 그 係數에 의하여 Two-Port Network를 Synthesis 해야 될 경우가 있다. 이런 경우에는 그림 10에 있는 회로망과 같이 1개의 NIC와 4개

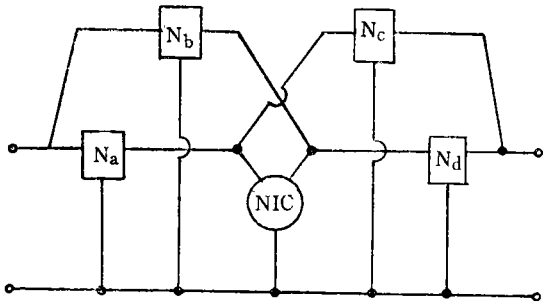


그림 10

의 RC Network 을 연결함으로써 Synthesis 할수 있게된다. 회로망 해석으로 다음을 얻을수 있다.

$$Y_{11} = y_{12}^{(c)} + y_{11}^{(b)}$$

$$-\frac{(y_{12}^{(c)} + y_{12}^{(b)})(y_{12}^{(c)} - ky_{12}^{(b)})}{y_{22}^{(c)} + y_{11}^{(c)} - ky_{22}^{(b)} - ky_{11}^{(d)}}$$

$$Y_{22} = y_{22}^{(d)} + y_{22}^{(c)}$$

$$-\frac{(y_{12}^{(c)} + y_{12}^{(d)})(y_{12}^{(c)} - ky_{12}^{(d)})}{y_{22}^{(c)} + y_{11}^{(c)} - ky_{22}^{(b)} - ky_{11}^{(d)}}$$

만일 사용하는 NIC가 Voltage-Inversion Type 이면 Short-Circuit Transfer Admittance 는

$$Y_{12} = -\frac{(y_{12}^{(a)} - ky_{12}^{(b)})(y_{12}^{(d)} + y_{12}^{(d)})}{y_{12}^{(c)} + y_{11}^{(c)} - ky_{22}^{(b)} - 4y_{11}^{(d)}}$$

$$Y_{21} = -\frac{(y_{12}^{(a)} + y_{12}^{(b)})(y_{12}^{(d)} - ky_{12}^{(d)})}{y_{22}^{(c)} + y_{11}^{(c)} - ky_{22}^{(b)} - ky_{11}^{(d)}}$$

또한 만일 사용하는 NIC가 Current-Inversion Type 이면 상기 방정식에서 Y_{12} 와 Y_{21} 이 서로 바뀌게된다.

생각할 수 있는 모든 경우는 6가지가 된다. 즉 Y_{11} 와 Y_{21} 이 주어진 경우 Y_{11} 와 Y_{12} 가 주어진 경우, Y_{22} 와 Y_{22} 가 주어진 경우, Y_{11} 과 Y_{22} 가 주어진 경우, Y_{12} 와 Y_{21} 이 주어진 경우이다. 각각의 경우에 Synthesis 하는 方法은 參考書籍(1,2)에 설명되어 있으며 여기에서는 생략하기로 한다

5. 結 語

以上에서 Active Filter 設計에 있어서 두가지 技巧 즉 Gyrator 에 의한 方法, NIC 에 의한 方法을 살펴 보았다.

다음 기회에 Operational Amplifier 에 의한 方法, State-Variable 技巧, PIC 에 의한 方法등을 살펴 보겠다.

Reference

- 1) K.L. Su, Active Network Synthesis, McGraw-Hill, 1965.
- 2) S.K. Mitra, Analysis and Synthesis of Linear Active Network, John. Wiley, 1968.
- 3) J.G. Linvill, RC Active Filters, Proc. IRE. vol. 42, pp. 555-574. March 1954.
- 4) T. Yanagisawa, RC Active Networks Using Current-Inversion Type Negative Impedance Converters. IRE Trans. Circuit Theory, vol. CT-4, pp. 140-144. Sept. 1957.

- 5) J. M. Sipress, Synthesis of Active RC Networks, IRE Trans, Circuit Theory, vol. CT-8, Sept 1961.
 - 6) N. W. Cox, Jr, Synthesis of Admittance Matrices Using RC Networks and Operational Amplifiers Ph. D. Thesis, Georgia Inst. of Tech., 1967.
 - 7) 김정덕, K.L. Su., On the Sufficiency of NXN Transfer Matrices Synthesis Using Operational Amplifiers, IEEE Trans. Circuit Theory (To be published)
 - 8) R. W. Newcomb, Active Integrated Circuit Synthesis, Prentice-Hall, 1968.
 - 9) P. A. Calahan, Active Synthesis by RC-RL Partitioning, NEREM Record, Nor. 1960.
 - 10) 김정덕, Active Network Synthesis Using the Positive Impedance Converter Ph.D. Thesis, Georgia Institute of Tech. 1971.
 - 11) D. R. Cobb, Active Network Synthesis Using the Generalized Positive Impedance Converter. Ph.D. Thesis, Georgia Insititute of Tech. 1971.
-