

狀態變數를 이용한 回路解析 (Network Analysis Via State Variables)

李 炳 璿*

1. 序 論

狀態變數를 이용한 回路解析은 受動, 線形 및 time-invariant 回路의 解析과 合成에만 利用되는 것이 아니라 能動, 分布, 非線形 및 time-variable 回路의 解析과 合成에도 擴大 利用할 수 있다. 이것은 回路의 動作狀態를 完全히 圖示할 수 있고 非線形과 time-varying 回路를 解析하는데 있어서 唯一한 效果의인 方法이다.

그러나 解析이 어렵다. 이 方法의 回路解析을 하는데 있어서 가장 큰 障礙는 이 方法의 普遍性 때문이다. 그리하여 이 方法은 주로 어려운 問題를 解決하는데 利用되고 있다. 따라서 이 方法을 回路解析에 紹介하는 것 以外에는 古典的인 方法으로 解決될 수 있는 問題에는 잘 利用되지 않고 있다. 그러므로 狀態變數를 利用한 回路解析이 다른 모든 方法을 不必要하게 하는 것은 아니다. 다른 一般的인 方法과 마찬가지로 이것은 解析하는데 不便한 點이 있어서 實際問題로서는 잘 利用되지 않는 수가 많다.

System theory 分野는 주로 狀態變數方法으로 하고 있으며 많은 좋은 結果를 얻고 있다. 回路理論이 system theory 中の 한 特別分野라고 생각하건 어떻게 이 方法은 양쪽에 다 利用할 수 있다. 나아가서 system theory 에서 오래전부터 알려진 많은 有用하고 잘 利用된 技術이 近來에 回路理論의 問題를 解決하는데 利用되고 있다. 그리하여 回路理論을 하는 사람은 自己分野의 最近의 發展狀態를 理解하기 위하여는 적어도 狀態變

數를 回路解析에 利用하는 方法을 消化하는 것이 必須要件이 되어 있다. 나아가서 回路理論의 거의 모든 分野에, 有力한 狀態變數方法을 利用하는 것은 電氣技術의 다른 分野에도 基礎가 될 것이다. 狀態變數方法의 또하나의 큰 長點은 이 方法으로 세워진 狀態方程式이 digital computer 로 數值解를 求할 수 있도록 program 이 되고 analog computer 로도 쉽게 解를 求할 수 있다는 點이다.

여기서는 狀態變數를 線形回路와 非線形回路에 利用하여 狀態方程式을 세우는 方法을 表示하고 몇個의 例를 提示한다.

2. 狀態方程式

電流源을 가진 RLC 並列回路에서 i_L 와 v_C 를 變數로 하는 完全解를 求하는 問題를 생각한다. 그림 1에서

$$\frac{di_L}{dt} = \frac{1}{L}v_C \quad t \geq 0 \quad (1)$$

$$\frac{dv_C}{dt} = -\frac{1}{C}i_L - \frac{G}{C}v_C + \frac{i_S}{C} \quad (2)$$

(1)과 (2)는 一階連立微分方程式이고 이것을 回路의 狀態方程式(state equations of the circuit)이라고 부르고 한雙의 變數 $i_L(t)$ 와 $v_C(t)$ 를 時間 t 에서의 回路의 狀態 (state of the circuit at time t)라 부르고 $i_L(0)$ 와 $v_C(0)$ 를 初期狀態(initial state)라 부르고 다음과같이 주어진다.

$$i_L(0) = I_0 \quad (3)$$

$$v_C(0) = V_0$$

(3)의 初期狀態는 (1)과 (2)에 依하여 모든 $t \geq 0$ 에서의 $i_L(t)$ 와 $v_C(t)$ 에 對한 唯一한 解를 준

* 原子力研究所 電子工學研究室

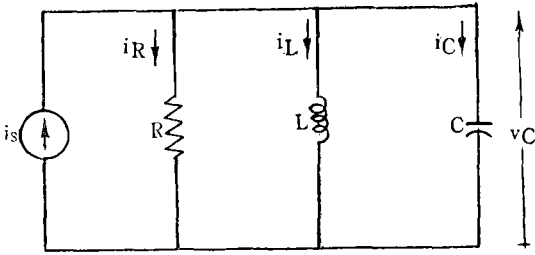


그림 1. 電流源을 가진 RLC 並列回路

다. 그리하여 i_L-v_C 平面上에 t 를 0에서 ∞ 까지 變化시키면서 그리면 點(I_0, V_0)에서 始作하는 하나의 曲線이 된다. 이 曲線을 state-space trajectory라 부르고 i_L-v_C 平面向을 state space라 부른다. 互變의 變數 $i_L(t)$ 와 $v_C(t)$ 는 座標의 原點으로 부터의 하나의 vector $x(t)$ 라고 생각할 수 있으며 다음과 같이 表示한다.

$$x(t) = \begin{pmatrix} i_L(t) \\ v_C(t) \end{pmatrix} \quad (4)$$

Vector $x(t)$ 는 state vector 또는 簡單히 state라 부른다. 그러므로 $x(t)$ 는 state space에서 모든 $t \geq 0$ 에 對한 하나의 vector이다. state vector의 各 component $i_L(t)$ 와 $v_C(t)$ 를 狀態變數(state variable)라 부른다. 時間 t 에서의 狀態 即 $i_L(t)$ 와 $v_C(t)$ 를 알면 狀態方程式 (1)과 (2)로부터 trajectory의 速度 $\frac{di_L(t)}{dt}$ 와 $\frac{dv_C(t)}{dt}$ 를 求할 수 있다.

(1)과 (2)의 狀態方程式을 matrix form으로 表示하면.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} i_L \\ v_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{di_L}{dt} \\ \frac{dv_C}{dt} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{L} \\ -\frac{1}{C} & -\frac{G}{C} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_L \\ v_C \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{C} \end{pmatrix} i_s \\ &= Ax + Bw \quad t \geq 0 \end{aligned} \quad (5)$$

따라서

$$\frac{dx}{dt} = Ax + Bw \quad t \geq 0 \quad (6)$$

初期狀態는

$$x(0) = x_0 = \begin{pmatrix} I_0 \\ V_0 \end{pmatrix} \quad (7)$$

Matrix A 와 B 는 回路素子에 依存하는 것이고 入力는 w 로 表示하였다. (6)은 一階 nonhomogeneous 微分方程式이고 이것은 一階 scalar nonhomogeneous 微分方程式과 類似하다. 따라서 (6)과 (7)의 解도 類似하게 다음과 같이 表示된다.

$$x = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bw(\tau) d\tau \quad (8)$$

여기에 첫項은 zero-input response이고 둘째項은 zero-state response이다. 여기에 e^{At} 는 A 와 t 에 依存하는 matrix이고 e^{at} 의 展開式과 類似하게

$$e^{At} = I + At + A^2 \frac{t^2}{2!} + A^3 \frac{t^3}{3!} + \dots \quad (9)$$

로 表示된다. 여기에 I 는 單位 matrix이다.

3. State-Space Trajectory의 計算

State-space trajectory를 計算하는데 있어서 是 우선 初期狀態 $x(0)$ 가 주어진 (6)에 依하여 state vector의 初期速度 $\frac{dx}{dt}(0)$ 를 알 수 있다. 다음에 아주 짧은 Δt 를 取하여 이 區間內에서는 速度 $\frac{dx}{dt}$ 가 一定하다고 假定하면 이 區間內에서는 軌跡은 直線이 된다. 그리하여 zero input의 境遇에 $t=0$ 에서의 初期狀態 x_0 에서 始作하여

$$\frac{dx}{dt}(0) = Ax_0 \quad (10)$$

짧은 區間(0, Δt)內에서 速度는 一定하다고 假定하였으므로 Taylor의 展開定理에 依하여

$$x(\Delta t) \approx x_0 + \frac{dx}{dt}(0) \Delta t = x_0 + Ax_0 \Delta t \quad (11)$$

다음 區間($\Delta t, 2\Delta t$)內에는

$$\frac{dx}{dt}(\Delta t) = Ax(\Delta t) \quad (12)$$

이므로

$$\begin{aligned} x(2\Delta t) &\approx x(\Delta t) + \frac{dx}{dt}(\Delta t) \Delta t \\ &= x(\Delta t) + Ax(\Delta t) \Delta t \end{aligned} \quad (13)$$

繼續의으로 하면

$$\begin{aligned} x[(k+1)\Delta t] &= x(k\Delta t) + Ax(k\Delta t) \Delta t \\ &= (I + \Delta t A)x(k\Delta t) \end{aligned} \quad (14)$$

여기에 $k=0, 1, 2, \dots, N$ 이다. 이것은 digital computer로 쉽게 program할 수 있다. 軌跡이 計算되던 回路의 response는 쉽게 얻어진다.

그림 1과 같은 RLC 並列回路에서 RLC가 非線形이지만 time-invariant이고 電流源 is가 없는 zero input 때의 狀態方程式은 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\frac{di_L}{dt} = f_1(i_L, v_C) \quad (15)$$

$$\frac{dv_C}{dt} = f_2(i_L, v_C) \quad (16)$$

(15)와 (16)의 狀態方程式을 matrix form으로 表示하면

$$\frac{dx(t)}{dt} = f[x(t)] \quad (17)$$

그리고 (11)과 (13)에 該當하는 式은 各各 다음과 같이 表示된다.

$$x(\Delta t) \approx x_0 + f(x_0) \Delta t \quad (18)$$

$$x(2\Delta t) \approx x(\Delta t) + f[x(\Delta t)] \Delta t \quad (19)$$

回路의 素子가 非線形이고 time-varying일 때의 狀態方程式은 다음과 같이 表示된다.

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x, t, w) \quad (20)$$

여기에 x 는 state vector이고 w 는 入力이고 f 는 vector-valued function이다. (20)을 equations in the normal form이라 부르고 이것은 線形狀態方程式 (6)의 一般型이다.

非線形 RLC 回路의 理論에 있어서 基本的인 問題는 dynamic equation을 normal form으로 體係의 形式으로 表示하는 것이다. Dynamic equation을 normal form으로 表示할 수 없는 非線形回路가 많기 때문에 非線形回路에서 가장 基本的인 問題는 그러한 表示를 할 수 있는 充分한 條件들을 發見하는 것이다. 그러한 條件들이 더 有用하기 爲하여는 素子의 特性曲線과 回路의 topology로 嚴密하게 表示되어야 하고 觀察에 依하여 그러한 表示가 可能한가를 決定할 수 있다. 萬一 equations in the normal form이 明白한 形態로 주어질 수 있으면 더욱 價値가 있을 것이다.

4. State-Space Trajectory의 形態

一次回路의 軌跡

狀態變數가 하나로 되어있는 $n=1$ 인 一次回路

(first-order network)의 解는 하나의 時間函數 $x_1=X_1(t)$ 로 되어있고 이 境遇에 state space는 一次元이고 軌跡은 그림 2b에 表示한 바와같이 單純히 x_1 軸上의 直線으로 되어있다. 여기서 時間函數 $X_1(t)$ 로부터 軌跡을 그릴 수 있는 同時에 反對로 軌跡으로부터 時間函數 $X_1(t)$ 도 求할 수 있음을 알 수 있다.

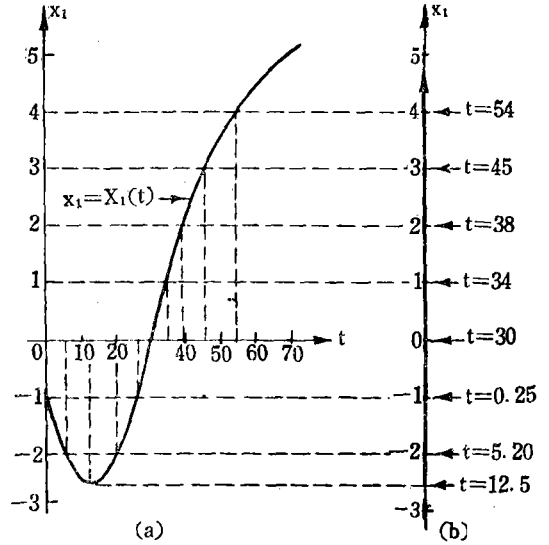


그림 2. 一次回路의 軌跡

二次回路의 軌跡

狀態變數가 2個로 되어있는 $n=2$ 인 二次回路(second-order network)의 解는 2個의 時間函數 $x_1=X_1(t)$ 와 $x_2=X_2(t)$ 로 構成되고 이 境遇에 state space는 二次元이고 軌跡은 x_1-x_2 平面上의 한 曲線으로 되어 있다. $n=2$ 일 때의 state space는 phase plane이라고도 부른다. 萬一 $X_1(t)$ 와 $X_2(t)$ 가 그림 3a와 같으면 이에 該當되는 軌跡은 그림 3b와 같이 된다. 이 軌跡은 open trajectory라고 불리어진다. 왜냐하면 曲線上의 各點은 時間의 한 瞬間에만 該當되기 때문이다.

曲線上의 各點이 時間의 한 瞬間보다 더 많은 것에 該當되는 軌跡도 可能하다. 萬一 $X_1(t)$ 와 $X_2(t)$ 가 그림 4a와 같으면 이에 該當되는 軌跡은 그림 4b와 같이 된다. 이 軌跡은 하나의 閉曲線을 形成하고 있어서 closed trajectory라고 불리어진다. 또한 그림 4a에 表示된 簡單한 波

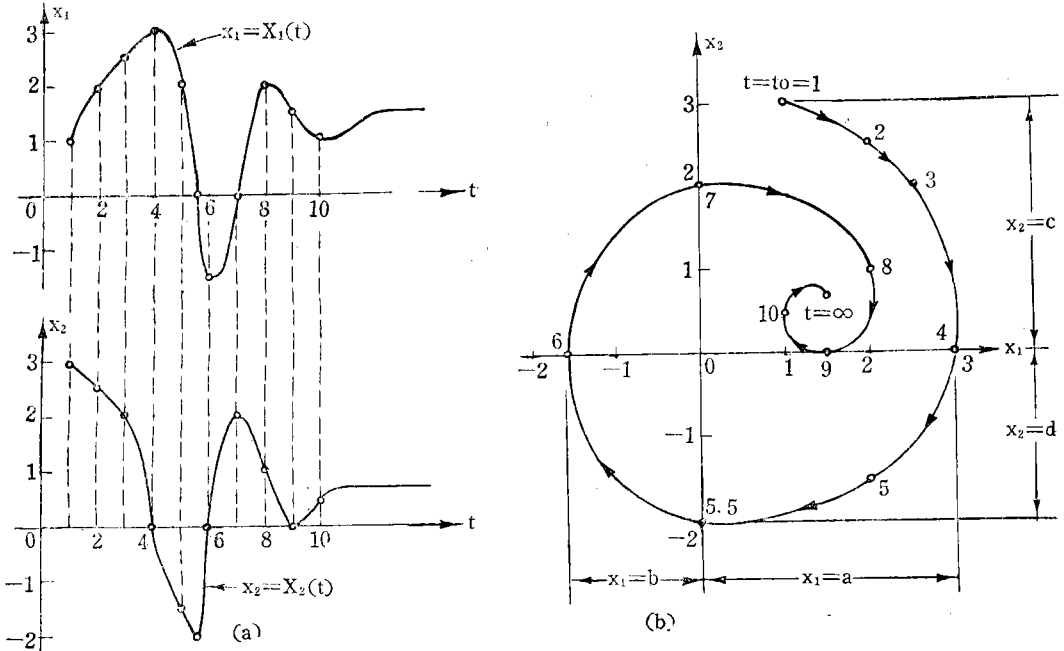


그림 3. 二次回路의 한 open trajectory

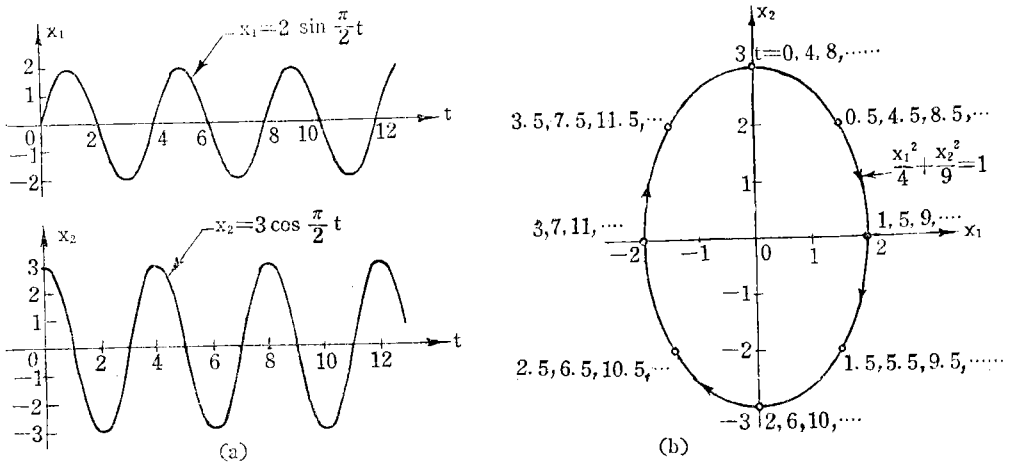


그림 4. 二次回路의 한 closed trajectory.

形에 該當되는 軌跡은 解析的으로 t 를 消去함으로 次々 다음과 같이 求할 수 있다.

$$x_1 = 2 \sin \frac{\pi}{2} t$$

$$x_2 = 3 \cos \frac{\pi}{2} t$$

따라서

$$\frac{x_1^2}{4} + \frac{x_2^2}{9} = 1$$

또한 t 가 增加함에 따라 軌跡이 그림 5b와 같은 하나의 閉曲線이 되는것도 可能하다. 이러한 閉曲線을 limit cycle 이라 부른다. 萬一 $X_1(t)$ 와 $X_2(t)$ 를 oscilloscope의 水平과 垂直單子에 印加하였을때에 생기는 Lissajous figure는 $X_1(t)$ 와 $X_2(t)$ 에 該當되는 軌跡과 똑같다.

以上の 例에서 萬一 軌跡을 얻을 수 있으면 軌跡위에 時間이 表示되어 있지않아도 回路에 關한

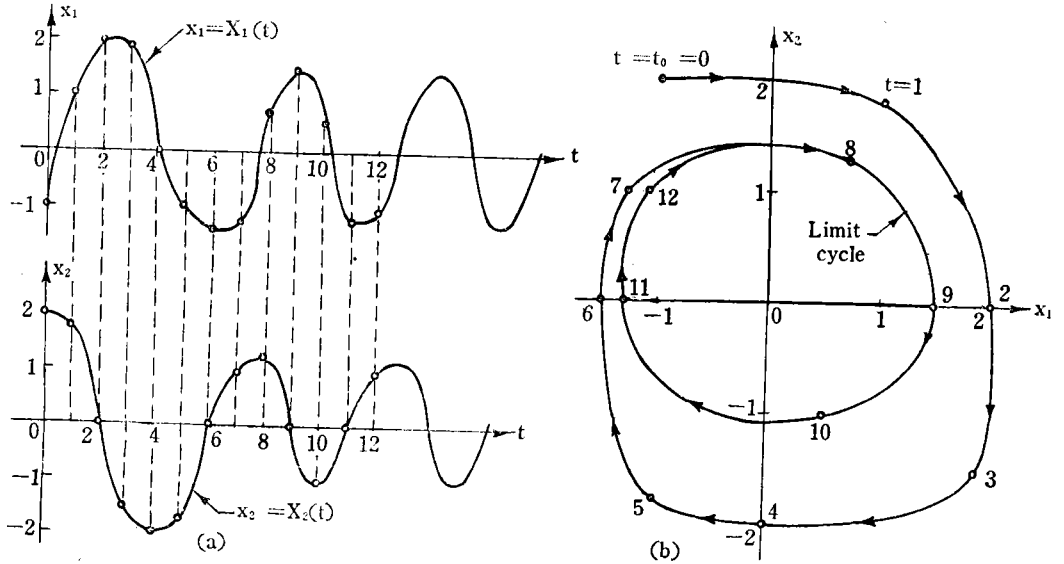


그림 5. Limit cycle 이 되는 二次回路의 軌跡

若干의 定性的인 情報를 알 수 있을것이다. 萬一 軌跡이 open trajectory 이고 ∞ 가 되지 않으면 $X_1(t)$ 와 $X_2(t)$ 는 結局 하나의 一定值로 接近됨을 알 수 있다. 그림 3b의 軌跡에서 $b < x_1 < a$ 이고 $d < x_2 < c$ 인데 이것으로 한 裝置의 定格이 超過하는지 아닌지를 알수도 있다. 한便 軌跡이 結局 limit cycle로 接近하는 것을 알면 $X_1(t)$ 와 $X_2(t)$ 는 結局 어떤 週期的인 波形으로 接近하여 回路는 發振한다는것을 結論지을수 있다.

n 次回路의 軌跡

$n > 2$ 때에 解는 n 個의 時間函數 $x_1 = X_1(t)$, $x_2 = X_2(t)$, ..., $x_n = X_n(t)$ 로 構成되고 state space 는 n 次元이고 軌跡은 $x_1 - x_2 \dots - x_n$ 空間에서 하나의 曲線으로 되어있다.

$n > 3$ 일때에 軌跡을 그리는것은 不可能하다. 그렇지만은 n 次元에 하나의 曲線(表面이 아님)으로 n 次回路의 軌跡을 마음속에 그리는것은 亦是 有用하다. 이와같은 概念은 大端히 重要하며 control system 과 같은 여러 分野의 研究에 널리 應用되고 있다.

5. State-space Trajectory 의 計算例

例 1. 그림 1의 RLC 並列回路에서 電流源 i_s 가 없는 zero input 이고 初期狀態는 $I_0 = 1A$. 및

$V_0 = 1V$ 이다. Underdamped 의 境遇로 $R = 1\Omega$, $L = 1H$ 및 $C = 1F$ 이다. 前述한 方法에 依하여 state-space trajectory 를 計算한다.

狀態方程式은

$$\begin{pmatrix} \frac{di_L}{dt} \\ \frac{dv_C}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_L \\ v_C \end{pmatrix}$$

Initial state

$$\begin{pmatrix} i_L(0) \\ v_C(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Delta t = 0.2 \text{ sec}$ 로 하면 이때의 state 는 (11)에 依하여

$$\begin{pmatrix} i_L(0.2) \\ v_C(0.2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 0.2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.2 \\ 1.6 \end{pmatrix}$$

$2\Delta t$ 일때의 state 는 (13)에 依하여

$$\begin{pmatrix} i_L(0.4) \\ v_C(0.4) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.2 \\ 0.6 \end{pmatrix} + 0.2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1.2 \\ 1.6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1.32 \\ 0.24 \end{pmatrix}$$

$(k+1)\Delta t$ 일때의 state 는 (14)에 依하여

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}[(k+1)\Delta t] &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + 0.2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(k\Delta t) \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0.2 \\ -0.2 & 0.8 \end{pmatrix} \mathbf{x}(k\Delta t)
 \end{aligned}$$

그림 6은 짧은 선으로 그린 open trajectory와 $\Delta t=0.2$ sec로 계산한 점으로 이은 곡선으로 되어있다. Δt 를 아주 더 적게 잡으면 모든 점은 open trajectory 위에 올 것이다.

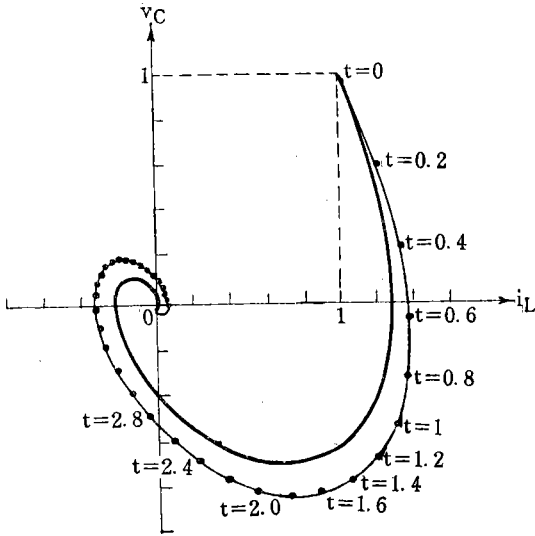


그림 6. Step-by-step 방법으로 계산한 state-space trajectory.

例 2. 그림 7은 capacitor가 非線形인 非線形 time-invariant RLC 회로이고 $q = \alpha v_c + \beta v_c^3$ 으로 주어지고 여기에 $\alpha = 1F$ 이고 $\beta = \frac{1}{3}F/V^2$ 이다. $e_s(t) = \sin 0.5t$ 이고 initial state는 $v_c(0) = 2V$ 와 $i_L(0) = 2A$ 이다.

i_L 와 v_c 에 관한 狀態方程式은

$$v_c = v_L = \frac{1}{2} \frac{di_L}{dt}$$

따라서

$$\frac{di_L}{dt} = 2v_c \tag{21}$$

$$\begin{aligned}
 i_c &= \frac{dq}{dt} = \frac{d}{dt} \left(v_c + \frac{1}{3} v_c^3 \right) \\
 &= (1 + v_c^2) \frac{dv_c}{dt} = -(i_L + i_R) \\
 &= -(i_L + 2v_R) \\
 &= -(i_L + 2v_c - 2e_s)
 \end{aligned}$$

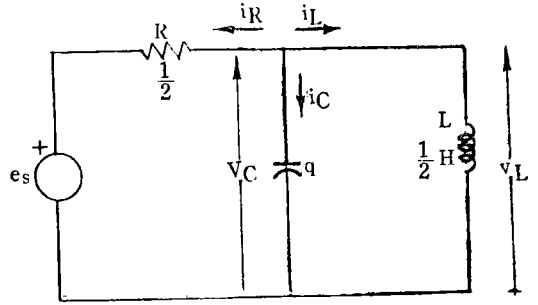


그림 7. Capacitor가 非線形인 非線形回路

따라서

$$\frac{dv_c}{dt} = -\frac{1}{1+v_c^2} i_L - \frac{2}{1+v_c^2} v_c + \frac{2}{1+v_c^2} e_s \tag{22}$$

(21)과 (22)의 狀態方程式을 matrix form으로 表示하면

$$\begin{aligned}
 \frac{dx}{dt} &= \begin{pmatrix} \frac{di_L}{dt} \\ \frac{dv_c}{dt} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -\frac{1}{1+v_c^2} & -\frac{2}{1+v_c^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_L \\ v_c \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{1+v_c^2} \end{pmatrix} e_s \\
 &= \begin{pmatrix} 2v_c \\ \frac{1}{1+v_c^2} (-i_L - 2v_c + 2\sin 0.5t) \end{pmatrix} \tag{23}
 \end{aligned}$$

이것은 (20)과 같은 形態로 equations in the normal form이다. (14) 即

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}(k+1)\Delta t &\approx \mathbf{x}(k\Delta t) + \mathbf{A}\mathbf{x}(k\Delta t)\Delta t \\
 &= \mathbf{x}(k\Delta t) + \frac{d\mathbf{x}(k\Delta t)}{dt} \Delta t \tag{24}
 \end{aligned}$$

$\Delta t=0.2$ sec로 하고 $k=0, 1, 2, \dots$ 에 對한 計算을 하면된다. 우선 初期狀態는

$$\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} i_L(0) \\ v_c(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

이므로 (23)에 依하여

$$\frac{dx}{dt} = (0) \begin{pmatrix} \frac{di_L}{dt}(0) \\ \frac{dv_D}{dt}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4.0 \\ -0.4 \end{pmatrix}$$

다음에 (24)에서 $k=0$ 로 하면

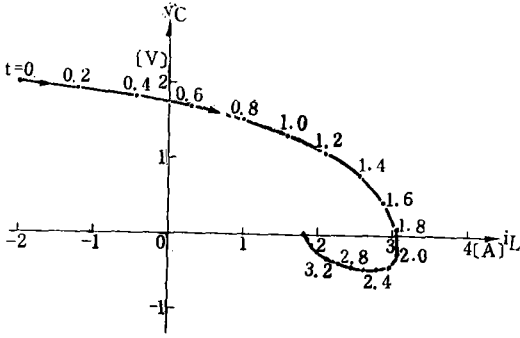


그림 8. 그림 7로 表示된 非線形回路의 軌跡

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}(0.2) &= \mathbf{x}(0) + 0.2 \frac{d\mathbf{x}(0)}{dt} \\
 &= \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} + 0.2 \begin{pmatrix} 4 \\ -0.4 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} -1.2 \\ 1.92 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

繼續해서 計算을 하여 軌跡을 그리면 그림 8과 같이 된다.

參 考 文 獻

1. C.A. Desoer and E.S. Kuh, Basic Circuit Theory, McGraw-Hill, 1969.
2. R.A. Rohrer, Circuit Theory: An Introduction to the State Variable Approach, McGraw-Hill, 1970.
3. B.C. Kuo, Linear Networks and Systems, McGraw-Hill, 1967.
4. L.O. Chua, Introduction to Nonlinear Network Theory, McGraw-Hill, 1969.
5. E.S. Kuh, and R.A. Rohrer, The State-Variable Approach to Network Analysis, Proc. IEEE, vol. 53, no. 7, pp. 672-686, July, 1965.
6. C.A. Desoer, and J. Katzenelson, Nonlinear RLC Networks, Bell System Tech. J., vol. 44, no. 1, pp. 161-198, January 1965.