

프라즈마에 비스듬히 入射된 電磁波의 運動理論

C. T. Swift and F. Crownfield, IEEE Trans. Antennas and Prop. vol. AP-19, pp 81-90, 1971.

1. 序論

프라즈마와 電磁波의 相互作用은 電離層의 研究, 氣象觀測에 關聯된 레이다의 研究, 프라즈마 쉬이트의 透過에 對한 研究, 또한 實驗室에서의 診斷 等의 研究에서 큰 關心을 끌고 있다.

이 問題를 다루는데 있어서 가장 많이 쓰이는 모델은 中性狀態에 있는 固定面內의 冷電子로 構成되어 있는 프라즈마이다. 中性狀態의 固定面內에서 ion 運動은 無視할 수 있고 이는 實際의 경우와 큰 差가 없으나 冷電子라는 假定은 困難한 경우가 많다.

例로서 Tonkc [1], Rommel [2], Dattner [3]의 實驗結果와 metor trail로 부터의 레이다 散亂의 測定結果(그림 1)는 이 假定이 잘 맞지 않음을 보여 주고 있다. 프라즈마 모델로는 그림 1의 最右端의 共振만 說明할 수 있다. 이 共振들은 電子溫度와 非均一 프라즈마 密度에 依한 結果 [4][5]를 보여 주고 있으며 普通 Tonkc-Dattner 共振이라 한다. Parker 等이 使用한 流體 모델[4]은 信號周波數 ω 가 프라즈마 周波數 ω_b 近處에서만 解析이 可能하다. 非均一 프라즈마에 對한 解析으로서는 相異한 프라즈마部分에 對해서 相異한 프라즈마 모델을 利用한 Baldwin [6]과 Ignat[7]의 方法이 있다. 여기서는 프라즈마 모델로서 Maxwell 方程式과 Vlasov 方程式만을 利用해서 問題를 다루고자 한다. Vlasov 方程式은 流體方程式 보다 더욱 記述的이며 ω 와 ω_b 的 差가 클 때 더욱 正確할 뿐 아니라 流體方程式으로는 說明할 수 有する Landau damping 現象[8]을 說明할 수 있다. 여기서 究明하고자 하는 것은 프라즈마 슬랩

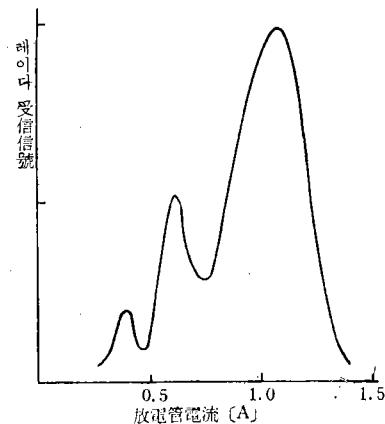


그림 1.

에 入射된 平行分極電磁波의 反射와 透過에 關한 것이다. 프라즈마는 均一한 것으로 가정한다.

2. Vlasov-Maxwell 方程式을 利用한 平面波와 均一한 프라즈마 슬랩과의 相互作用에 對한 解析

그림 2는 問題의 幾何學的關係를 表示하고 있다. 平面波가 入射平面에서 分極된 電氣벽터로서 프라즈마 슬랩에 入射될 때; 電磁波는

$E = E_0 \exp i(k_x \cos\theta + k_z \sin\theta - wt)$ 로 表示한다. 프라즈마 슬랩의 面은 $x=0$, $x=L$ 에 入射平面은 $x-z$ 平面으로, 入射角은 θ 로 한다. $k_z = \omega/c$ 는 自由空間의 傳播定數를 表示하고 ω 는 入射波의 角速度를 表示한다.

運動效果는 프라즈마波의 位相速度와 热速度의 比에 따르게 되는데 이 比는 프라즈마波에만 適用할 수 있다. 이 波는 入射平面에 垂直으로 分

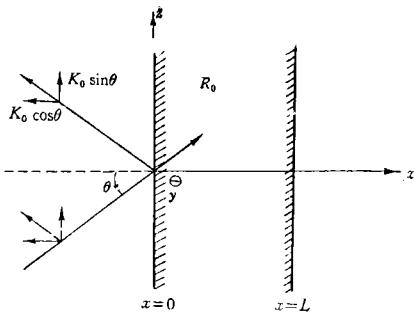


그림 2.

極된 入射波와는 無關하므로 平行分極波만 생차하면 된다.

$x > 0$ 에서 電磁波의 接線方向成分은

$$Hy = H_0 [\exp(i k_o x \cos \theta) + R \exp(-i k_o x \cos \theta)] \\ \cdot \exp[i(k_o z \sin \theta - \omega t)] \quad \dots \dots \dots (1)$$

$$Ez = -H_0 [\exp(i k_o x \cos \theta) - R \exp(-i k_o x \cos \theta)] \\ \cdot \left(\frac{\mu_0}{\epsilon_0} \right)^{\frac{1}{2}} \cos \theta \exp[i(k_o z \sin \theta - \omega t)] \quad \dots \dots \dots (2)$$

로 된다. R 은 磁界에 對한 反射係數, H_0 는 入射波의 磁界의 크기이다.

$x > L$ 에 對해서는

$$Hy = H_0 T \exp(i k_o x \cos \theta) \exp[i(k_o z \sin \theta - \omega t)] \quad \dots \dots \dots (3)$$

$$Ez = -H_0 T \left(\frac{\mu_0}{\epsilon_0} \right)^{\frac{1}{2}} \exp(i k_o x \cos \theta) \exp[i(k_o z \sin \theta - \omega t)] \cos \theta \quad \dots \dots \dots (4)$$

로 된다. T 는 磁界에 對한 透過係數이다. $x=0$, $x=L$ 에서의 境界條件에 依해서 스텝內外의 Z 方向의 變化는 같게 되므로 스텝內에서의 電磁場은 $[E, H] = [E_{(z)}, H_{(z)}] \exp[i(k_o z \sin \theta - \omega t)]$

의 形으로 된다. 따라서 $\exp[i(k_o z \sin \theta - \omega t)]$ 는 數式에서 便宜上 省略한다.

$(f-f_0)$ 를 f_1 으로, $\frac{\partial}{\partial t}$ 를 $i\omega$ 로 表示하면 Vlasov 方程式은

$$-i\omega f_1 + \vec{V} \cdot \frac{\partial f_1}{\partial x} - \frac{e\vec{E}}{m} \cdot \frac{\partial f_0}{\partial \vec{V}} = -v f_1 \quad \dots \dots \dots (5)$$

$$F_e^- = \frac{2ie\omega v_x F_0 \left[(\mu_0/\epsilon_0)^{\frac{1}{2}} (v_x/c) H_{l_z} - (1+i(\nu/\omega)) E_{l_z} \right]}{m V_r^2 [(\omega - k_o V_z \sin \theta + i\nu)^2 - (l\pi V_x/L)^2]} \quad \dots \dots \dots (13)$$

여기서 f_0 는 Maxwell 平衡分布函數이다.

$$f_0 = n_0 F_0 = \frac{n_0 \exp(-v^2/2V_r^2)}{(2\pi V_r^2)^{\frac{3}{2}}}$$

으로 된다. 여기서 f_0 는 非攝動分布函數, \vec{V} 는 粒子의 速度, \vec{x} 는 粒子의 位置이다. (5)式은 Maxwell 方程式에 依해서 풀수 있다.

$$\vec{v} \times \vec{H} = -i\omega \epsilon_0 \vec{E} - e \int f_1 \vec{v} d\vec{v} \quad \dots \dots \dots (6)$$

$$\vec{v} \times \vec{E} = i\omega \mu_0 \vec{H} \quad \dots \dots \dots (7)$$

(6)式에서 $(-e \int f_1 \vec{v} d\vec{v})$ 는 對流電流密度이고, $V_x > 0$ 에 對한 分布函數를 $f_1^+ (\dots V_x \dots)$ 라 하고 $v_z < 0$ 에 對한 것을 $f_1^- (\dots -v_z \dots)$ 라 하면 f_1^+, f_1^- 는 다음式을 滿足한다.

$$(-i\omega + \nu) f_1^+ + v_x \frac{\partial f_1^+}{\partial x} + ik_o z_x \sin \theta f_1^+ \\ - \frac{e}{m} \left(Ez \frac{\partial f_0}{\partial z_x} + Ez \frac{\partial f_0}{\partial V_x} \right) = 0 \quad \dots \dots \dots (8)$$

$$(-i\omega + \nu) f_1^- V_x \frac{\partial f_1^-}{\partial x} + ik_o v_z \sin \theta f_1^- \\ - \frac{e}{m} \left(Ez \frac{\partial f_0}{\partial V_z} - Ex \frac{\partial f_0}{\partial V_x} \right) = 0 \quad \dots \dots \dots (9)$$

$F^+ = f_1^+ + f_1^-$, $F^- = f_1^+ - f_1^-$ 로 하면 다음式을 얻는다.

$$\frac{\partial^2 F^-}{\partial x^2} + \frac{(\omega + iv - k_o V_z \sin \theta)^2 F^-}{v_x^2} \\ - 2ie \frac{(\omega + iv - k_o V_z \sin \theta)}{mv_x} \frac{\partial f_0}{\partial v_x} E_x \\ - \frac{2e}{mv_x} \frac{\partial f_0}{\partial v_x} \frac{\partial E_z}{\partial x} = 0 \quad \dots \dots \dots (10)$$

모든 粒子가 $x=0$, $x=L$ 에서 反射한다고 하면 F^- 는 $x=0$, $x=L$ 에서 0이 된다. 이 條件은 Fourier sine 級數에서도 滿足되므로

$$F^- = \sum_{l=1}^{\infty} F_l(v) \sin \frac{l\pi x}{L} \quad \dots \dots \dots (11)$$

$$Fl = \frac{2}{L} \int_0^L F^- \sin \frac{l\pi x}{L} dx \quad \dots \dots \dots (12)$$

로 된다. (10)(11)式의 關係로 미루어 보아 E_x 에 對해서는 Fourier sine 級數로, E_z 에 對해서는 cosin 級數로 되어 있음을 알수 있다.

E_x , E_z , H_g 에 對한 Fourier 級數의 成分을 E_{lx} , E_{lz} , H_{lx} 라 하면

$$\text{電流의 } x \text{ 成分은} \\ j_x = -e \int \int_{-\infty}^{\infty} dv_x dv_y \int_0^{\infty} v_x F^- dv_x$$

로 定義되므로 j_z 的 Fourier 成分은

$$j_{zx} = \frac{i\omega_p^2 \omega \epsilon_0 L}{V_T^2 e \pi} \left[J_{1z} E_{lx} - \left(\frac{\mu_0}{\epsilon_0} \right)^{\frac{1}{2}} \frac{J_{2z}}{C} H_{ly} \right] \quad (14)$$

로 된다. 여기서 J_{1z} , J_{2z} 은

$$J_{1z} = \left(1 + i \frac{\nu}{\omega} \right) \frac{2\rho\pi}{L} \iint_{-\infty}^{\infty} dv_x dv_z \cdot \int_0^{\infty} \frac{v_x^2 F_0 v_z dv_z}{(\omega - k_0 v_z \sin \theta + i\nu)^2 (l\pi r_z/L)^2} \quad (15)$$

$$J_{2z} = \frac{2i\pi}{L} \iint_{-\infty}^{\infty} dv_x dv_z \cdot \int_0^{\infty} \frac{V_x^2 V_z F_0 v_z dv_z}{(\omega - k_0 v_z \sin \theta + i\nu)^2 (l\pi v_z/L)^2} \quad (16)$$

非擴動分布函數를 Maxwellian 으로 假定하므로

$$\int_{-\infty}^{\infty} dv_z F_0(v_z, v_y, v_z) = F_0(v_z, v_x)$$

로 된다. 또한 被積分函數가 偶函數일 때 積分限界는 全實數軸으로 擴張할 수 있으므로 (15)(16)式은 다음과 같이 쓸수 있다.

$$J_{1z} = \left(1 + i \frac{\nu}{\omega} \right) \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{dv_x dv_z F_0 v_z}{\omega - k_0 v_z \sin \theta - l\pi v_z/L + i\nu} \quad (17)$$

$$J_{2z} = \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{dv_x dv_z v_x v_z F_0}{\omega - k_0 v_z \sin \theta - l\pi v_z/L + i\nu} \quad (18)$$

z 成分도 같은 方法으로 다음과 같이 된다.

$$j_{yz} = \frac{\omega_p^2 \omega \epsilon_0 L}{v_T^2 l \pi} J_{3z} E_{ly} - \left(\frac{\mu_0}{\epsilon_0} \right)^{\frac{3}{2}} \frac{J_{4z}}{C} H_{ly} \quad (19)$$

여기서

$$J_{3z} = \left(1 + i \frac{\nu}{\omega} \right) \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{dv_x dv_z F_0 v_z}{\omega - k_0 v_z \sin \theta - (l\pi v_z/L) + i\nu} \quad (20)$$

$$J_{4z} = \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{dv_x dv_z F_0 v_z^2}{\omega - k_0 v_z \sin \theta - (l\pi v_z/L) + i\nu} \quad (21)$$

(17)(18)(20)(21)은 프라즈마 分布函數 $Z(\rho)$ 로 表示할 수 있다. [9]

$$Z(\rho) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx \exp(-x^2)}{x - \rho} \quad (22)$$

여기서

$$\rho = \frac{k_z L}{l\pi} \frac{1 + i(\nu/\omega)}{\sqrt{2(V_T/C)} (1 + R_0^2 L^2 \sin^2 \theta / l^2 \pi^2)} \quad (23)$$

로 되고

$$J_{1z} = - \left(1 + i \frac{\nu}{\omega} \right) \frac{2l\pi}{k_z L} \left(\frac{V_T}{C} \right)^2 \frac{1}{k_0} \rho^2 [1 + \rho Z(\rho)] \quad (24)$$

$$J_{2z} = 2 \left(\frac{v_T}{C} \right)^2 \sin \theta \left(\frac{l\pi}{k_z L} \right) \frac{C}{k_0} \rho^3 [Z(\rho) - 2\rho^2 Z(\rho) - 2\rho] \quad (25)$$

$$J_{3z} = -2 \left(1 + i \frac{\nu}{\omega} \right) \sin \theta \left(\frac{v_T}{C} \right)^2 \frac{1}{k_0} \rho^2 [1 + \rho Z(\rho)] \quad (26)$$

$$J_{4z} = \frac{C}{\sin \theta} [J_{3z} - \frac{l\pi}{k_z L} \frac{1}{C} J_{2z}] \quad (27)$$

$\nu \rightarrow 0$ 될 때 (22)의 積分值가 存在하게 되어 Landau damping 이 일어난다.

(6)(7)式을 Fourier 分析하여

$$\frac{l\pi}{L} E_{lx} = -ik_0 \sin \theta E_{lx} - i\omega \mu_0 H_{ly} \quad (28)$$

