Affine 接續의 射影變換의 擴張

尹 玉 鏡

§1. 序 論

Affine 接續空間에 있어서 두가지 非對稱인 接續 $\Gamma_{e}{}^{h}{}_{j}$, $\Gamma_{j}{}^{h}{}_{i}$ 가 주어져서 각 接續에 관한 測地線이 一致하는 接續의 射影變換은 일반적으로

$$\frac{1}{2}(\Gamma_{j}{}^{h}{}_{i}+\Gamma_{i}{}^{h}{}_{j})=\frac{1}{2}(\Gamma_{j}{}^{h}{}_{i}+\Gamma_{i}{}^{h}{}_{j})+p_{j}\delta_{i}{}^{h}+p_{i}\delta_{j}{}^{h}$$

로 주어지며, vector의 平行性을 保存하는 가장 일반적인 變換은

$$\Gamma_{j}{}^{h}{}_{i}=\Gamma_{j}{}^{h}{}_{i}+2p_{j}\delta_{i}{}^{h}$$

로 주어진다.

이 論文에서는 測地線이나 Vector 의 方向을 不變으로 하는 것이 아니고 測地線의 接線 Vector 이나 一般的인 Vector v^{j} 의 方向을 混合 Tensor $A_{j}{}^{i}(x)$에 의해서 $A_{j}{}^{i}v^{j}$ 로 變換했을 때의 接續의 일반적인 變換을 求하고, 이로부터 派生되는 몇 가지 결과를 얻어 보기로 하였다. §2, §3은 주로 참고문헌 〔1〕의 제 7 장의 확장이며, §4에서 應用의 전망에 관하여 言及하였다.

§2. 非對稱接續의 射影變換의 擴張

非對稱인 Affine 接續 $\Gamma_{j}{}^{h}{}_{i}$ 가 주어진 Affine 空間 M에 있어서 媒介變數를 임의로 취하면 그 測地線의 方程式은 一般的으로

$$\frac{dx^{k}}{dt}\left(\frac{d^{2}x^{h}}{dt^{2}}+\Gamma_{j}{}^{h}{}_{i}\frac{dx^{j}}{dt}\frac{dx^{i}}{dt}\right)-\frac{dx^{h}}{dt}\left(\frac{d^{2}x^{k}}{dt^{2}}+\Gamma_{j}{}^{k}{}_{i}\frac{dx^{j}}{dt}\frac{dx^{i}}{dt}\right)=0\cdots(1)$$

로 주어진다.

하나의 微分可能多樣體 M에 있어서, 두 가지의 Affine 接續 $\Gamma_{j}{}^{h}{}_{i}$, $\Gamma_{j}{}^{h}{}_{i}$ 가 주어져 있는 경우를 생각하자. 接續 $\Gamma_{j}{}^{h}{}_{i}$ 에 관한 測地線의 方程式, 즉 (1)의 解曲線이 $x^{i}=x^{i}(t)$라 하면 $\frac{dx^{i}}{dt}$는 測地線의 接線 Vector 이다. 지금 M에 하나의 混合 Tensor $A_{j}{}^{i}(x^{1},\cdots,x^{n})$가 주어져 있고,

$$A_{j}{}^{i}(x^{1}(t),\cdots,x^{n}(t))\frac{dx^{j}(t)}{dt}$$

가 $\Gamma_{j}{}^{h}{}_{i}$ 에 관한 測地線의 接線 Vector 가 되는 경우를 고찰해 보기로 한다.

이 때 $\Gamma_{j\ i}^{\ h}$에 관한 測地線의 方程式은

$$A_{\alpha}^{\ k}\frac{dx^{\alpha}}{dt}\left\{\frac{d}{dt}\left(A_{\beta}^{\ h}\frac{dx^{\beta}}{dt}\right)+\Gamma_{j\ i}^{\ h}A_{\beta}^{\ j}A_{\gamma}^{\ i}\frac{dx^{\beta}}{dt}\frac{dx^{\gamma}}{dt}\right\}$$

$$-A_{\alpha}^{\ h}\frac{dx^{\alpha}}{dt}\left\{\frac{d}{dt}\left(A_{\beta}^{\ k}\frac{dx^{\beta}}{dt}\right)+\Gamma_{j\ i}^{\ k}A_{\beta}^{\ j}A_{\gamma}^{\ i}\frac{dx^{\beta}}{dt}\frac{dx^{\gamma}}{dt}\right\}=0 \quad \cdots\cdots(2)$$

로 된다.

$$\frac{d}{dt}\left(A_{\beta}^{\ h}\frac{dx^{\beta}}{dt}\right)=\frac{\partial}{\partial x^{\gamma}}A_{\beta}^{\ h}\frac{dx^{\beta}}{dt}\frac{dx^{\gamma}}{dt}+A_{\beta}^{\ h}\frac{d^2x^{\beta}}{dt^2}$$

이므로 (2) 式을 變形하면

$$A_{\alpha}^{\ k}A_{\beta}^{\ h}\frac{dx^{\alpha}}{dt}\frac{d^2x^{\beta}}{dt^2}-A_{\alpha}^{\ h}A_{\beta}^{\ k}\frac{dx^{\alpha}}{dt}\frac{d^2x^{\beta}}{dt^2}$$

$$+\left\{A_{\alpha}^{\ k}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\gamma}}A_{\beta}^{\ h}+\Gamma_{j\ i}^{\ h}A_{\beta}^{\ j}A_{\gamma}^{\ i}\right)-A_{\alpha}^{\ h}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\gamma}}A_{\beta}^{\ k}+\Gamma_{j\ i}^{\ k}A_{\beta}^{\ j}A_{\gamma}^{\ i}\right)\right\}\frac{dx^{\alpha}}{dt}\frac{dx^{\beta}}{dt}\frac{dx^{\gamma}}{dt}$$

$$=0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2')$$

를 얻는다. (1) 式에 의해서

$$\frac{dx^k}{dt}\frac{d^2x^h}{dt^2}-\frac{dx^h}{dt}\frac{d^2x^k}{dt^2}=\left(\Gamma_{j\ i}^{\ k}\frac{dx^h}{dt}-\Gamma_{j\ i}^{\ h}\frac{dx^k}{dt}\right)\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^i}{dt}$$

이므로

$$A_{\alpha}^{\ k}A_{\beta}^{\ h}\frac{dx^{\alpha}}{dt}\frac{d^2x^{\beta}}{dt^2}-A_{\alpha}^{\ h}A_{\beta}^{\ k}\frac{dx^{\alpha}}{dt}\frac{d^2x^{\beta}}{dt^2}$$

$$=A_{\alpha}^{\ k}A_{\beta}^{\ h}\left(\frac{dx^{\alpha}}{dt}\frac{d^2x^{\beta}}{dt^2}-\frac{dx^{\beta}}{dt}\frac{d^2x^{\alpha}}{dt^2}\right)$$

$$=A_{\alpha}^{\ k}A_{\beta}^{\ h}\left(\Gamma_{j\ i}^{\ \alpha}\frac{dx^{\beta}}{dt}-\Gamma_{j\ i}^{\ \beta}\frac{dx^{\alpha}}{dt}\right)\frac{dx^j}{dt}\frac{dx^i}{dt}$$

$$=(A_j^{\ k}A_{\alpha}^{\ h}-A_{\alpha}^{\ k}A_j^{\ h})\Gamma_{\beta\ \gamma}^{\ j}\frac{dx^{\alpha}}{dt}\frac{dx^{\beta}}{dt}\frac{dx^{\gamma}}{dt}$$

를 (2′)에 대입하면

$$\left\{(A_j^{\ k}A_{\alpha}^{\ h}-A_{\alpha}^{\ k}A_j^{\ h})\Gamma_{\beta\ \gamma}^{\ j}+A_{\alpha}^{\ k}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\gamma}}A_{\beta}^{\ h}+\Gamma_{j\ i}^{\ h}A_{\beta}^{\ j}A_{\alpha}^{\ i}\right)\right.$$

$$\left.-A_{\alpha}^{\ h}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\gamma}}A_{\beta}^{\ k}+\Gamma_{j\ i}^{\ k}A_{\beta}^{\ j}A_{\gamma}^{\ i}\right)\right\}\frac{dx^{\alpha}}{dt}\frac{dx^{\beta}}{dt}\frac{dx^{\gamma}}{dt}=0 \quad \cdots(3)$$

로 된다. (3)式은 α, β, γ의 變換에 의해서 不變이므로, 이러한 式은 모두 6개 얻어진다. 이들 6개의 式을 모두 더하고

$$T_{\beta\ \alpha}^{\ h}\equiv\frac{1}{2}\left(\bar{\Gamma}_{j\ i}^{\ h}+\bar{\Gamma}_{i\ j}^{\ h}\right)A_{\beta}^{\ j}A_{\gamma}^{\ i}-\frac{1}{2}\left(\Gamma_{\beta\ \gamma}^{\ j}+\Gamma_{\gamma\ \beta}^{\ j}\right)A_j^{\ h}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^{\gamma}}A_{\beta}^{\ h}+\right.$$

$$\left.\frac{\partial}{\partial x^{\beta}}A_{\gamma}^{\ h}\right)$$

라 하면

$$(A_\alpha{}^k T_\beta{}^h{}_\gamma + A_\beta{}^k T_\gamma{}^h{}_\alpha + A_\gamma{}^k T_\alpha{}^h{}_\beta - A_\alpha{}^h T_\beta{}^k{}_\gamma - A_\beta{}^h T_\gamma{}^k{}_\alpha - A_\gamma{}^h T_\alpha{}^k{}_\beta)\frac{dx^\alpha}{dt}\frac{dx^\beta}{dt}\frac{dx^\gamma}{dt}$$

$$=0 \quad \cdots\cdots(4)$$

를 얻는다. 여기서 $\frac{dx^\alpha}{dt}$는 測地線의 初期條件으로서 임의로 잡을 수 있으므로 空間 M의 모든 點에 관해서

$$A_\alpha{}^k T_\beta{}^h{}_\gamma + A_\beta{}^k T_\gamma{}^h{}_\alpha + A_\gamma{}^k T_\alpha{}^h{}_\beta - A_\alpha{}^h T_\beta{}^k{}_\gamma - A_\beta{}^h T_\gamma{}^k{}_\alpha - A_\gamma{}^h T_\alpha{}^k{}_\beta = 0 \quad \cdots\cdots(5)$$

이 成立한다. 여기서 $T_\beta{}^h{}_\gamma$는 β, γ에 관해서 對稱이므로 (5) 式을 만족하는 가장 일반적인 관계는

$$T_j{}^h{}_i = p_j A_i{}^h + p_i A_j{}^h$$

이다. 여기서 p_i는 임의의 共變 Vector 이다.

따라서 다음 관계식을 얻는다.

$$\frac{1}{2}(\Gamma_\alpha{}^h{}_\beta + \Gamma_\beta{}^h{}_\alpha)A_i{}^\alpha A_j{}^\beta$$

$$= \frac{1}{2}(\Gamma_j{}^\alpha{}_i + \Gamma_i{}^\alpha{}_j)A_\alpha{}^h - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j}A_i{}^h + \frac{\partial}{\partial x^i}A_j{}^h\right) + p_j A_i{}^h + p_i A_j{}^h \quad \cdots(6)$$

定理 1. 微分可能多樣體 M에 두 가지의 Affine 接續 $\Gamma_j{}^h{}_i$, $\overset{\prime}{\Gamma}_j{}^h{}_i$가 주어지고 混合 Tensor $A_j{}^i$가 주어졌을 때, $\Gamma_j{}^h{}_i$에 관한 測地線의 接線 Vector $\frac{dx^i}{dt}$에 대해서 $A_j{}^i\frac{dx^j}{dt}$가 $\overset{\prime}{\Gamma}_j{}^h{}_i$에 관한 測地線의 接線 Vector가 되는 가장 일반적인 變換은 (6)으로 주어진다.

定理 1에 있어서 特히 $A_j{}^i = \delta_j{}^i$이면 $\Gamma_j{}^h{}_i$와 $\overset{\prime}{\Gamma}_j{}^h{}_i$에 관한 接線 Vector는 일치하므로 두 가지의 測地線은 일치한다. 즉 이때

$$\frac{1}{2}(\overset{\prime}{\Gamma}_j{}^h{}_i + \overset{\prime}{\Gamma}_i{}^h{}_j) = \frac{1}{2}(\Gamma_j{}^h{}_i + \Gamma_i{}^h{}_j) + p_j\delta_i{}^h + p_i\delta_j{}^h \quad \cdots\cdots(7)$$

이 Affine 接續의 射影變換이 된다. 따라서 (6)은 射影變換의 하나의 擴張이라 할 수 있다.

§ 3. 平行 Vector 場의 移動

§ 2에서 논한 空間에 있어서 임의의 反變 Vector 場 $v^h(x)$가 주어지고, 임의의 正則인 曲線 $\gamma(t)$: $x^h = x^h(t)$에 따라서, $v^h(x^h(t))$가 $\Gamma_j{}^h{}_i$에 관해서 平行인 Vector 函數이면

$$\frac{dv^h(x(t))}{dt}+\Gamma_j{}^h{}_i\frac{dx^j}{dt}v^i=\lambda v^h$$

즉

$$\left(\frac{\partial v^h}{\partial x^j}+\Gamma_j{}^h{}_i v^i\right)\frac{dx^j}{dt}=\lambda v^h$$

이므로, 일반적으로

$$v^l\left(\frac{\partial v^h}{\partial x^j}+\Gamma_j{}^h{}_i v^i\right)\frac{dx^j}{dt}-v^h\left(\frac{dv^l}{dt}+\Gamma_j{}^l{}_i v^i\right)\frac{dx^i}{dt}=0$$

을 만족한다. 여기서 곡선 $\gamma(t)$는 임의임으로 결국

$$v^l\left(\frac{\partial v^h}{\partial x^j}+\Gamma_j{}^h{}_i v^i\right)-v^h\left(\frac{\partial v^l}{\partial x^j}+\Gamma_j{}^l{}_i v^i\right)=0 \quad\cdots\cdots\cdots(1)$$

을 얻는다.

지금 混合 Tensor $A_j{}^i$에 대해서

$$\bar{v}^h=A_j{}^h v^j \quad\cdots\cdots\cdots(2)$$

라 하고 $\gamma(t)$에 관해서 $\bar{v}^h=A_j{}^i(x(t))v^j(x(t))$가 $\Gamma_j{}^h{}_i$에 관해서도 平行인 Voctor 函數이면

$$\bar{v}^l\left(\frac{\partial \bar{v}^h}{\partial x^j}+\Gamma_j{}^h{}_i\bar{v}^i\right)-\bar{v}^h\left(\frac{\partial \bar{v}^l}{\partial x^j}+\Gamma_j{}^l{}_i\bar{v}^i\right)=0 \quad\cdots\cdots\cdots(3)$$

을 만족한다. (2)를 (3)에 대입하면

$$\left\{A_\alpha{}^l\left(\frac{\partial}{\partial x^j}A_\beta{}^h+\Gamma_j{}^h{}_i A_\beta{}^i\right)-A_\alpha{}^h\left(\frac{\partial}{\partial x^j}A_\beta{}^l+\Gamma_j{}^l{}_i A_\beta{}^i\right)\right\}v^\alpha v^\beta$$
$$+(A_\alpha{}^l A_\beta{}^h-A_\alpha{}^h A_\beta{}^l)v^\alpha\frac{\partial v^\beta}{\partial x^j}=0$$

을 얻는다. 이 式과 여기서 α,β를 교환해서 얻는 式을 서로 더하고 (1)을 대입하면

$$(A_\alpha{}^l\nabla_j A_\beta{}^h+A_\beta{}^l\nabla_j A_\alpha{}^h-A_\alpha{}^h\nabla_j A_\beta{}^l-A_\beta{}^h\nabla_j A_\alpha{}^l)v^\alpha v^\beta=0 \quad\cdots\cdots\cdots(4)$$

을 얻는다. 단, 여기서

$$\nabla_j A_\beta{}^h=\frac{\partial}{\partial x^j}A_\beta{}^h+A_\beta{}^i\Gamma_j{}^h{}_i-A_i{}^h\Gamma_j{}^i{}_\beta$$

이다. 여기서 曲線은 임의이고, 또 曲線 위의 한 點에서는 v^h는 初期値로서 임의로 취할 수 있으므로 결국

$$A_k{}^l\nabla_j A_i{}^h+A_i{}^l\nabla_j A_k{}^h-A_k{}^h\nabla_j A_i{}^l-A_i{}^h\nabla_j A_k{}^l=0$$

로 얻는다. 이 式을 만족하는 일반적인 형태는

$$\nabla_j A_i{}^h=2p_j A_i{}^h$$

이므로

$$\frac{\partial A_i^h}{\partial x^j}+A_i^l\Gamma_j{}^h{}_l-A_l^h\Gamma_j{}^l{}_i=2p_jA_i^h \quad \cdots\cdots(5)$$

가 구하는 變換의 가장 일반적인 式이다. 여기서 p_j는 임의의 共變 Vector이다.

여기서 A_i^h의 $\Gamma_j{}^h{}_i$에 관한 共變微分을

$$A_{i,}{}^h{}_j=\frac{\partial}{\partial x^j}A_i^h+A_i^l\Gamma_j{}^h{}_l-A_l^h\Gamma_j{}^l{}_i$$

라 하면 (5)는

$$\bar{\Gamma}_j{}^h{}_k=\Gamma_j{}^h{}_k+2p_j\delta_k^h-A'{}_r{}^lA_{l,}{}^h{}_j \quad \cdots\cdots(6)$$

로 된다. 단, $A'{}_k{}^lA_l^i=\delta_k^i$이다.

定理 2. Affine 接續空間 M에 있어서 주어진 混合 Tensor A_j^i에 대해서 $\Gamma_j{}^h{}_i$에 관한 平行 Vector 場 V^i가 $\bar{\Gamma}_j{}^h{}_i$에 관해서는 $A_j^iv^j$가 平行 Vector 場이 되는 가장 일반적인 Affine 接續의 變換은 (6)으로 주어진다.

定理 (2)에서 $A_j^i=\delta_j^i$라 하면 (6)은

$$\bar{\Gamma}_j{}^h{}_k=\Gamma_j{}^h{}_k+2p_j\delta_k^h \quad \cdots\cdots(7)$$

로 되고, 이것이 Vector의 方向의 平行性을 保存하는 가장 일반적인 接續의 變換이며 §2의 (7)과 구별하기 위해서 片側射影變換이라고 부른다.

여기서 $\Gamma_j{}^h{}_i$에 관한 曲率 Tensor $R_{kji}{}^h$와 (6)으로 주어지는 $\bar{\Gamma}_j{}^h{}_i$에 관한 曲率 Tensor $\bar{R}_{kji}{}^h$ 사이의 관계를 구하면

$$A_i^l\bar{R}_{kjl}{}^h=A_l^hR_{kji}{}^l+2(\partial_kp_j-\partial_jp_k)A_i^h \quad \cdots\cdots(8)$$

이다. (8)로부터

$$\bar{R}_{kji}{}^h=A'{}_i{}^aA_l^hR_{kja}{}^l+2(\partial_kp_j-\partial_jp_k)\delta_i^h$$

를 얻으므로 h와 i에 관해서 縮約하면

$$\bar{R}_{kji}{}^i=R_{kji}{}^i+2n(\partial_kp_j-\partial_jp_k)$$

$$\therefore\ \bar{V}_{kj}=V_{kj}+2n(\partial_kp_j-\partial_jp_k)$$

단, $V_{kj}=R_{kji}{}^i$, $\bar{V}_{kj}=\bar{R}_{kji}{}^i$이고 이것은 等積接續일 때는 0으로 되는 것이다. 일반적으로 V_{kj}는 共變 Vector 場의 의回轉으로서

$$V_{kj}=\partial_k\Gamma_j{}^i{}_i-\partial_j\Gamma_k{}^i{}_i$$

로 표시되므로 다음 定理를 얻는다.

定理 3. 局所的으로는 非對稱接續은 적당한 變換 (6)에 의해서 等積인 接續으로 고칠 수 있다.

즉 $p_j=-\frac{1}{2n}\Gamma_j{}^i{}_i$라 하면 $\bar{V}_{kj}=0$으로 된다.

다음에 變換 (6)을 다시 한번 검토해 보기로 한다.

만일 q_j 를 임의의 共變 Vector 場이라 하고,

$$A_{l,}{}^{h}{}_{j}=2q_jA_l{}^h \qquad \cdots\cdots(9)$$

인 경우를 생각해 보자. (9)가 積分可能일 조건은

$$A_i{}^lR_{kjl}{}^h=A_l{}^hR_{kji}{}^l+2(\partial_kq_j-\partial_jq_k)A_i{}^h$$

이므로 h, i 에 관해서 縮約하면 $\partial_kq_j-\partial_jq_k=0$ 을 얻는다.

따라서 q_j 는 勾配 Vector 이고

$$A_i{}^lR_{kjl}{}^h=A_l{}^hR_{kji}{}^l$$

이다. (9)가 積分可能일 때 (6)은

$$\Gamma_j{}^h{}_k=\Gamma_j{}^h{}_k+2v_j\delta_k{}^h, \qquad 단\ v_j=p_j-q_j \qquad \cdots\cdots(10)$$

으로 된다. 이 變換은 片側射影變換 (7)과 같다. 따라서 이 경우는 $\Gamma_j{}^h{}_i$ 에 관한 平行 Vector 場은 $\Gamma_j{}^h{}_i$ 에 관해서도 平行 Vector 場이 되고, 逆도 成立하므로 $\Gamma_j{}^h{}_i$ 에 관한 平行 Vector 場을 V^i 라 하고 (9)를 만족하는 $A_j{}^i$ 를 구하면 Vector $A_j{}^iv^j$ 도 또한 $\Gamma_j{}^h{}_i$ 에 관하여 平行 Vector 場이 된다. 따라서 $A_j{}^iv^j$ 도 또한 (1)의 解이다.

그러므로 다음 定理를 얻는다.

定理 4. Affine 接續空間 M에 있어서, 接續 $\Gamma_j{}^h{}_i$ 에 관한 平行 Vector 場을 $v^i(x)$라 하면 q_k를 임의의 勾配 Vector라 할 때,

$$A_{j,}{}^{i}{}_{k}=2q_kA_j{}^i$$

가 積分可能이면 $A_j{}^i(x)v^j(x)$도 또한 平行 Vector 場이다.

§4. 對稱接續의 變換과 應用의 展望

§2에 있어서 Affine 接續이 對稱인 경우 즉 $\Gamma_j{}^h{}_i=\Gamma_i{}^h{}_j$, $\Gamma_j{}^h{}_i=\Gamma_i{}^h{}_j$ 인 경우는 擴張된 射影變換은

$$\Gamma_\alpha{}^h{}_\beta A_i{}^\alpha A_j{}^\beta=\Gamma_i{}^\alpha{}_jA_\alpha{}^h-\frac{1}{2}(\partial_jA_i{}^h+\partial_iA_j{}^h)+p_jA_i{}^h+p_iA_j{}^h \qquad \cdots\cdots(1)$$

로 된다. 이 式은 變形하면

$$\Gamma_\alpha{}^h{}_\beta A_i{}^\alpha A_j{}^\beta=(\Gamma_i{}^\alpha{}_j+p_j\delta_i{}^\alpha+p_i\delta_j{}^\alpha)A_\alpha{}^h-\frac{1}{2}(\partial_jA_i{}^h+\partial_iA_j{}^h)$$

로 쓸 수 있으므로

$$\overset{*}{\Gamma}_i{}^\alpha{}_j=\Gamma_i{}^\alpha{}_j+p_j\delta_i{}^\alpha+p_i\delta_j{}^\alpha \qquad \cdots\cdots(2)$$

라 하면

$$\Gamma_\alpha{}^h{}_\beta A_i{}^\alpha A_j{}^\beta = \overset{*}{\Gamma}_i{}^\alpha{}_j A_\alpha{}^h - \frac{1}{2}(\partial_j A_i{}^h + \partial_i A_j{}^h) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

로 된다.

(2)는 測地線을 不變으로 하는 일반적은 對稱接續의 射影變換이므로, 微分可能인 空間 M에 一群의 Path가 주어지면, $\Gamma_j{}^h{}_i = \Gamma_i{}^h{}_j$라 하며 §2의 (1)을 만족하는 曲線群을 Path로 하는 對稱 Affine 接續은 (2)인 變換을 除外하고 一意的으로 정해진다. 따라서 (2)인 變換을 除外하고, $\Gamma_j{}^h{}_i$에 관한 測地線의 接線 Vector를 $A_j{}^i \dfrac{dx^j}{dt}$로 바꾼 것을 測地線의 接線 Vector로 가지는 Affine 接續의 變換은

$$\Gamma_\alpha{}^h{}_\beta A_i{}^\alpha A_j{}^\beta = \Gamma_i{}^\alpha{}_j A_\alpha{}^h - \frac{1}{2}(\partial_j A_i{}^h + \partial_i A_j{}^h) \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

로 주어진다.

만일 $A_i{}^h$가 어떤 反變 Vector A^h의 微分, 즉 $A_i{}^h = \dfrac{\partial A^h}{\partial x^i}$이면 (4)는

$$\Gamma_\alpha{}^h{}_\beta \frac{\partial A^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial A^\beta}{\partial x^j} = \Gamma_i{}^\alpha{}_j \frac{\partial A^h}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial^2 A^h}{\partial x^i \partial x^j} \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

로 되고, 이것은 座標變換에 의한 接續의 變換式과 같은 것이 된다. 이 경우는 $\Gamma_j{}^h{}_i$에 관한 測地線을 $x^i = \psi^i(t)$라 할 때,

$$x^i = A^i(\psi(t))$$

가 $\Gamma_j{}^h{}_i$에 관한 測地線이 된다. 그러나 이것은 本質的으로는 座標變換의 式과 區別하여야 한다.

重力場의 理論에 있어서는 어떤 重力場이 주어진 空間에서는 對稱인 Riemann 接續 $\Gamma_j{}^h{}_i$가 주어지고, 일반적으로 自由質點의 軌跡은 測地線으로 주어짐을 알고 있다. 이러한 空間에 電磁場이 作用해서 自由質點의 軌跡을 바꿀 때 電磁 Potential을 $A_i{}^h$와 관련하며 定義할 수 있으면 (4)나 (5)인 꼴의 變換에 의해서 重力場과 電磁場이 共存하는 統一場에서의 接續 $\Gamma_j{}^h{}_i$를 구할 수 있고, Weyl의 理論에서의 缺點이었든 自由質點問題를 解消할 수 있으리라 생각된다.

變換 (2)는 Weyl의 統一場理論에서 나타나는 式이므로 이 節의 理論을 확장하여 Weyl의 統一場理論의 수정에의 應用이 展望되며, 이 問題는 앞으로의 課題가 될 것이다.

參考文獻

1. 矢野健太郞・武藤義夫：텐솔解析 (1968)
2. Auslander : Differential Geometry (1967)
3. 大槻富之助：接續幾何學 (1957)

서울大學校