Sard 定理의 無限次元多樣體에 대한 擴張과 그 應用

辛 龍 泰

序文. n 次元 Euclid 공간 R^n의 한 領域 D에서 m 次元 Euclid 공간 R^m의 한 部分에로의 寫像

(0.1) $$y^j = f^j(x^1, \ldots, x^n), \quad j=1, \ldots, m$$

를 생각하자. D 안에서 각 f^j $(j=1, \ldots, m)$가 C^k 級 $(k \geqq 1)$이라 가정하자. 만일 寫像 (0.1)의 1 次導函數들을 要素로 갖는 行列

$$M = (f_i^j) \quad (i=1, \cdots, n;\ j=1, \cdots, m)$$

이 D에 속하는 각 點 x에 대하여

$$M(x) = (f_i^j(x))$$

의 階數가 M의 最大階數보다 작으면 x를 寫像 (0.1)의 **臨界點**이라 한다. 臨界點의 (0.1)에 의한 像을 **臨界値**라 한다. 위에 導入된 槪念들은 圓滑(微分可能) 多樣體의 局所的 chart를 이용하면 n 次元 圓滑多樣體 X^n 에서 m 次元圓滑多樣體 Y^m 으로 가는 C^k 級寫像 $f: X^n \to Y^m$ 에 대하여도 一般化될 수 있다.

이 槪念에서 유발되는 Sard 定理의 有限次元에 관한 것과 無限次元에 관한 것을 紹介하고, 이들 一連의 定理가 無限次元多樣體를 可分 Hilbert 空間內에 C^r inmersion 시키는 寫像들의 集合과 C^r embedding 시키는 寫像들의 集合에 대한 어떤 位相的 狀況을 解明하는 問題에 應用될 可能性을 主張하는 것이 本討論의 目的이다.

1. 有限次元多樣體에 관하여

$f: X^n \to Y^m$ 를 n 次元多樣體 X^n 에서 m 次元多樣體 Y^m 으로 가는 圓滑(임의 계차 미분가능)寫像이라 하자.

$$C_f = \{x \in X^n : f_*(x)\text{는 epimorphism 이 아님}\}$$

을 f의 臨界點의 集合으로 表示하자. 이 때 $f(C_f)$에 관하여 어떤 判斷을 내릴 수 있을 것인가? 이것을 해명한 것이 Sard 定理(또는 Morse-Sard 定理)인데 $X^n = R^n$ 안의 한 開領域 U, $Y^m = R^m$ 과 같이 置換하여 多樣體의 局所的問題로 歸一시킨 Sard 定理는 다음과 같다[2].

(1. 1) Sard 定理. 만일 $f: U \to R^m$가 C^k 級($k \geq 1$)이고, $k > \max(n-m, 0)$이면 $f(C_f)$의 Lebesgue m-measure는 零이다.

이 定理는 A. P. Morse에 의하여 $m=1$인 경우를 들어서 처음으로 證明되었고[1], 그 후 A. Sard에 의하여 m이 임의의 自然數인 경우에 증명되었다[2]. 이 定理에서 주어진 多樣體의 次元과 寫像의 微分可能 階次數간에 奇妙한 關係가 조건 붙는데 이 조건이 必然的임은 다음 例로서 밝혀지고 있다[3].

例 $I=[0, 1]$을 單位閉區間이라 할 때 C^1 級函數 $f: I^2 \to R^1$과 集合 C_f에 포함되는 arc A가 存在하여 다음 조건을 만족한다.

(i) $f(C_f)=f(I^2)$

(ii) f는 連結集合 A에 대하여는 一定値를 갖는다.

위의 例에서 (i)과 (ii)에 의하여 $f(C_f)$의 measure는 零이 아니다. 또 $\max(n-m, 0)=1$이고 $k=1$이므로 $k > \max(n-m, 0)$도 成立 안 된다.

위의 定理 (1. 1)에서 measure의 槪念을 位相의 category의 槪念으로 代置하여 誘導한 다음 定理가 Dubovitsky에 의하여 發表되었다.

(1. 2) 定理. 만약 $f: U \to R^m$가 C^k 級이고 $n-m+1 \leq k$이면 $f(C_f)$는 meager 이다.

註) 한 位相空間 X의 部分集合 A가 meager라 함은 A가 可附番個의 rare 集合들의 合集合으로 表示可能함을 말함.

例 1. "定理 (1. 2) $\Rightarrow$ Sard 定理 (1. 1)"은 成立 안 된다.

證明 $x_1, x_2, \cdots$를 單位閉區間 I 안에 있는 有理數들이라 하고 $\epsilon > 0$에 대하여 $F_i(\epsilon)$로써 x_i를 中心, $\epsilon/2^i$를 길이로 하는 開區間을 表示하자.

$$F(\epsilon)=\bigcup_{i=1}^{\infty} F_i(\epsilon), \quad F=\bigcap_{n=1}^{\infty} F(1/n), \quad A=I-F$$

로 각각 놓으면 A는 I 안에서 meager이고, A의 Lebesgue 1-measure $\mu_1(A)=1$이다. 한편 rare 集合 A_k들로써 $A=\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$로 表示可能하므로, μ_1의 性質(subadditivity)에 의하여 $\mu_1(A)=0$. Rare 集合은 meager이므로, 이 결과는 例를 證明한다.

例 2. 만일 A가 R^m 內의 閉部分集合이고 $\mu_m(A)=0$이면 A는 meager이다. 즉 "Sard 定理 (1. 1) $\Rightarrow$ 定理 (1. 2)"는 成立한다.

證明 R^m는 Baire 공간이므로 A가 meager일 必充條件은 A가 rare인 것이다. 만약 A가 rare 아니라면 $\mathrm{Int}\, A \neq \phi$. 따라서 A 內에 한 點 a를 찾아서 a

를 中心, ϵ 을 半徑으로 하는 開球(나아가서 閉球) B_a 를 발견하여 $a \in B_a \subset A$ 를 만족하게 할 수 있다. 그러나 $\mu_m(B_a) > 0$ 이고 $0 < \mu_m(B_a) \leq \mu_m(A)$ 이다.

微分位相學(differential topology)에 관한 限 Sard 定理의 變形인 定理 (1.2)의 應用이 더욱 容易할 것임이 위의 例 1, 2 로써 짐작할 수 있다.

2. 無限次元多樣體에 관하여

無限次元多樣體에 대하여 Sard 定理를 擴張하기 위해서 Banach 공간 사이의 한 특수 operator 를 定義한다. Banach 공간 E_1 에서 E_2 로 가는 連續線型寫像 $L: E_1 \to E_2$ 가 다음 조건 (i), (ii), (iii)을 만족할 때 L 을 **Fredholm operator** 라 한다.

(i) dim Ker $L < \infty$

(ii) Range L 은 E_2의 閉集合

(iii) Coker L 가 有限次元을 가짐

만일 $L: E_1 \to E_2$ 가 Fredholm 이면 dim Ker L − dim Coker L 을 L 의 **指數** 라고 한다.

Fredholm operator 全體의 集合 $F(E_1, E_2)$에 관하여 다음 定理를 얻는다[6].

(2.1) 定理. Fredholm operator 全體의 集合 $F(E_1, E_2)$는 有界 operator 全體의 集合 $L(E_1, E_2)$ 위의 norm-topology 에서 開集合이다.

連結이고 countable base 를 갖는 Banach 多樣體를 X, Y 등으로 表示하여 위의 operator 에 대한 定義를 非線型寫像에 대하여 擴張하여 보기로 하자.

C^1 寫像 $f: X \to Y$ 에서 각 $x \in X$ 에 대하여 導寫像 $Df(x): T_x(X) \to T_{f(x)}(Y)$가 Fredholm operator 이면 f 를 **Fredholm 寫像**이라 한다. f 의 **指數**는 어떤 點 $x \in X$ 에 대한 $Df(x)$의 指數로써 定義한다. f 가 C^1 이고 X 가 連結이므로 定理 (1.2)에 의하여 이 定義는 x 에 依存하지 않음을 알 수 있다. 그리고 f 의 臨界點 C_f 및 臨界値를 위한 定義도 1 節의 그것에 준한다.

無限次元多樣體에로 擴張된 Sard 定理는 다음과 같이 表現된다[7].

(2.2) 定理. $f: X \to Y$ 를 C^k Fredholm 寫像이라 하자. 만약 $k > \max$ (f 의 指數, 0)이면 $f(C_f)$는 Y 에서 meager 이다.

註) f 가 Fredholm 인 것이 必要조건임은 反例에 의하여 立證되고 있다[8]. 事實上 이 定理의 假定은 相當히 强한 制限을 나타내고 있다. 가령 X 에서 Y 에로 가는 Fredholm 寫像이 存在하는 것은 X 가 無限次元일 때 Y 가 必然的으로 無限次元임

을 强要하고 있다. 그러나 筆者가 생각하는 應用處는 $C^k(X, H')$ 안에서이고 H'은 無限次元可分 Hilbert 공간이므로 위의 制限에는 아무 구속됨이 없다고 본다.

3. Sard 定理의 應用

Whitney의 Embedding 定理에서 稠密問題를 證明하는 데 있어서 Sard 定理 (1.2)가 重要한 役割을 했음을 안다[5]. 參考로 이 定理를 다음에 소개한다.

(3.1) **定理**(Whitney) X^n를 n次元 Compact C^k 多樣體, $k \geqq 2$라 하면 임의의 整數 $0 \leqq s \leqq k$에 대하여 $I^k(X^n, R^p)$와 $E^k(X^n, R^p)$는 각각 $p \geqq 2n$, $p \geqq 2n+1$의 조건하에서 $C^s(X^n, R^p)$ 위의 norm-topology에서 開部分集合이고 稠密하다.

위 定理 (3.1)의 稠密問題를 證明하는 데 있어서 定理 (1.2)를 利用했다는 事實[4]은 筆者로 하여금 定理 (2.2)가 $I^r(X, H')$, $E^r(X, H')$가 $C^r(X, H')$에 導入되는 適當한 topology에서 稠密狀態를 解明하는 데 重要한 役割을 할 것이라는 暗示를 갖게 한다. 다만 X는 無限次元 可分 Hilbert 공간 H에 模造된 countable base를 갖는 Compact 多樣體이고 $H' = H \times R$이다[10].

이 應用에 한층 더 接近할 수 있는 한 定理는 다음의 것으로 생각된다[9].

(3.2) **定理.** X와 Y를 각각 한 Hilbert 공간 E와 한 Banach 공간 F 위에 模造된 圓滑多樣體라 하자. X가 可分이면 圓滑 residual 寫像 f(즉 $f(C_f)$가 Y에서 內點을 갖지 않는 寫像 f) 전체의 集合은 $C^0(X, Y)$ 위의 fine topology에서 稠密하다.

註) $C^0(X, Y)$ 위의 fine topology라 함은 임의의 $\varphi \in C^0(X, Y)$의 한 Fundamental system이 모든 連續函數 $\eta : X \to R_+$로 하여금 集合

$$S(\varphi, \eta) = \{\Psi \in C^0(x, y) : \sigma(\varphi(x), \Psi(x)) < \eta(x), x \in X\}$$

를 對應시키도록 定해진 topology를 말한다. 다만 σ는 Y에 容納되는 한 metric이다.

위의 定理 (3.2)가 筆者가 意圖하는 問題解決에 興味를 갖는 點은 가설된 X, Y가 더 일반적인 無限次元多樣體이고, 또 主張하는 內容은 임의의 圓滑寫像 $f : X \to Y$가 (適當한 意味에서, 즉 fine topology에서) 어떤 한 residual 寫像으로서 近似 取扱될 수 있다는 것이고 問題에서 注目되는 寫像의 集合 $I^r(X, H')$와 $E^r(X, H')$는 이러한 residual 寫像의 集合에 포함된다.

筆者는 $I^r(X, H')$와 $E^r(X, H')$가 多樣體 $C^r(X, H')$에서 稠密한 開部分集合인가를 解明하려는 問題에 있어서 이들이 空 아닌 開部分集合임은 解決하였으나 [10], 稠密如否에 대한 解決을 위하여 定理 (2.2)와 (3.2)를 利用하는 것은 有

限次元인 경우에 定理 (3.1)을 證明할 때와 흡사할 것으로 생각된다.

參考文獻

〔1〕 A.P.Morse, *The behaviour of a function on its critical set,* Ann. of Math. Vol. 40 (1939)

〔2〕 A. Sard, *The measure of the critical values of differentiable maps,* Bull. A. M.S. 48 (1942)

〔3〕 H. Whitney, *A function not constant on a connected critical point*, Duke Math. J. 4 (1935)

〔4〕 Y.T. Shin. *Embeddings of smooth manifolds,* M. Sc. Thesis, Queen's University, Kingston (1967)

〔5〕 L.S. Pontrijagin, *Smooth manifolds and their applications in homotopy theory,* A.M.S. Transl. 11 (1964)

〔6〕 Gohberg & Krein, *The basic propositions on defect numbers and indices of linear operators*, Transactions of A.M.S. 13 (1960)

〔7〕 S. Smale, *An infinite dimensional version of Sard's theorem,* Amer. J. of Math. 87 (1965)

〔8〕 I Kupka, *Counter-example to the Morse-Sard theorem in the case of infinite dimensional manifolds,* Proc. A.M.S., 16 (1965)

〔9〕 J. Eells and J. McAlpin, *An approximate Morse-Sard theorem,* J. of Math. & Mech. 17(1965), No 11.

〔10〕 Y.T. Shin. *Openness theorems on C^r immersions and embeddings of some Hilbert manifolds*, J. of K.M.S. 7 (1970)

忠南大學校