# 가산(countably) COMPACT

김 두 호

## 1. 서 론

이 논문에서 다루는 모든 위상공간은 Hausdorff 공간으로 하고, 공간 X의 compactification $\alpha X$에 의하여 한 compact space는 조밀 부분공간으로서의 X를 갖는 것으로 한다.

만약 어떤 양정수 $n$에 대하여 $\alpha X$-X가 n개의 점으로 이루어진다고 하면 $\alpha X$를 X의 n-point compactification이라 하고 $\alpha_n X$로 나타내기로 한다.

또 $\alpha X$-X가 countable이면 $\alpha X$를 X의 countable compactification으로 한다. 그리고 집합이 countable이라 함은 그 집합의 원소가 자연수 전체와 1대 1대응임을 뜻한다.

n-point compactification인 공간은 [2]에서 잘 기술되어 있고 여기서 얻어진 결과로부터 실직선의 n-point compactification만이 1-point 또는 2-point compactification이고 Euclidean N-space 즉 $E^N(N>1)$만이 1-point compactification이다.

여기서는 이들 공간은 locally compact라는 것과 countable compactification을 갖는다는 것을 강조하려고 한다.

결론으로 Euclidean N-space는 countable compactification을 갖지 않는 사실에 도달한다.

$\beta X$는 완전정규공간 X의 Stone-Cech compactification을 나타내는 것으로 하고 card(Y)는 집합 Y의 cardinal number를 나타내고 c는 continuum을 나타내는 것으로 함. 완전정규공간 X의 모든 compactification은 $\beta X$의 continuous image이므로 X의 모든 compactification $\alpha X$에 대하여

$$\mathrm{card}(\alpha X) \leqq \mathrm{card}(\beta X)$$

그리고 ([1]; p.131, 9.3)에서 $\mathrm{card}(\beta R - R) = 2^c$이고 여기서 R은 실수공간을 나타낸다. 마찬가지로 모든 Euclidean N-space $E^N$에 대하여

$$\mathrm{card}(\beta E^N - E^N) = 2^c$$

그러므로 만약 $\alpha R$이 R의 어떤 compactification이면 ∴ $\mathrm{card}(\alpha R - R)$은 1, 2, C 혹은 $2^c$이고 그리고 만약 $\alpha E^N$이 $E^N$의 어떤 compactification이면 $\mathrm{card}(\alpha E^N - E^N)$은 1, C, 혹은 $2^c$이다.

## 2. 정리와 증명

공간 X에 관한 다음 명제들은 동치이다.

정리(2.1); X는 locally compact이고 그리고 $\beta X$-X는 무한개의 component를 가진다.

정리(2.2); X는 locally compact이고 $\alpha X$-X가 무한이고 disconnect인 X의 compactification $\alpha X$가 존재한다.

정리(2.3); X는 locally compact이고 countable compactification을 갖는다.

정리(2.4); X는 모든 양정수 n에 대한 n-point compactification을 갖는다.

증명 (2.1)→(2.2)

$$\beta X - X = \bigcup \{H\alpha : \alpha \in \nabla\}$$

라 하면 $\{H^\alpha : \alpha \in \Delta\}$은 $\beta X$-X의 성분족이 된다. 또 $\alpha X = X \cup \Delta$라 하고 h를 $\beta X$에서 $\alpha X$ 위로의 함수라고 하자. 즉

$$h(p) = \begin{cases} p & \text{만약 } p \in X \\ a & \text{만약 } p \in Ha \end{cases}$$

이때 compact space의 continuous image인 $\alpha X$는 compact이다.

$\alpha X$가 Hausdorff임을 나타내는데 다음 세 가지 경우가 있다. 즉

(1) $p$와 $q$는 둘 다 X에 속하고

(2) $p \in X$이고 $q \in_\alpha X - X$

(3) $p$와 $q$는 둘 다 $\alpha X$-X에 속한다.

첫 경우는 X가 어떤 compactification의 개 부분집합이고 locally compact라는 사실에서 쉽게 유도된다. 또한 이것은 X의 어떤 개부분집합은 $\beta X$와 $\alpha X$의 개부분집합이라는 사실과 일치한다.

두번째 경우에 있어서는 이제 다시 $P \subset G \subset K \subset X$를 만족하는 X의 개부분집합 G와 X의 compact subset K가 존재한다는 사실을 밝히는데

X의 locally compactness condition을 이용한다. 따라서 G와 $\alpha$X-K는 disjoint이고 $p$, $q$를 각각 품는 $\alpha$X의 개부분집합이 된다.

셋째 경우에 있어서는 $H_p$와 $H_q$는 $\beta$X-X의 compact인 distinct component이다. 그러므로 Hp와 Hq는 disjoint인 $\beta$X의 closed suhset이고 그리고 Hp와 Hq를 포함하는 $\beta$X의 disjoint인 개부분집합 Gp와 Gq가 있다.

([1]. 정리 15, 16)에 의하여 compact space에 속한 한 점의 component는 그것을 품는 모든 open-and-closed set의 intersection이 된다. 이것은 또한 Hp가 그것을 포함하는 $\beta$X-X에 관계되고 모든 open-and-closed set의 intersection임을 나타낸다. $\beta$X-X는 compact이고 그리고 $G_p\cap(\beta X-X)$가 $H_p$를 품는 $\beta$X-X의 개부분집합이기 때문에 open-and-closed set의 유한개수의 intersection은 $G_p\cap(\beta X-X)$에 포함된다. 이 intersection을 $V_p$로 나타내면 $V_p$는 $\beta$X-X의 open-and-closed subset이고 $H_p\subset V_p\subset G_p\cap({}_\beta X-X)$이다.

여기서 $V_p$는 open이고 closed이므로 모든 $H_a$의 union이다. 더욱히 $V_p^*\subset G_p$가 성립되는 ${}_\beta$X의 어떤 open subset $V_p^*$에 대하여

$$V_p=V_p^*\cap({}_\beta X-X) \text{ 이다.}$$

따라서 $V_p^*=V_p\cup(V_p^*\cap X)$

같은 방법으로 $H_a$에 관계되는 집합 $V_q$와 $V_q^*$가 존재하게 된다.

그러므로 $V_p^*$와 $V_q^*$는 disjoint이고

$$U_p=(V_p^*\cap X)\cup\{a;\, H_a\subset V_p\}$$

$$U_q=(V_q^*\cap X)\cup\{a;\, Ha\subset V_q\}$$

라고 하면 $h^{-1}(U_p)=V_p^*$이고

$$h^{-1}(U_q)V_q^* \text{ 이다.}$$

나중 것은 ${}_\beta$X의 open subset이고 그리고 $\alpha$X는 $h$에 의하여 유도되는 quotient topology로 주어졌기 때문에 $U_p$와 $U_q$는 disjoint이고 $p$, $q$를 각각 품는 $\alpha$X의 open subset이다. 이것은 $\alpha$X가 Hausdorff space임을 밝혀주고 또 X는 $\alpha$X에서 조밀함을 나타낸다. 그러므로 $\alpha$X는 X의 compactification이라야 한다. 이제 $\alpha$X-X가 totally disconnect임을 밝히기 위하여 $U_p\cap({}_\alpha X-X)$가 ${}_\alpha$X-X에서 open이라고 하면

$$h^{-1}(U_p\cap({}_\alpha X-X)=V_p^*\cap({}_\alpha X-X)=V_p$$

이고 이것은 ${}_\beta$X의 closed subset이다.

따라서 $U_p\cap({}_\alpha X-X)$는 ${}_\alpha$X의 closed subset이고 또한 ${}_\alpha$X-X의 closed subset도 된다. 그러므로 $p$와 $q$는 같은 component에 속하지 않는다. $p$와 $q$는 $\alpha$X-X의 임의의 두 다른 점이였으므로 나중것은 totally disconnect이라고 할 수 있다.

(2.2)→(2.3) X는 locally compact이므로 ([1] 정리 16, 17)에 의하여 ${}_\alpha$X-X는 무한이고 open-and-closed set의 기본을 지니게 된다. 그러므로 ${}_\alpha$X-X에서 open이고 closed인 ${}_\alpha$X-X의 상호 disjoint이고 non-empty subset의 가산족 $\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$이 존재한다. 집합

$$H_0=({}_\alpha X-X)-U\{H_n\}_{n=1}^{\infty}$$

에서 ${}_\alpha$X-X는 compact이므로 $H_0\fallingdotseq\phi$이다.

이제 ${}_\alpha$X에서 $X\cup\{n\}_{n=1}^{\infty}=r$X 위로의 함수 $h$를 다음과 같이 정의한다.

$$h(p)=\begin{cases} n & p\in H_n \text{ 에 대하여} \\ p & p\in X \text{ 에 대하여}\end{cases}$$

앞에서와 마찬가지로 $r$X는 Hausdorff이고 X는 $r$X에서 조밀함을 밝힐 수 있다. 그러므로 $r$X는 X의 countable compactification이다.

(2.3)→(2.4); X는 locally compact이고 $r$X는 X의 countable compactification이라 하고 $p$와 $q$는 $r$X-X의 어떤 connected subset H에 속하는 점이라고 하자.

그러면 $r$X-X는 완전정규이고 $r$X-X에서 $f(p)=0$, 그리고 $f(q)=1$인 닫친 단위구간 I에로의 연속함수 $f$가 존재한다.

이때 $f$(H)는 connect이고 I가 0과 1을 포함하므로 I는 전부라야 한다.

물론 이것은 $r$X-X의 cardinality를 예측케 하고 $r$X-X는 totally connect이다. 다시 X는 locally compact이므로 $r$X-X는 compact이고, 그리고 $r$X-X가 open-and-closed set의 기본을 지닌다는 것을 밝히기 위하여 한번 더 ([1] 정리 16, 17)을 참고로 한다. 그러면 임의의 양정수 $n$에 대하여 open이고 closed인 $r$X-X의 $n$개의 상호 disjoint인 non-empty subset가 있게 되고 그의 합은 $r$X-X의 전부가 된다.

이들 집합을 $\{H_i\}_{i=1}^{n}$이라 하고 $r$X에서

$$X\cup\{1, 2, 3, \cdots, n\}=\alpha_n X$$

위로의 함수 $h$를 다음과 같이 정의한다.

$$h(p)=\begin{cases} i \\ p \end{cases} \quad \text{여기서 } p\epsilon H_i, \ p\epsilon X$$

$\alpha_n X$는 $h$에 의하여 유도되는 quotient topology를 지닌다고 하자. 그러면 앞에서와 마찬가지로 $\alpha_n X$는 X의 (Hausdroff) compactification이어야 한다.

(2.4)→(2.1); $n$을 임의의 양정수라 하고 $\alpha_n X$는 X의 n-point compactification이라고 하자. 그러면 $\beta X$-X는 적어도 $n$개의 component를 가져야 한다. 왜냐하면 그것에서 $\alpha_n X$-X 위로 mapping하는 연속함수가 존재하기 때문이다.

이것은 모든 양정수에 대하여 성립하므로 $\beta X$-X는 무한히 많은 component를 갖는다. 끝으로 유한 compactification을 지니는 어떤 공간은 locally compact이고 따라서 증명이 완성된다.

## 3. 결 론

We obtain the fact that no Euclidean N-space has a countable compactification, and the following statements concerning a space X are equivalent.

(1) X is locally compact and $_\beta X$-X has an infinite number of components.

(2) X is locally compact and there exists a compactification $_\alpha X$ of X such that $_\alpha X$-X is infinite and totally disconnected.

(3) X is locally compact and has a countable compactification.

(4) X has an n-point compactification for each positive integer n.

## 참 고 문 헌

〔1〕 L. Gillman and M. Jerison, Rings of continuous functions (New York, 1960)

〔2〕 J. L. Kelly, General Topology (New York 1955).