실수의 ORDERED PAIR 들의 어떤 체에 대하여

李 憲 載

1. 서론(복소수체의 연산)

복소수 전체의 집합 C는 덧셈(+)와 곱셈(·)에 관하여 체를 이룬다. 복소수 $x+yi$를 (x, y)로 표시하면 그 두 연산의 정의는 다음과 같다.

$$(x_1, y_1)+(x_2, y_2)=(x_1+x_2, y_1+y_2)$$

$$(x_1, y_1)\cdot(x_2, y_2)$$

$$=(x_1x_2-y_1y_2, x_1y_2+x_2y_1)$$

두 복소수의 상등관계의 정의는 다음과 같다.

$$(x_1, y_1)=(x_2, y_2)\Longleftrightarrow x_1=x_2,\ y_1=y_2$$

두 복소수의 합 및 곱의 실부와 허부는 각각의 복소수의 그것들의 1차 형식 및 2차 형식인 것을 주목하여 다음과 같은 확장을 시도한다.

임의의 두 실수의 ordered pair 전체의 집합

$S=\{(x, y)\mid x, y\in R\}$, R은 실수체

를 생각하고, S에 상등관계(=)와 두 종류의 2항연산, 덧셈(+), 곱셈(·)을 다음과 같이 도입한다.

(1) $(x_1, y_1)=(x_2, y_2)\Longleftrightarrow x_1=x_2,\ y_1=y_2$

(2) $(x_1, x_2)+(x_3, x_4)=\left(\sum_{i=1}^{4}a_ix_i,\ \sum_{i=1}^{4}b_ix_i\right)$

(3) $(x_1, x_2)\cdot(x_3, x_4)$

$$=\left(\sum_{i\leqq j=1}^{4}A_{ij}x_ix_j,\ \sum_{i\leqq j=1}^{4}B_{ij}x_ix_j\right)$$

여기서 a_i, b_i, A_{ij}, B_{ij}는 임의의 상수이다.

이렇게 정의된 2항 연산 (+), (·)에 관하여 집합 S가 체를 이루게 되는 조건을 구하고(즉 a_i, b_i, A_{ij}, B_{ij}가 충족하여야 할 조건) 복소수체 C와의 관계를 조사해 보려는 것이 본고의 목표하는 바이다.

2. S가 교환가군이 되는 조건

우선 S가 덧셈에 관하여 Abel 군을 이루기 위한 조건을 구해 보자.

〔정리 1〕 $\{S, +\}$가 Abel 군이 되기 위한 조건은

$$a_1=a_3=b_2=b_4=1$$

$$a_2=a_4=b_1=b_3=0$$

〔증〕 필요조건인 것

S가 Abel 군이므로 덧셈은 가환이다. 즉

$$(x_1, y_1)+(x_2, y_2)=(x_2, y_2)+(x_1, y_1)$$

덧셈의 정의 (2)에 의하여

$$a_1x_1+a_2y_1+a_3x_2+a_4y_2$$

$$=a_1x_2+a_2y_2+a_3x_1+a_4y_1$$

$$b_1x_1+b_2y_1+b_3x_2+b_4y_2$$

$$=b_1x_2+b_2y_2+b_3x_1+b_4y_1$$

이 두 등식이 x_1, y_1, x_2; y_2에 관한 항등식이 되어야 하므로,

(4) $a_1=a_3,\ a_2=a_4,\ b_1=b_3,\ b_2=b_4$

다음에 S의 영원을 (i, j)라 하면

$$(x, y)+(i, j)=(x, y)$$

$$(i, j)+(x, y)=(x, y)$$

조건 (4) 밑에서는

$$(x, y)+(i, j)=(i, j)+(x, y)$$

이므로, 하나만 쓰면 된다. 앞의 등식에서

$$a_1x+a_2y+a_3i+a_4j=x$$

$$b_1x+b_2y+b_3i+b_4j=y$$

이 두 등식이 항등식이 되기 위한 조건은

$$(5)\ \begin{cases} a_1=b_2=1,\ a_2=b_1=0 \\ a_3i+a_4j=b_3i+b_4j=0 \end{cases}$$

(4), (5)가 동시에 성립하게 a_i, b_i, i, j를 결정하면

$$a_1=a_3=b_2=b_4=1$$

$$a_2=a_4=b_1=b_3=0$$

을 얻는다.

다음에 이것이 충분조건인 것을 본다.

이 조건 밑에서 덧셈 (2)는

$$(6)\ \begin{cases} (x_1, y_1)+(x_2, y_2)=(x_1+x_2, y_1+y_2) \\ \text{영원은 } (0, 0) \end{cases}$$

으로 되는데 이것은 바로 복소수의 덧셈이다. 복소수의 전체가 덧셈에 관하여 Abel 군인 것은 주지의 사실이다.

3. S의 곱셈

S의 곱셈 (3)이 결합법칙을 만족하고, 단위원이 존재하며, (0, 0)을 제외한 S의 모든 원이 S 안에 역원을 가지며, 가환이고, 분배 법칙을 만족하게 A_{ij}, B_{ij}를 결정하여 본다. 우선 가환성과 단위원의 존재성을 본다.

〔정리 2〕 집합 S에 (3)으로 정의한 곱셈이 가환이고, S 안에 단위원 (c, d)를 갖기 위한 조건은

$$(7)\begin{cases} A_{11}=A_{12}=A_{22}=A_{33}=A_{44}=A_{34}=0 \\ B_{11}=B_{12}=B_{22}=B_{33}=B_{44}=B_{34}=0 \\ A_{14}=A_{23},\ B_{14}=B_{23} \\ A_{13}c+A_{14}d=1,\ A_{23}c+A_{24}d=0 \\ B_{13}c+B_{23}d=0,\ B_{23}c+B_{24}d=1 \end{cases}$$

또 이 조건 밑에서 곱셈은 결합법칙을 만족한다.

〔증〕 곱셈이 가환일 조건은

$$(x_1,\ y_1)\cdot(x_2,\ y_2)=(x_2,\ y_2)\cdot(x_1, y_1)$$

이 임의의 실수 x_1, y_1, x_2, y_2에 대하여 성립하는 것이다. 이 등식은 (3)에 의하여

$$A_{11}x_1^2+A_{12}x_1y_1+A_{13}x_1x_2+A_{14}x_1y_2+A_{22}y_1^2$$
$$+A_{23}x_2y_1+A_{24}y_1y_2+A_{33}x_2^2+A_{34}x_2y_2+A_{44}y_2^2$$
$$=A_{11}x_2^2+A_{12}x_2y_2+A_{13}x_1x_2+A_{14}x_2y_1+A_{22}y_2^2$$
$$+A_{23}x_1y_2+A_{24}y_1y_2+A_{33}x_1^2+A_{34}x_1y_1+A_{44}y_1^2$$
$$B_{11}x_1^2+B_{12}x_1y_1+B_{13}x_1x_2+B_{14}x_1y_2+B_{22}y_1^2$$
$$+B_{23}x_2y_1+B_{24}y_1y_2+B_{33}x_2^2+B_{34}x_2y_2+B_{44}y_2^2$$
$$=B_{11}x_2^2+B_{12}x_2y_2+B_{13}x_1x_2+B_{14}x_2y_1+B_{22}y_2^2$$
$$+B_{23}x_2y_1+B_{24}y_1y_2+B_{33}x_1^2+B_{34}x_1y_1+B_{44}y_1^2$$

이것이 x_1, y_1, x_2, y_2의 항등식일 조건은

$$(8)\begin{cases} A_{11}=A_{33},\ A_{22}=A_{44},\ A_{12}=A_{34},\ A_{14}=A_{23} \\ B_{11}=B_{33},\ B_{22}=B_{44},\ B_{12}=B_{34},\ B_{14}=B_{23} \end{cases}$$

다음에 $(c,\ d)$가 단위원이 되기 위한 조건은 (8) 밑에서는 다음으로 된다.

$$(x,\ y)\cdot(c,\ d)=(x, y)$$

x, y는 임의의 실수

좌변에 곱셈 (3)을 시행하여 우변과 임의의 x, y에 대하여 같기 위한 조건을 따지면 된다.

$$A_{11}x^2+A_{12}xy+A_{13}cx+A_{14}dx+A_{22}y^2+A_{23}cy$$
$$+A_{24}dy+A_{33}c^2+A_{34}cd+A_{44}d^2=x$$
$$B_{11}x^2+B_{12}xy+B_{13}cx+B_{14}dx+B_{22}y^2+B_{23}cy$$
$$+B_{24}dy+B_{33}c^2+B_{34}cd+B_{44}d^2=y$$

$$(9)\begin{cases} A_{11}=A_{12}=A_{22}=0,\ B_{11}=B_{12}=B_{22}=0 \\ A_{13}c+A_{14}d=1,\ A_{23}c+A_{24}d=0 \\ B_{13}c+B_{14}d=0,\ B_{23}c+B_{24}d=1 \\ A_{33}c^2+A_{34}cd+A_{44}d^2=0 \\ B_{33}c^2+B_{34}cd+B_{44}d^2=0 \end{cases}$$

(8) and (9)가 (7)과 동치인 것은 대조해 보면 쉽게 알 수 있다.

곱셈이 결합법칙을 만족하는 것의 확인은 생략한다.

정리 2에서 집합 S의 단위원을 $(c,\ d)$라 하였는데, c, d가 $=0$인가 $\neq 0$인가에 따라서 조건 (7), 따라서 곱셈 (3)은 3가지 다른 경우로 갈라진다.

〔정리 3〕 (3)으로 정의된 곱셈이 가환이고, 단위원 $(c,\ d)$가 S안에 존재하는 것은 (3)이 각각 다음으로 유도되는 경우에 한한다.

(i) $c\neq 0$, $d\neq 0$인 경우

$$(10)\ (x_1,\ y_1)\cdot(x_2,\ y_2)$$
$$=\Big(\frac{1-dA}{c}x_1x_2+A(x_1y_2+x_2y_1)-\frac{cA}{d}y_1y_2,$$
$$-\frac{dB}{c}x_1x_2+B(x_1y_2+x_2y_1)+\frac{1-cB}{d}y_1y_2\Big)$$

(ii) $c\neq 0$, $d=0$인 경우

$$(11)\ (x_1,\ y_1)\cdot(x_2,\ y_2)$$
$$=\Big(\frac{1}{c}x_1x_2+Ay_1y_2,\ \frac{1}{c}(x_1y_2+x_2y_1)+By_1y_2\Big)$$

(iii) $c=0$, $d\neq 0$인 경우

$$(12)\ (x_1,\ y_1)\cdot(x_2,\ y_2)$$
$$=\Big(\frac{1}{d}(x_2y_1+x_1y_2)+Ax_1x_2,\ \frac{1}{d}y_1y_2+Bx_1x_2\Big)$$

A, B는 임이의 상수이다.

〔증〕 곱셈이 가환이고, 단위원 $(c,\ d)\in$S이므로 앞의 정리 2의 조건 (7)이 성립한다.

(i) (7)의 두 식에서

$$A_{14}=A_{23}=A,\ B_{14}=B_{23}=B$$

라 하면, c, d의 네 방정식은 다음과 같이 된다.

$$A_{13}c+Ad=1,\ Ac+A_{24}d=0$$
$$B_{13}c+Bd=0,\ BC+B_{24}d=1$$

$c\neq 0$, $d\neq 0$이므로, 이것들을 풀어서

$$A_{13}=\frac{1-dA}{c},\quad A_{24}=-\frac{cA}{d}$$
$$B_{13}=-\frac{dB}{c},\quad B_{24}=\frac{1-cB}{d}$$

이제 (10)이 유도되는 것은 쉽게 볼 수 있다.

(ii) $c \neq 0$, $d=0$ 라 (7)의 c, d의 방정식에서

$$A_{13}=\frac{1}{c},\quad A_{23}=0,\quad B_{13}=0,\quad B_{23}=\frac{1}{c}$$

$A_{24}=A$, $B_{24}=B$ 라 하면 (3)은 (11)로 유도된다.

(iii) $c=0$, $d \neq 0$ 라 (7)의 c, d의 방정식에서

$$A_{14}=\frac{1}{d},\ A_{24}=0,\quad B_{23}=0,\quad B_{24}=\frac{1}{d}$$

다시 (7)에서 $A_{23}=A_{14}=\frac{1}{d}$, $B_{14}=B_{23}=0$

$A_{13}=A$, $B_{13}=B$ 라 하면 (12)가 나온다.

〔정리 4〕 (6)의 덧셈과 (10), (11), (12)의 한 곱셈에 관하여 분배법칙이 성립한다. 즉

$$\{(x_1,\ y_1)+(x_2,\ y_2)\}\cdot(x_3,\ y_3)$$
$$=(x_1,\ y_1)\cdot(x_3,\ y_3)+(x_2,\ y_2)\cdot(x_3,\ y_3)$$

〔증〕 단위원이 $(c,\ 0)$, $c \neq 0$ 인 경우(곱셈이 (11)로 정의되는 경우)에 대하여 증명한다. 다른 경우에 대하여도 비슷한 방법으로 된다.

$$\begin{aligned}&\{(x_1,\ y_1)+(x_2,\ y_2)\}\cdot(x_3,\ y_3)\\ &=(x_1+x_2,\ y_1+y_2)\cdot(x_3,\ y_3)\\ &=\Big(\frac{1}{c}(x_1+x_2)x_3+A(y_1+y_2)y_3,\\ &\quad \frac{1}{c}\Big((x_1+x_2)y_3+(y_1+y_2)x_3\Big)\\ &\quad +B(y_1+y_2)y_3\Big)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&(x_1,\ y_1)\cdot(x_3,\ y_3)+(x_2,\ y_2)\cdot(x_3,\ y_3)\\ &=\Big(\frac{1}{c}x_1x_3+Ay_1y_3,\ \ \frac{1}{c}(x_1y_3+x_3y_1)+By_1y_3\Big)\\ &+\Big(\frac{1}{c}x_2x_3+Ay_2y_3,\ \ \frac{1}{c}(x_2y_3+x_3y_2)+By_2y_3\Big)\\ &=\Big(\frac{1}{c}(x_1+x_2)x_3+A(y_1+y_2)y_3),\\ &\quad \frac{1}{c}\Big((x_1+x_2)y_3+(y_1+y_2)x_3\Big)\\ &\quad +B(y_1+y_2)y_3\Big)\end{aligned}$$

$$\therefore\ \{(x_1,\ y_1)+(x_2,\ y_2)\}\cdot(x_3,\ y_3)$$
$$=(x_1,\ y_1)\cdot(x_3, y_3)+(x_2,\ y_2)\cdot(x_3,\ y_3)$$

덧셈 (6)과 (10), (11), (12) 중의 하나로 정의된 곱셈에 관하여 집합 S가 체를 이루기 위해서는 임의의 $(x, y)\in S$, $\neq(0,\ 0)$이 S 안에 곱셈에 관한 역원을 가져야 한다. 그 조건에 대하여 생각한다.

〔정리 5〕 집합 S에 (6)으로 덧셈이 정의되어 있다 하자. $(x,\ y)\in S$, $\neq(0,\ 0)$가 S 안에 곱셈에 관한 역원을 갖지 않는 것은

(i) 곱셈이 (10)으로 주어졌을 경우에는,

(13) $dBx^2+(1-dA-cB)xy+cAy^2=0$

인 때에 한한다.

(ii) 곱셈이 (11)로 주어졌을 경우에는,

(14) $x^2+cBxy-cAy^2=0$

인 때에 한한다.

(iii) 곱셈이 (12)로 주어졌을 경우에는,

(15) $y^2+dAxy-dBx^2=0$

인 때에 한한다.

〔증〕 $(x,\ y)\in S \neq (0,\ 0)$라 하면 $x, y \in R$ 이다.

(i) $(x,\ y)\cdot(u,\ v)=(c,\ d)$, $c\neq 0$, $d \neq 0$ 를 만족하는 실수 u, v가 존재하지 않을 조건을 구한다. (10)에 의하여 좌변의 곱셈을 하고, 우변과 비교하여

$$\frac{1-dA}{c}xu+A(xv+yv)-\frac{cA}{d}yv=c$$

$$-\frac{dB}{c}xu+B(xv+yu)+\frac{1-cB}{d}yv=d$$

u, v에 관하여 정돈한다.

$$\Big(\frac{(1-dA)x}{c}+Ay\Big)u+\Big(Ax-\frac{cAy}{d}\Big)v=c$$

$$\Big(-\frac{dBx}{c}+By\Big)u+\Big(Bx+\frac{(1-cB)y}{d}\Big)v=d$$

이 u, v의 1차 연립방정식이 실수해를 갖지 않는 조건은 계수의 행렬의 행렬식이 $=0$이 되는 것이다.

$$\begin{vmatrix}\dfrac{(1-dA)x}{c}+Ay & Ax-\dfrac{cAy}{d}\\ -\dfrac{dBx}{c}+By & Bx+\dfrac{(1-cB)y}{d}\end{vmatrix}=0$$

이것을 전개하여 정돈하면,

$$dBx^2+(1-dA-cB)xy+cAy^2=0$$

(ii), (iii)의 증명은 생략한다.

이 정리에 의하여 임의의 $(x, y)\in S$, $\neq(0,\ 0)$이 S 안에 곱셈에 관한 역원을 갖는 것은 x, y의 2차 방정식 (13) 또는 (14) 또는 (15)의 판별식이 <0이 되는 것임을 알 수 있다.

4. 종 합

이제까지 따져 본 것들을 종합하면 다음과 같

다.

$S=\{(x,\ y)\,|\,x, y\in R\}$에 통상적인 방법으로 상등관계를 도입하고, $(x_1,\ x_2)$, $(x_3,\ x_4)\in S$의 덧셈을 x_1, x_2, x_3, x_4의 1차의 동차식으로 도입한다. 또 그들의 곱셈을 x_1, x_2, x_3, x_4의 2차의 동차식으로 도입한다.

S가 이 덧셈과 곱셈에 관하여 체를 이루기 위한 필요하고 충분한 조건은

1. 덧셈은 $(x_1,\ y_1)+(x_2,\ y_2)=(x_1+x_2,\ y_1+y_2)$이고, 그 영원은 $(0,\ 0)$이다.

2. (i) 곱셈의 단위원이 $(c,\ d)$, $c\neq 0$, $d\neq 0$이라면, 곱셈은

$$(x_1,\ y_1)\cdot(x_2,\ y_2)$$
$$=\Big(\frac{1-dA}{c}x_1x_2+A(x_1y_2+x_2y_1)-\frac{cA}{d}y_1y_2$$
$$-\frac{dB}{c}x_1x_2+B(x_1y_2+x_2y_1)+\frac{1-cB}{d}y_1y_2\Big)$$

이고 특히

$$dBx^2+(1-dA-cB)xy+cAy^2=0$$

이 $x=0$, $y=0$ 이외의 실수해를 갖지 않는 것이다.

(ii) 곱셈의 단위원이 $(c,\ 0)$, $c\neq 0$이라면, 곱셈은

$$(x_1,\ y_1)\cdot(x_2,\ y_2)$$
$$=\Big(\frac{1}{c}x_1x_2+Ay_1y_2,\ \frac{1}{c}(x_1y_2+x_2y_1)+By_1y_2\Big)$$

이고, 특히

$$x^2+cBxy-cAy^2=0$$

이 $x=0$, $y=0$ 이외의 실수해를 갖지 않는 것이다.

(iii) 곱셈의 단위원이 $(0,\ d)$, $d\neq 0$이라면, 곱셈은

$$(x_1,\ y_1)\cdot(x_2,\ y_2)$$
$$=\Big(\frac{1}{d}(x_2y_1+x_1y_2)+Ax_1x_2,\ \frac{1}{d}x_1y_2+Bx_1x_2\Big)$$

이고, 특히

$$y^2+dAxy-dBx^2=0$$

이 $x=0$, $y=0$ 이외의 실수해를 갖지 않는 것이다.

(참고도서 ALGEBRA, MACLANE, BIRKHOFF)