論 文

論文 70-7-3-1

多出力組合論理函數의 簡單化方法

(A Method for Simplifying Multiple-Output Combinational Logic Functions)

高 璟 植*

(Koh, Kyung Shik)

要 約

本 論文에서는 多出力組合論理回路를 最小 AND-OR 二段回路로 實現시키는 方法을 提示하였는데 그 簡單化節次의 主要骨子는 個個의 函數의 essential prime implicant 로부터 여러 函數에 共有될 共通項을 발견하는데 있는 것이다. 簡單化方法을 여기서는 4 入力變數, 3 出力의 경우를 例로 들어 論하였는데 그 節次는 一般的인 多出力函數의 경우에도 適用될 것은 물론이다.

Abstract

This paper presents a method for simpliflying a minimal two-level AND-OR multiple-output combinational logic circuit. The major problem of the minimizing procedure of the paper is to find common terms by examining essential prime implicants of individual functions. The minimizing technique is illustrated by the examples of four-input variable and three-output functions, but it is obvious that the technique can be applied to the general multiple-output case.

1. 序 論

多出力組合論理函數를 最小數게이트의 AND-OR 二段回路로 실현시키는데 있어서는 Map Method, Transformation Method, Tabular 또는 Tag Method[(1)(2)]가 적용되고 있다. 여기서는 이들 方法과는 달리 各函數를 包括하는 essential prime implicant(EPI)를 個別的으로 구한다음에 이들 各函數의 EPI 를 對照檢討하여 EPI 에 代置되면서도 여러 函數에 共通的으로 들어갈 수 있는 要素를 발견함으로써 essential multiple-output prime implicants 를 얻고저 試圖한 것이다. 共通要素를 抽出하는데는 몇가지 原則이 있는데 例題를 통하여 그 抽出節次를 명시하였다. 本方法을 現在까지 提示된 方法들과 비교할 때 類似한 점도 있지만 各函數를 包括하는 EPI 를 基準으로 하여 essential multiple-output prime implicants 를 결정하고저 한 試圖는 特異한 점이라고 할 수 있다.

*仁荷工科大學 電氣工學科
Dept. of Electrical Eng., Inha Institute of Technology
本論文은 仁荷工科大學 附設產業科學技術硏究所 1970年度 硏究計劃에 의한 것임.
接受日字; 1970年 8月 30日

2. 簡單化節次

多出力論理函數를 AND-OR 二段回路로 실현시키는데 있어서 게이트數를 最少로 하기 위한 簡單化方法을 例題를 통하여 그 節次를 論하기로 한다. 多出力論理函數

$f_1(w,x,y,z)=\Sigma(1,5,7,8,12,13,14,15)$
$f_2(w,x,y,z)=\Sigma(0,1,5,8,14)$
$f_3(w,x,y,z)=\Sigma(0,2,3,6,8,9,10,11,14)$
가 주어질 때 우선 Quine-McCluskey 의 方法 또는 consensus operation 에 의하여 各函數의 EPI 를 구한다. 中間計算을 略하고 그 結果만 쓰면 다음과 같다.

$f_1=wx+xz+wy'z'+w'y'z$
$f_2=w'y'z+x'y'z'+wxyz'$
$f_3=wx'+x'y+yz'+x'z'$

이와같이 個別的으로 各函數의 EPI 를 구할 때는 偶發的으로 共通要素가 나타나는 경우도 있지만 여러 函數에 共有될 共通要素를 망라할 수는 없다. 이 例에서는 f_1 및 f_2 가 $w'y'z$ 를 共有할 뿐이다. 共通要素를 系統的으로 발견하기 위하여 各函數의 EPI 表現을 다음과 같이 표시한다.

$$f_1=\left\{\begin{array}{cccc} w & x & y & z \\ 1 & 1 & - & - \\ - & 1 & - & 1 \\ 1 & - & 0 & 0 \\ 0 & - & 0 & 1 \end{array}\right. \quad f_2=\left\{\begin{array}{cccc} w & x & y & z \\ 0 & - & 0 & 1 \\ - & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right. \quad f_3=\left\{\begin{array}{cccc} w & x & y & z \\ 1 & 0 & - & - \\ - & 0 & 1 & - \\ - & - & 1 & 0 \\ - & 0 & - & 0 \end{array}\right.$$

위의 表示에 있어서 우선 f_1 과 f_2 의 共通要素의 存在如否를 타진한다. 관찰에 의하여 f_1 의 EPI {11——}와 f_2 의 EPI {1110}이 대상이 되며 f_1 의 {11——}를 {11——}={1100, 1101, 1110, 1111}와 같이 4成分으로 분리한다. 이렇게 하면 f_1 과 f_2 에 {1110}이 共通要素로 들어 가는데 {1100}은 f_1 의 EPI {1—00}에, {1101} 및 {1111}은 f_1 의 EPI {—1—1}에 각각 包含되므로 이들은 冗長한 것이며 消去되어 결국 f_1 의 EPI{11——}은 {1110}로 代置된다. 다음에 f_1 의 {1—00}과 f_2 의 {—000}이 대상이 되며 {1—00}={1000, 1100}, {—000}={1000, 0000}로 분리할 때 共通要素 {1000}이 나타나지만 {1100}을 包含하는 f_1 의 EPI가 존재하지 않고(1—00은 물론 除外된다) 또 {0000}을 包含하는 f_2 의 EPI가 존재하지 않으므로 이 試圖는 無爲로 돌아간다. 또 f_1 의 EPI {—1—1}과 f_2 의 EPI {0—01}이 대상이 되기는 하지만 {0−01}은 f_1 의 EPI이기도 하므로 이 두 EPI에서 共通要素를 발견하고저 하는 試圖는 처음부터 하지 않는다. 다음에 f_1 과 f_3의 共通要素의 存在如否를 검토하는데 f_1 의 EPI {1—00}와 f_3 의 EPI{—0—0}이 대상이 되기는 하지만 이 試圖는 無爲로 돌아간다. 또 f_1 의 EPI {11——}가 대치된 {1110}와 f_3 의 EPI {——10}이 대상이 되지만 이것 역시 無爲로 돌아간다.

다음에 f_2 와 f_3 의 共通要素의 存在如否를 검토한다. f_2 의 EPI {0−01} 및 {1100}은 이미 f_1 과 f_3 의 共通要素의 발견을 시도할 때 無爲로 돌아갔으므로 나머지 EPI {−000}만이 대상이 되는데 이것과 f_3 의 EPI {−0−0}와 대조해 본다. {−0−0}={−000, −010}로 분리할 때 {−010}은 f_3 의 EPI {−−10}에 포함되므로 消去되며 따라서 f_3 의 EPI {−0−0}은 {−000}로 대치된다. 이상의 결과에서 各函數는 다음과 같이 표

$$f_1=\left\{\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 0 \\ - & 1 & - & 1 \\ 1 & - & 0 & 0 \\ 0 & - & 0 & 1 \end{array}\right. \quad f_2=\left\{\begin{array}{cccc} 0 & - & 0 & 1 \\ - & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right. \quad f_3=\left\{\begin{array}{cccc} 1 & 0 & - & - \\ - & 0 & 1 & - \\ - & - & 1 & 0 \\ - & 0 & 0 & 0 \end{array}\right.$$

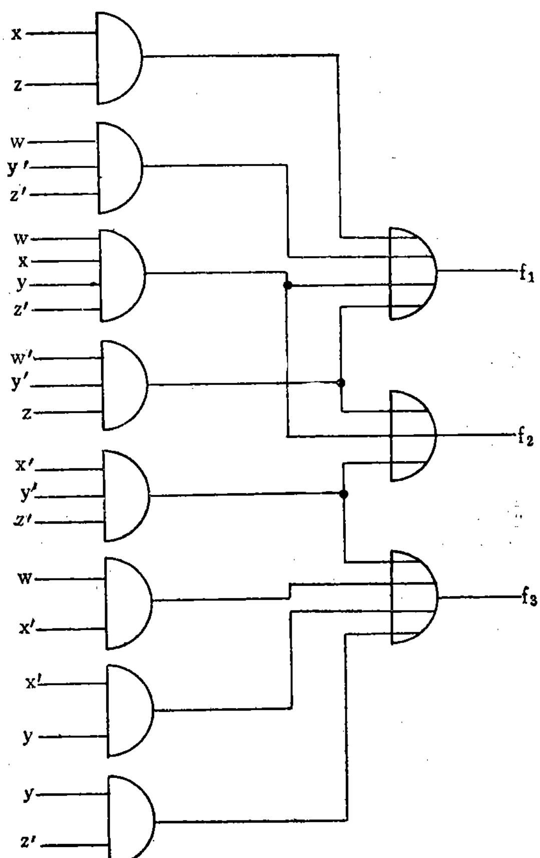

그림1. Minimal circuit

시된다.

마지막으로 f_1, f_2 및 f_3에 다 共有될 共通要素의 存在如否를 검토한다. 그 節次는 어느 두 函數의 共通要素가 나머지 다른 函數에도 들어갈 수 있는지를 검토하면 되는데 그 요령은 앞의 두 函數의 共通要素의 發見節次와 같다. 이 例에서는 세 函數에 다 共有될 共通要素는 발견되지 않는다. 따라서 AND-OR 二段回路로 실현시키면 그림 1과 같으며 8개의 AND게이트와 3개의 OR게이트로 구성된다.

本論文에서는 入力變數가 4, 出力數가 3의 경우를 例로 들어 論하였지만 入力變數 및 出力數가 이보다 많을 경우에도 그 요령은 마찬가지며, 各 두 函數의 共通要素의 발견으로부터 시작하여 보다많은 函數에 共有될 要素를 발견하여가면 되는 것이다.

3. 共通要素發見에 있어서의 몇가지 變型

앞에서 論한 簡單化節次중에서 共通要素를 발견하는데 있어서의 몇가지 變型을 例示하기로 한다. 다음과 같은 EPI 表示의 多出力函數가 주어질 때

$$f_1=\begin{cases}-01-\\10--\\-1-1\end{cases} f_2=\begin{cases}--1-\\01-1\end{cases} f_3=\begin{cases}-11-\\100-\\11-1\end{cases}$$

관찰에 의하여 f_2의 EPI {01−1}과 f_3의 EPI {11−1}에 consensus operation을 적용하여 {01−1, 11−1}→{−1−1}을 얻는다. 이것은 f_1의 EPI이므로 f_1과 f_2의 共通要素를 발견하기 위하여 f_1의 EPI {−1−1}을 {−1−1}={01−1, 11−1}와 같이 분리할 때 f_2와의 共通要素가 아닌 {11−1}이 f_1의 어느 EPI에 포함되지 않아도 이 試圖는 有爲하며, 이렇게함으로써 出力段의 OR게이트의 入力數가 1개 증가하는 대신에 AND게이트가 1개 절감되는 것이다. 또 이 例에서는 f_1의 EPI {−01−}와 f_3의 EPI {−11−}에 consensus operation을 적용하여 {−−1−}를 얻으며, 이것은 f_2의 첫 EPI와 일치하지만 {−−1−}={−01−, −11−}와 같이 분리해서는 않된다. 그 이유는 單一變數로 구성되는 EPI는 實地回路로 실현시킬 때 AND게이트를 요하지 않으므로 위와 같이 분리하여도 AND게이트는 節減되지 않고 出力 OR게이트의 入力數가 1개 증가할 뿐이기 때문이다.

다음에 f_1의 {10−−}을 {10−−}={100−, 101−}와 같이 분리할 때 f_3과의 共通要素가 아닌 {101−}은 EPI {−01−}에 포함되므로 결국 essential multiple-output prime implicants는 다음과 같다.

$$f_1=\begin{cases}-01-\\100-\\01-1\\11-1\end{cases} f_2=\begin{cases}--1-\\01-1\end{cases} f_3=\begin{cases}-11-\\100-\\11-1\end{cases}$$

또 다음과 같은 EPI 表示의 多出力函數에 대해서 고찰해 본다.

$$f_1=\begin{cases}11-1\\0-01\end{cases} f_2=\begin{cases}-0-0\\11-1\\-101\end{cases} f_3=\begin{cases}-0-0\\1111\\000-\end{cases}$$

f_1과 f_2에 共通的으로 들어있는 EPI {11−1}과 f_3의 EPI {1111}을 대상으로 하여 {11−1}={1111, 1101}과 같이 분리할 때 세 函數의 共通要素가 아닌 {1101}은 f_2의 경우에는 消去되지만 f_1의 경우는 消去되지 않는다. 그러나 EPI {0−01}과의 consensus operation {0−01, 1101}→{−101}에 의하여 {1101}은 {−101}로 대치되며 이것은 f_1자체로서는 消去되지 않지만 f_2와 共有되므로 결국 AND게이트가 1개 節減된다. 그 대신 出力 OR게이트의 入力數가 1개 증가된다.

따라서 결국 이 경우의 esssential multiple-output prime implicants는 다음과 같다.

$$f_1=\begin{cases}1111\\-101\\0001\end{cases} f_2=\begin{cases}-0-0\\1111\\-101\end{cases} f_3=\begin{cases}-0-0\\1111\\0001\end{cases}$$

以上 各函數의 EPI를 基準으로하여 여러函數에 共有될 共通要素를 抽出할 수 있는 경우를 要約하면 다음과 같다.

共通要素를 발견할 수 있는 對象 EPI를 그 成分項으로 분리할 때

1) 共通項이 아닌 餘他項이 그 EPI의 所屬函數의 다른 EPI(또는 EPI에 代置된 項)에 包含

될 경우

2) 共通項이 아닌 餘他項이 다른 函數의 어느 EPI(또는 EPI에 代置된 項)과 일치할 경우

3) 共通項이 아닌 餘他項을 그 所屬函數의 어느 다른 EPI와 consensus operation을 적용하여 얻어지는 項이 그 餘他項을 包括하면서 또한 다른 函數의 어느 EPI와 일치할 경우

4. 結 言

本論文에서는 入力變數가 4, 出力數가 3인 경우의 例題를 들어 多出力組合論理函數의 簡單化方法을 論하였지만 一般的인 多出力函數에도 그대로 擴張適用됨은 물론이다. 이 方法을 지금까지 제시된 여러 方法과 비교해 볼때 보다 直接的으로 essential multiple-output prime implicants를 求할 수 있으며 處理節次가 간단하므로 쉽게 解를 얻을 수 있다.

參 考 文 獻

(1) E.J. McCluskey, "Introduction to the theory of switching circuits", New York: McGraw-Hill, 1965.

(2) R.E. Miller, "Switching theory", vol.1, New York: John Wiley & Sons, 1965.

(3) P.R. Schneider and D.L. Dietmeyer "An algorithm for synthesis of multiple-output combinational logic", IEEE Trans. Computers, vol. C—17, pp. 117—128, February 1968.

(4) D.L. Dietmeyer and P.R. Schneider, "Identification of symmetry, redundancy and equivalence of Boolean functions", IEEE Trans. Electronic Computers, vol. EC—16, pp. 804—817, December 1967.

(5) B.B. Gordon, R.W. House, A.P. Lechler, L.D. Nelson and T. Rado, "Simplification of the covering problem for multiple-output logic networks", IEEE Trans. Electronic Computers, vol. EC—15, pp. 891—897, December 1966