

# 信號流出行列 (Signal Flow Matrix)

李 興 九\*

## 1. 序 言

S.J. Mason 이 발표한 信號流出 그래프(signal flow graph)<sup>(1)(2)</sup>는 공학문제, 특히 線型문제를 해석하기 위한 방법으로서는 그 효용가치가 매우 크다. 이와 같은 信號流出그래프가 실제 공학 문제해석에 널리 응용되고 있는 까닭은 해석하고자 하는 系統의 여러 變數間의 因果關係를 信號流出그래프가 직시적으로 잘 나타내줄 뿐만 아니라 특히 信號流出그래프에 의한 Mason의 利得公式<sup>(2)</sup>으로서 그 系統의 이득을 쉽게 구할 수 있기때문이다. 따라서 많은 사람들이 이 信號流出그래프를 회로망이나 자동제어와 같은 여러 분야에 적용해서 그 系統을 해석하고 있다.

1959년에 C.L. Coates<sup>(5)</sup>는 Mason의 利得公式보다도 간단하고 정확명료한 새로운 이득공식을 유도하였고 그후 C.A. Desor<sup>(6)</sup>가 이와같은 Coates의 利得公式이 最適공식임을 밝혔으나 본고에서는 Mason의 일반 이득공식만을 주로 다루기로 하겠다.

그런데 이와같은 Mason이나 Coates의 이득공식을 이용해서 어느 系統의 이득을 구하고자 할 때 가장문제가 되는것은 그 系統을 만족하는 대수방정식에 대응하는 信號流出그래프에서 그래프의 행렬식을 구하는 문제이다. 간단한 系統에서는 별 문제가 되지않지만 좀더 복잡한 系統의 토폴로지 信號流出 그래프(topological signal flow graph)에서 그래프의 행렬식을 구한다는것은 많은 혼돈이 이어나므로 어렵다. 따라서 본 해설에서는 토폴로지 信號流出그래프에 의한 Mason의 이득공식을 간단히 설명한 다음 이 이득공식

의 그래프行列式을 체계적으로 좀더 쉽게 구할 수 있는 새로운 방법을 설명하겠다.

## 2. Mason의一般利得公式<sup>(2)</sup>

지금 어느 系統을 만족하는 代數方程式이 식(2-1)과 같다고 하자.

$$x_i = \sum_{j=1}^n t_{ji} x_j \quad (i=1, 2, \dots, n) \dots\dots\dots(2-1)$$

여기서  $x_i, x_j$ 는 變數로서 信號流出그래프에서는 節點(node)이 되며,  $t_{ji}$ 는 節點  $x_{ij}$ 로부터  $x_i$ 까지의 트랜스미탄스(transmittance)이다.

식(2-1)과 같은 대수방정식으로 부터 그려진 토폴로지적 信號流出그래프에서 系統의 이득을 구하기 위한 Mason의 이득공식은 식(2-2)와 같다.

$$G = \frac{x_{out}}{x_{in}} = \frac{\sum_k M_k \Delta_k}{\Delta} \dots\dots\dots(2-2)$$

여기서

- $G$  = 이득
- $x_{in}$  = 입력절점 변수
- $x_{out}$  = 출력절점 변수
- $M_k$  =  $k$ 번째 진행경로(forward path)의 이득
- $\Delta$  = 그래프의 행렬식
- $\quad = 1 - \sum_m P_{m1} + \sum_m P_{m2} - \sum_m P_{m3} + \dots\dots\dots(2-3)$
- $\Delta_k$  =  $k$ 번째 餘因子
- $\quad = k$ 번째 진행진로와 접촉 되지 않은 그래프에 대한  $\Delta$ 의 값
- $P_{mr}$  =  $r$  非接觸閉路( $r$  non-touching loop) 이득의  $m$ 번째 積

식(2-2)에서 그래프의 행렬식  $\Delta$ 는 信號流出 그래프가 복잡해지면 토폴로지 방법으로 구하기

\* 광운전자공대 전자공학과

가 매우 복잡해서 어렵다. 따라서 새로운 信號流出行列에 의한 방법을 설명하고자 한다.

### 3. 信號流出行列(Signal Flow Matrix) <sup>(7)</sup>

식(2-1)은 식(3-1)과 같이 변형할 수 있다.

$$x_i = \frac{1}{1-t_{ii}} \sum_{j=1}^n t_{ji} x_j \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (3-1)$$

이제 식(3-1)을 信號流出그래프로 나타내면 그림과 같이 된다.

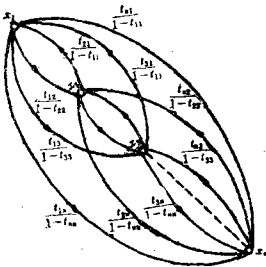


그림 1 信號流出그래프

그런데 그림 1에서 節點間의 트랜스미탄스는 단위이득과 \$t\_{ji}/(1-t\_{ii})\$의 곱으로 표시할 수 있으므로 <sup>(3)(4)</sup> 그림 1은 그림 2와 같은 信號流出그래프로 변형할 수 있다.

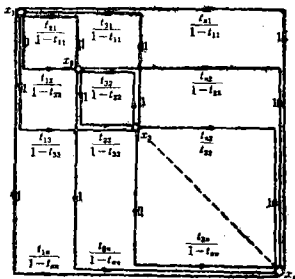


그림 2 변형시킨 信號流出그래프

그림 2에서 트랜스미탄스가 \$(t\_{ji})/(1-t\_{ii})\$인 임의의 枝路는 \$x\_j\$ 번째 행에서 시작해서 主射角線上的 節點에서 끝난다. 따라서 이와같이 모든 지로의 경로(path)가 주대각선상에서 항상 끝나기 때문에 이 信號流出그래프에서 節點間에 접속된 線을 제거하기만 하면 그림 2는 식(3-2)와 같은 行列A로 표시할 수 있다.

그런데 信號流出그래프에서 변수는 절점으로 표시되기 때문에 그림 2의 절점 \$x\_i\$는 변수 \$x\_i\$로서 식(3-2)에 나타냈다.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{t_{21}}{1-t_{11}} & \frac{t_{31}}{1-t_{11}} & \dots & \frac{t_{n1}}{1-t_{11}} \\ \frac{t_{12}}{1-t_{22}} & 0 & \frac{t_{32}}{1-t_{22}} & \dots & \frac{t_{n2}}{1-t_{22}} \\ \frac{t_{13}}{1-t_{33}} & \frac{t_{23}}{1-t_{33}} & 0 & \dots & \frac{t_{n3}}{1-t_{33}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{t_{1n}}{1-t_{nn}} & \frac{t_{2n}}{1-t_{nn}} & \frac{t_{3n}}{1-t_{nn}} & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix} \quad (3-2)$$

이 행렬A는 식(3-1) 우변의 트랜스미탄스 행렬과 같다. 그림 2에서 任意的 폐로이득(loop gain)이나 경로이득(path gain)은 식(3-2)에서 非對角線項들만의 곱으로 구해지므로 식(3-2)의 좌변을 우변으로 옮겨도 비대각선항의 값이 변하지 않는 식(3-3)과 같은 행렬 B를 얻을 수 있다. 여기서 주대각선項은 절점을 나타내게 된다.

$$B = \begin{pmatrix} -1 & \frac{t_{21}}{1-t_{11}} & \frac{t_{31}}{1-t_{11}} & \dots & \frac{t_{n1}}{1-t_{11}} \\ \frac{t_{12}}{1-t_{22}} & -1 & \frac{t_{32}}{1-t_{22}} & \dots & \frac{t_{n2}}{1-t_{22}} \\ \frac{t_{13}}{1-t_{33}} & \frac{t_{23}}{1-t_{33}} & -1 & \dots & \frac{t_{n3}}{1-t_{33}} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{t_{1n}}{1-t_{nn}} & \frac{t_{2n}}{1-t_{nn}} & \frac{t_{3n}}{1-t_{nn}} & \dots & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix} \quad (3-3)$$

식(3-3)에서 \$1/(1-t\_{ii})\$는 \$x\_i\$ 번째 列에 공통적으로 존재하고 또 경로이득이나 폐로이득을 계산할 때마다 주대각선상의 절점이 접촉되어야 하므로 \$(1-t\_{ii})\$를 주대각선상에 넣어서 식(3-4)와 같은 새로운 행렬C를 얻을 수 있다. 이와같은 行列C를 信號流出行列<sup>(7)</sup>(signal flow matrix: SFM)라 한다 이와같은 방법으로 행렬C를 행렬B에서 정의 하였으므로 실제의 SFM에서 트랜스미탄스는 \$(t\_{ji})/(-(-1+t\_{ii}))=(t\_{ji})/(1-t\_{ii})\$의 값으로 주어져야 한다.

$$C = \begin{pmatrix} -1+t_{11} & t_{21} & t_{31} & \dots & t_{n1} \\ t_{12} & -1+t_{22} & t_{32} & \dots & t_{n2} \\ t_{13} & t_{23} & -1+t_{33} & \dots & t_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{1n} & t_{2n} & t_{3n} & \dots & -1+t_{nn} \end{pmatrix} \begin{matrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{matrix} \quad (3-4)$$

이 SFM에서 [결점간의 접속선이 존재한다고 생각하고 주대각선項을 적당히 풀이하면 행렬 C는 Mason이나 Coates의 그래프가 될수있다.

즉,  $[(-1+t_{ii})+1]=t_{ii}$ 를  $x_i$ 결점에서 自己閉路 (self loop)라고 생각하면 SFM은 Mason의 그래프로 생각할 수 있다. 식(3-4)에서 알 수 있는바와같이 이 SFM는 다음과 같은 성질을 갖는다.

- 1) 결점은 주대각선 위에 존재한다.
- 2) 자기폐로는 주대각선 위에 존재한다.
- 3) 信號의 진행경로는 주대각선의 아래로, 逆경로는 주대각선의 위로 向한다.
- 4) 결점에서 나가는 신호는 수직방향으로 나가고 들어오는 신호는 수평방향으로 들어온다.

따라서 入力결점과 出力결점은 다음과 같이 표시된다.

a) 入力결점

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \quad (i=1, 2, 3, \dots, n) \\ -1 & i=j \end{cases}$$

b) 出力결점

$$a_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \quad (j=1, 2, 3, \dots, n) \\ -1 & i=j \end{cases}$$

여기서  $a_{ij}$ =SFM의 성분

5) 행렬은 항상 평방행렬 이다 이와같은 SFM의 성질을 이용해서 Mason의 이득공식으로부터 이득을 구하는 새로운 과정을 다음절에서 구체적으로 설명하고자 한다.

2절에서는 토폴로지 방법에 의한 Mason의 이득공식을 논하였다. 즉, 어느 계통의 이득을 구하려 할때 우선 그 계통을 만족하는 대수방정식의 토폴로지 신호유출 그래프를 그린다음, 이 그래프에 Mason의 공식을 적용하여 이득을 구하는 방법을 설명 하였다.

#### 4. SFM에 의한 利得

이제 어느 선형계통을 만족하는 대수방정식(4-1)과 같은 행렬로 주어졌을때 이득  $x_4/x_1$ 을 구해보자.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a_{21} & a_{21} & a_{41} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{43} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \dots\dots(4-1)$$

여기서  $x_1$ 은 입력변수이며  $x_4$ 는 출력변수 이다. 이제 식(4-1)에 대응하는 SFM를 구성시키면 식(4-2)와 같이 된다.

$$\begin{pmatrix} -1 & a_{21} & a_{31} & a_{41} \\ a_{12} & -1+a_{22} & a_{32} & a_{42} \\ a_{13} & a_{23} & -1+a_{33} & a_{43} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \dots\dots\dots(4-2)$$

식(2-2)와같은 Mason의 이득공식을 사용해서 이득  $x_4/x_1$ 을 구하기 위하여 신호유출 그래프를 그리지않고 式(4-2)와 같은 SFM에서 직접 그래프의 행렬식  $\Delta$ ,  $k$ 번째 진행경로의 이득  $M_k$ ,  $k$ 번째의 여인자  $\Delta_k$ 를 구하는 과정을 설명 하면 다음과 같다.

SFM의  $a_{12}$ 에서 시작해서  $x_2, x_3, x_4$ 의 어느 결점을 거쳐  $x_1$ 결점과 일치하는 列에 도달할때 까지 추적시키면서 폐로를 형성시킨다. 이때 어느 한 결점과 접촉할때마다 열을 바꾸어서 진행해 나가는데 같은 열은 한 폐로에서 한번이상 지나지않는다.  $a_{12}$ 에서 시작한 폐로가 모두 끝나면  $a_{13}, a_{14}$ 의 순서로 시작해서 계속 폐로를 형성시킨다. 이와같은 1行에서 시작한 폐로가 모두 끝나면 1行1列을 소거한 小行列에서 위와같은 과정을 반복한다. 이와같은 과정은

$$\begin{pmatrix} -1+a_{33} & a_{13} \\ a_{34} & -1 \end{pmatrix}$$

와 같은 (2×2) 소행렬의 폐로가 얻어질때까지 계속한다.

폐로중에서 몇개만을 구해보면 다음과 같다.

- 1)  $\frac{a_{12}}{1-a_{22}} \cdot \frac{a_{21}}{1}$
- 2)  $\frac{a_{12}}{1-a_{22}} \cdot \frac{a_{22}}{1-a_{33}} \cdot \frac{a_{31}}{1}$
- 3)  $\frac{a_{12}}{1-a_{22}} \cdot \frac{a_{23}}{1-a_{33}} \cdot \frac{a_{34}}{1} \cdot \frac{a_{41}}{1}$
- 4)  $\frac{a_{12}}{1-a_{22}} \cdot \frac{a_{24}}{1} \cdot \frac{a_{41}}{1}$

$$5) \frac{a_{12}}{1-a_{22}} \cdot \frac{a_{24}}{1} \cdot \frac{a_{43}}{1-a_{33}} \cdot \frac{a_{31}}{1}$$

$$6) \frac{a_{13}}{1-a_{33}} \cdot \frac{a_{31}}{1}, \text{ 등과 같다.}$$

이와 같은 방법으로 모든 폐로를 추적하므로써  $P_{m1}$ ,  $P_{m2}$ , 등의 항이 SFM에서 결정되는 것이다.

또  $M_k$ 는  $x_1$ 행에서  $x_4$ 절점까지 경로를 추적하므로써 구해지며  $\Delta_k$ 는  $\Delta$ 와 같은 방법으로 얻어진다. 이때  $M_k$ 의 처음 시작되는 항은  $x_1$ 행에만 존재한다. 이와 같은  $M_k$ 와  $\Delta_k$ 의 처음과 마지막 항만을 구하면 다음과 같다.

$$M_1 = \frac{a_{12}}{1-a_{22}} \cdot \frac{a_{23}}{1-a_{33}} \cdot \frac{a_{34}}{1}$$

$$\Delta_1 = 1$$

$$M_{last} = \frac{a_{14}}{1}$$

$$\Delta_{last} = 1 - \frac{a_{23}}{1-a_{33}} \cdot \frac{a_{32}}{1-a_{22}}$$

## 5. 結 言

임의의 선형계통을 만족하는 대수방정식을 SFM로 구성시키면 신호유출 그래프를 그릴 필요없이 체계적인 과정으로 이 SFM에서 그래프의 행렬식을 구할 수 있다. 따라서 어느정도 복

잡한 계통의 이득도 신호유출 그래프에 의한 토폴로지 방법에서 보다는 쉽게 결정할 수 있다.

## 參 考 文 獻

1. S.J. Mason, "Feedback theory-some properties of signal flow graphs", Proc. IRE, Vol.41, pp. 1144-1156, September 1953.
2. S.J. Mason, "Feedback theory-further properties of signal flowgraphs", Proc. IRE, Vol.44, pp. 920-926, July 1956.
3. D.K. Cheng, "Analysis of linear systems", Addison Wesley Publ. Co., 1966.
4. B.C.Kuo, "Automatic Control systems", Prentice-Hall, Inc., 1967.
5. C.L. Coates, "Flow graph solution of linear algebraic equations", IRE Trans. on Circuit Theory, Vol. CT-6, pp. 170-187, June 1959.
6. C.A. Desor, "The optimum formula for the gain of a flow graph or a simple derivation of Coate's formula", Proc. IRE, Vol.48, pp. 883-988, May 1960.
7. M.S. Vasudeva, "Signal flow matrix-A new approach to signal flow graphs", IRE Trans. on Circuit Theory (Correspondence), Vol. CT-14, pp. 84-86, March 1967.