技術解說

自動制御系統의 敏感度解析

陸軍士官學校 楊 慶 甲*

I. 序 論

制御系統의 敏感高(sensitivity)에 對한 연구는 制御系統의 解析과 合成에 重要한 部分을 차지하고 있다. 그 理由는 系統의 數學的인 model이 여러가지 假定을 수반하기 때문에 model에 의한 豫測値와 實際位와는 差異가 있기 때문이다. 더우기 실험을 통하여 數學的 model과 實際 system의 相關度를 알아낸다는 것은 매우 費用이 많이 들 경우가 있으므로 설계시에 數學的 model의 parameter의 변동에 대한 system 反應, 그리고 그것이 實際 system의 反應과의 關係를 事前에 解析한다는 것은 매우 重要한 일이다. 또한 system 合成에 있어서도 數學的 model의 parameter와 똑같은 實際裝置를 만들 수 없으며 또한 어떠한 두개의 같은 製品이라도 그 特性이 똑같을 수 없는 것이다. Parameter의 변동은 system 自體에 의하여 變動되기도 하지만 외부 환경의 변화, 즉, 溫度・壓力・衝擊・雜音等에 의하여도 變動된다. 또한 system의 長期間 使用으로 因한 老朽化도 Parametər 變動의 原因이 된다. sensitivity에 대한 연구는 實際로 system의 動作의 不正確性을 決定하기 위하여는 勿論이지만 system 制御象의 質을 向上하기 위하여는 절대로 必要한 것이다.

自動制御系統의 sensitivity에 대한 연구는 feed back 理論에서 연유하였다. 즉, feedback은 parameter 變動, 外部雜音 等의 영향을 감소시킬 수 있기 때문이다. 따라서 Bode[1]가 sensitivity에 대하여 言及한 것은 自然의 歸結이라 볼 수 있다. 그후 많은 사람들이 여러 연구결과를 발표하였으며 이는 Horowitz[2]의 册에 集約되어있다. adaptive, optimal 制御 그리고 安定度等에 대한 sensitivity 연구는 最近 研究中에 있는 것이 많다. 여기에 대한 參考文獻目錄은[3,4,5] 몇군데에 수록되어있다.

II. Sensitivity의 정의

Sensitivity는 여러가지로 정의되어 있다. 그 各各은 固有의 system에 대한 特異한 目的에 따라 다른 의미를 가지고 있다. Bode[1]는 전달함수 (transfer function) T(s)의 Parameter α에 대한 Sensitivity (system sensitivity) 정의를 다음과 같이 하고 있다.

$$S^T{}_\alpha=\frac{\partial ln\alpha}{\partial lnT}=\frac{\partial\alpha}{\alpha}\Big/\frac{\partial T}{T} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(1)$$

즉, 주어진 α의 %변화에 대한 T의 %변화의 비를 뜻한다. Horowitz[2]는 Bode의 정의의 逆을 sensitivity로 정의하고 있다.

$$S^T{}_\alpha=\frac{\partial lnT}{\partial ln\alpha}=\frac{\partial T}{T}\Big/\frac{\partial\alpha}{\alpha} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(2)$$

root sensitivity라 함은 Parameter 변화에 따를 主要 根에의 영향을 말한다.[2,6,7]

Sensitivity에 대한 다른 정의로는 comparative sensitivity가 있으며 이는 Perkins와 Cruz[8]에 의하여 소개되었으며 이는 閉 loop와 開 loop의 오차를 비교한 것이다. 기타 여러 Sensitivity에 關한 정의와 그 公式은 문헌 9에서 찾아볼 수 있다.

그러나 Parameter α의 변동에 대한 Sensitivity S는 一般的으로 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$S=\frac{\partial\times(t,\alpha)}{\partial\alpha}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(3)$$

但, X는 n次의 狀態變數 vector로서 다음 1階

* 陸軍士官學校 電氣工學科 助教授

微分方程式을 滿足시킨다.

$\dot{x}=f(t,x,\ u,\alpha),\ x(t_o)=x^o$ ····················(4)

u는 m次의 人力 vector이며 α는 p次의 vector parameter (real)이고 $t(t_o\leq t<\infty)$는 時間, 그리고 $\dot{x}=\dfrac{dx}{dt}$이다.

Parameter의 변동이란 어떤 基準値에서 부터의 변동을 말하며 이는 時間에 따라서 변화하는 경우와 고정된 경우로 나눌 수 있다. 또한 Parameter의 변화를 확실히 아는 경우와 그 변화가 random하여서 確率上으로만 아는 경우도 있다. 변화의 크기로 본다면 미소변화와 대변화 등으로 區別할 수 있다. Miller와 Murray[10]의 用語를 빌린다면 parameter 변동에 대한 senistivity 해석은 3部分으로 나누어 지며, 이는 α, β, λ 변동인 것이다. system 방정식의 次數를 변화시키지 않으며 또한 초기조건의 변화가 없는 변동을 α변동이라고 한다. β변동이란 Parameter의 변화가 system 방정식에는 영향을 주지 않고 초기조건에 영향을 주는 경우이며, λ변동이란 system 방정식의 次數의 변동을 주는 것을 말한다. 여기서는 주로 Parameter가 미소변동을 하며 동시에 α변동을 하는 경우만을 언급하겠다.

Ⅲ. Sensitity 방정식

Parameter의 미소변동에 대한 System 反應에의 영향은 sensitivity[5]를 계산하고 해석하므로서 알수 있는데,

$$S_{ij}(t)=\frac{\partial x_i(t)}{\partial\alpha_j}\bigg|_{\Delta_{\alpha j=0}}\quad \begin{matrix} i=1,2,\cdots,\ n \\ j=1,2,\cdots,p\end{matrix} \cdots\cdots\cdots(5)$$

이는 Parameter α_j에 대한 狀態率數 X_i의 Sensitivity 또는 Sensitivity 함수(또는 係數)라 칭한다. $S_{ij}(t)$는 system 방정식(4)를 α에 대하여 微分하여서 얻어진다.

$$\frac{\partial\dot{x}}{\partial\alpha}=\frac{\partial f}{\partial x}+<\frac{\alpha f}{\alpha x},\ \frac{\partial x}{\partial\alpha}> \quad\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

但, <. , .>는 vector의 內積을 뜻한다.

다음 關係式

$$\frac{\partial\dot{x}}{\partial\alpha}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial x}{\partial\alpha}\right)=\frac{d}{dt}S(t)\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

을 사용하면 (6)式은

$$\frac{dS(t)}{dt}=<\frac{\partial f}{\partial x},\ S(t)>+\frac{\partial f}{\partial\alpha},$$

$$S(t_o)=0\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

과 같이 된다. (7)式에서 $\dot{x}$, $\dfrac{ds}{dt}$, $\dfrac{\partial\dot{x}}{\dot{x}}$는 t와 α에 대하여 연속이라고 가정한다. (8)式은 sensitivity 방정식이라 칭하며 이는 system 방정식이 선형이든 비선형이든 간에 선형방정식인 것이다. sensitivity S는 방정식 (8)에서 부터 求할 수 있다.

초기조건의 변동에 대한 Sensitivity 방정식은 (8)式과 같으나 초기조건은

$$S(t_o)=1\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(9)$$

이다 왜냐하면 system 방정식 (4)의 解는 $X(t,\ t_o)=x^o+\int^t_{to} f(\tau,x,u,\alpha_o)d\tau$ 이고 x^o에 대한 x의 sensitivity는 $S(t_o)=\dfrac{\partial x}{\partial x_o}=1$

이기 때문이다. λ변동은 System 방정식

$$\dot{x}_i=f_i\ (x_1,\cdots,x_n;\ x_{n+1},\cdots,x_{n+r},\ u_1,\cdots,u_m,\ t)$$
$$i=1,\cdots n$$
$$\lambda\dot{x}_{n+k}=f_{n+k}\ (x_1,\cdots,\ x_n;x_{n+1},\cdots,\ x_{n+r},\ u_1,\cdots,\ u_m,\ t)\ \ k=1,\cdots,r\cdots\cdots\cdots\cdots(10)$$
$$x_j(t_o)=x^o{}_j\ ,\ j=1,\cdots,\ n+r$$

에 대하여 다음과 같은 sensitivity 방정식을 가진다.

$$\frac{dsj}{dt}=<\frac{\partial fj}{\partial x_i},\ S_i>,\quad \begin{matrix} i=1,2,\cdots\cdots,\ n+r \\ j=1,2,\cdots\cdots,\ n\end{matrix}$$

$$\lambda\ \frac{ds_{n+k}}{dt}=<\frac{\partial f_{n+k}}{\partial x_i},S_i>-\frac{dx_{n+k}}{dt}$$

$$k=1,2,\cdots,\ r\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(11)$$

$$S_l(t_o)=0,\ \ l=1,2,\cdots,\ n+r$$

但, $S_j=\partial x_j/\partial\lambda$

$\lambda=0$ 일때 system 방정식과 sensitivity 방정식은 縮退되며 一般的으로 $\dfrac{dx_n+k}{dt}$는 $t=t_o$에서 不連續點을 가진다.

α변동에 되돌아 가서 sensitivity 방정식의 예를 들어 보겠다.

예: relaxation 발진의 방정식, van der Pol 방정식을 들어 보면

$$\ddot{x}-\epsilon(1-x^2)\dot{x}+x=0,\ \ x(0)=x^o,\dot{x}(0)=\dot{x}^o\cdots(12)$$

$\epsilon=0$ 이면 방정식은 선형 調和發振을 하며 system 反應은 sinusoidal 하게된다. ϵ이 크면

Relaxation 발진기의 방정식이 되며 상태방정식으로 표시하면

$$\dot{x}_1=x_2 \quad (x=x_1)$$
$$\dot{x}_2=\varepsilon\ (1-x_1^2)x_2-x_1 \quad (x_2=\dot{x}_1) \cdots\cdots\cdots\cdots (13)$$

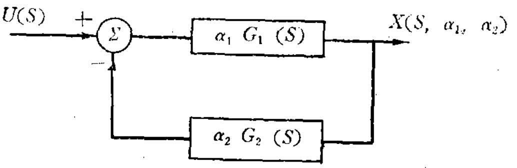
이고 Sensitivity 방정식은

$$s_1=s_2$$
$$s_2=\varepsilon(1-x^2{}_1)s_2-(1+2\varepsilon x_1x_2)s_1$$
$$+(1-x^2{}_1)x_2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (14)$$
$$s_1(t_o)=0, \quad s_2(t_o)=0$$

이다.

Sensitivity 는 sensitivity 방정식을 풀어서 얻을 수도 있으나 계산기를 써서 simulation 을 하여 얻는 방법도 있다.(11)

Kokotovic(11)의 방법은 線型實係數 (또는 서서히 변화하는 係數)의 system 의 sensitivity 를 구하는 제일 간편한 simulation 방법 가운데의 하나이다. 다음과 같은 간단한 경우를 생각하여보면



이 system 의 전달함수 G 는

$$G(s,\ \alpha_1,\ \alpha_2)=\frac{\alpha_1G_1(s)}{1+\alpha_1\alpha_2\ G_1(s)G_2(s)} \cdots (15)$$

그리고 system response 는

$$X(s_1\alpha_1,\alpha_2)=U(s)G(s,\ \alpha_1,\ \alpha_2) \cdots\cdots\cdots\cdots (16)$$

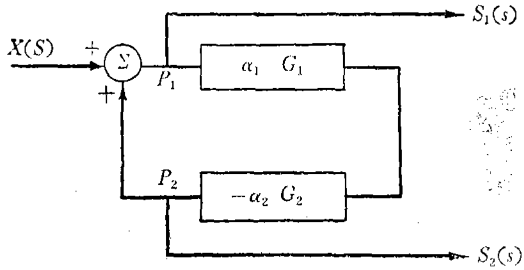
이 경우 sensitivity 는

$$S_1(s)=\frac{\partial x(s,\alpha_1,\alpha_2)}{\partial\alpha_1/\alpha_1} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (17)$$

$$=X(s)\ \frac{1}{1+\alpha_1\alpha_2\ G_1(s)\ G_2(s)} \cdots\cdots\cdots (17a)$$

$$S_2(s)=X(s)\ \frac{-\alpha_1G_1\alpha_2G_2}{1+\alpha_1\alpha_2G_1G_2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (17b)$$

식 (17a) 및 (17b)에 표시된 sensitivity 는 다음 그림에서 구할 수 있다.



따라서 sensitivity 는 점(sensitivity point) P_1, P_2에서 구할 수 있으며, 단, 이때 입력은 $U(s)$가 아니라 $X(s)$이다. 이와같은 方法은 multiloop 계통도에도 적용가능하다.

Ⅳ. Sensitivity 의 응용

지금까지 sensitivity 함수의 계산방법에 대하여 언급하였다. 다음에는 sensitivity 해석의 중요성 및 그 응용에 대하여 말하고자 한다. 어떠한 system 을 설계하여 실제로 system 을 만들었을 때 사용한 부속품의 정밀도 문제는 필연적으로 대두하게 된다. system 의 동작특성에 대한 수학적인 해석에서는 정확한 계수를 가지고 논할 수 있으나 공학적인 면에서 볼 때는 system 부속품의 오차한계, 즉, system 의 동작특성을 크게 변동시키지 않는 범위내에서의 부속품의 허용오차가 문제가 되는 것이다. 허용오차에 대하여는 실제 문제에 있어서 실험을 통하여 얻어지는 실제 data 를 가지고 논하고 있으나 sensitivity 해석법을 이용하면 해석적으로 미리 예측할 수 있는 것이다. 이것은 경제적인 면에서도 상당한 경비절약을 가져올 수 있는 것이다.

지금 표준 system 을 알고 있다고 가정하자. 문제는 표준 system 의 동작특성과 parameter 가 표준 system 의 것과 약간 상이한 경우의 동작특성과의 차이가 얼마나 되는가 하는 것이다.

상기한 오차해석 이외에도 안정도 해석에 sensitivity 를 이용할 수 있다. 안정도 해석에는 Lyapunov 의 방법이 많이 이용되고 있으며 상당히 위용한 방법이다. system 의 sensitivity 방정식은 그 sensitivity 의 안정성에 관하여도 많은 정보

를 제공하여 준다. 오차해석은 parameter 변동에 대한 system 동작특성의 변화를 살피는 것이었으나 Lyapunov의 안정도 해석은 초기 조건의 변화에 대한 것이다.

그 이외에도 system의 reliability 문제, adaptive control 문제, structural stability 문제등 상당히 많은 방면에 특히 이론의 실제응용시에 발생하는 제반문제에 필요불가결한 문제 등에 sensitivity의 적극적인 응용이 기대되는 것이다.

참고문헌

1. Bode, H.W., "Network Analysis and Feedback Amplifier Design", Van Nostrand, New Jersey, 1945.
2. Horowitz, I.M., "Synthesis of Feedback Systems," Academic Press, New York, 1963.
3. Kokotovic, P.V. and Rutman, R.S., "Sensitivity of Automatic Control Systems (Survey)" Automation and Remote Control, Vol. 26, No. 4, pp. 730-750, April, 1965.
4. Athans, M. "The Status of Optimal Control Theory and applications for Deterministic Systems." IEEE AC-11 No. 3, pp. 580-595, July, 1966.
5. Radanovic, L., (Editor), "Sensitivity Methods in Control Theory," Pergamon Press, London, 1966.
6. Ur, H., "Root-Locus Properties and Sensitivity Relations in Control Systems," IRE AC-5, pp. 57-65, January, 1960.
7. Huang, R.V., "The Sensitivity of the Poles of Linear Closed-Loop Systems," AIEE Applications and Industry, Vol. 77, pp. 182-187, 1958.
8. Perkins, W.R. and Cruz, J.B.Jr., "The Parameter Variation Problems in State Feedback Control Systems," J. Basic Engineering, Transaction ASME, Series D, Vol. 87, pp. 120-124, March 1965
9. Gorsk:-Popiel, "Classical Sensitivity-A Collection of Formulas, IEEE, CT-10, June, 1963.
10. Miller, K.S. and Murray, F.J., "A Mathematical Basis for an Error Analysis of Differential Analyzers, J. of Math. and Phy. Vol. 32 No. 2—3, pp. 136-163, July-October 1953.
11. Tomovic, R., "Sensitivity Analysis of Dynamic Systems." Ch. 3, McGraw-Hill, New York, 1963.