T.L. SHELL의 응력해석

임 영 배*・이 수 곤**

□Abstract□

The Analysis of T. L. Shell

As we all know a large number of thin shell with the shape of E.P and H.P have been constructed. In this paper, we will be interested to the bending problem of thin translational shell.

Two basic differential equations of shallow shell are to be used to derive approximate solution of it. Stress analysis of E.P translational shell with constant thickness under uniform surface oad is to be given as an example.

More exact solution formulated by K. Apeland can be found in the proceeding, Journal of the Engineering Mechanics Division, A.S.C.E, Feburary, 1961.

1. 서 언(序言)

근래 H.P 및 E.P 형태의 translational shell(이하 T.L. shell이라 약칭함)이 shell 구조에 큰 비중을 차지하고 있음은 주지의 사실이며 여기에 호응하여 이런 형태를 갖는 shell 구조의 역학적 특성에 깊은 연구가 진행되고 있는 것 같다. 그러나 견문이 좁은 우리의 소견으로는 타 형태의 shell 구조, 예를 들어 구형 shell 등의 응력해석에 비하여 T.L. shell의 응력해석은 아직 미비한 점이 많은 것 같다. 즉 구형(球形), 원통형 shell 등의 응력해석은 물론 경계조건이나 하중상태에 따라 다르겠으나 곡응력(曲應力) 산출까지 어느 정도 완전하게 해결되고 있는 반면 T.L. shell의 응력해석은 주로 막이론(膜理論)에 의한 직응력(直應力)의 산출에 그치고 있음이 현단계가 아닌가 한다.

여기서 우리는 shallow shell 이론의 두 기본식을 가지고 어느 특수조건을 전제로 T.L. shell의 응력 해석을 시도해 보려한다. 원래 천학비재한 우리로서는 이 문제를 완결할 수 없음에 큰 심적 부담을 느끼며 미비하나마 여러 선배 제현 앞에 본 소론을 내 놓으며 아낌없는 지도를 바라는 바이다.

2. 응력해석의 조건

앞으로 취급하게 될 T.L. shell 응력해석에 관한 본 근사법은 다음과 같은 조건을 전제로 한다.

1) T.L. shell의 중립면은 이차곡면의 일종으로 다음 방정식으로 표시되는 경우에 한한다.

$$z=\frac{1}{2}k^2(\gamma x^2+y_2)\quad 0<k_2\leq 1 \tag{1}$$

(1)식에서 $\gamma>0$이면 elliptic paraboloid

$\gamma<0$이면 hyperbolic paraboloid

$\gamma=0$이면 hyperbolic cylinder

이며 특히 $\gamma=1$일 때는 곡면은 축대칭면(軸對稱面)이 된다.

2) 단(端)에서는 곡모우먼트가 영(零)이고 단재(端材)(edge beam or edge member)는 그 축방향으로는 강하나 shell의 접평면(接平面) (tangential plane to the shell) 방향으로는 bending resistance)가 거의 없다. 즉 경계조건은

$$x=\pm a;\ \omega=N_x=M_x=\varepsilon_y=0$$

$$y=\pm b;\ \omega=N_y=M_y=\varepsilon_x=0 \text{ 이다. } \quad (2-a, b)$$

3) (1)식으로 주어지는 곡면은 flat하여 $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2$, $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2$, $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial z}{\partial y}\right)$ 등은 무시할 수 있다. E.Reisner에 의하면 shallow shell 이론식을 가지고 $\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)\leq\frac{1}{8}$ 일 때에는 이것을 무시하고도 거의 응력치를 얻을 수 있으며 $\left(\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right)\leq\frac{1}{2}$ 일 때에는 실용목적으로 충분한 값을 얻을 수 있다고 한다.

3. 기본 미분방정식 및 그 변형

주지하는 바와 같이 shallow shell의 두 기본식은

* 전남대학교 공과대학 조교수

** 전남대학교 공과대학 전임강사

$$\nabla^4 F + Eh\nabla_R{}^2\omega = f(p)$$

$$\nabla^4\omega - 1/D\nabla_R{}^2 F = f'(p) \qquad (3\sim a, b)$$

이다. 이것을 §2에서와 같은 조건하에 변형시켜 T.L. shell의 응석해석에 응용해 보려한다. (3)식에서 F는 Airy stress function, ω는 법선방향(法線方向)의 shell element의 변위(變位)(displacement)이며,

$$\nabla_R{}^2 = \left(\frac{1}{r_y}\cdot\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{r_{xy}}\cdot\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} + \frac{1}{r_x}\cdot\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right),$$

$$\nabla^4 = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\cdot\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)^2. \qquad (4\sim a, b)$$

$$f(p) = \int\frac{\partial^2 px}{\partial x^2}dx + \int\frac{\partial^2 py}{\partial y^2} - \nu\frac{\partial px}{\partial x} - \nu\frac{\partial py}{\partial y}$$

$$f'(p) = \frac{pz}{D} - \frac{1}{D}\left[\frac{1}{r_x}\int pxdx + \frac{1}{r_y}\int pydy\right] \qquad (5\sim a, b)$$

r_x, r_y는 x, y방향의 주곡율 반경이므로

따라서

$$\frac{1}{r_{xy}} = 0,\quad \frac{1}{r_x} = \frac{L}{E},\quad \frac{1}{r_y} = \frac{N}{G} \qquad (6\sim a, b, c)$$

이다. 단 E, G는 제 1 기본량(first fundamental quantity)으로 $E=1+p^2$, $G=1+q^2$이며 L, N는 제 2 기본량으로 $L=r/\sqrt{1+p^2+q^2}$, $N=t/\sqrt{1+p^2+q^2}$이며 $p=\frac{\partial z}{\partial x}$ $q=\frac{\partial z}{\partial y}$, $r=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $t=\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$이다. 따라서 §2에서와 같은 조건에서는

$$\nabla_R{}^2 = k_2\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \gamma\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \qquad (4\sim a)$$

$$f(p) = 0,\quad f'(p) = \frac{p_z}{D} \qquad (5\sim a, b)$$

이상 (4), (5)식을 가지고 기본식 (3)에서 응력변위함수(stress-displacement function) ϕ를 다음과 같이 정의한다. 즉

$$\omega = \nabla^4\phi \qquad (6\sim a)$$

ω를 이와같이 정의하면 $(3\sim a)$식에 의하여

$$F = -Eh\nabla_R{}^2\phi \qquad (6\sim b)$$

이다. 다시 (6)식으로 정의되는 ω, F를 $(3\sim b)$식에 대입하면

$$\nabla^8\phi + \alpha\nabla_r{}^4\phi = \frac{p_z}{D} \qquad (7)$$

이다. (7)식에서 $\alpha, \nabla_r{}^4$는 각각

$$\alpha = 12(1-\nu^2)\left(\frac{k_2}{h}\right)^2$$

$$\nabla^4{}_r = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + {}_r\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \qquad (8\sim a, b)$$

이다. (7)식으로 주어지는 미분방정식의 해(解)가 결정되면 미지응력은 다음 관계에 의하여 구할 수 있다.

$$N_x = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -Ehk_2\nabla_r{}^2\phi, yy$$

$$Ny = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -Ehk_2\nabla_r{}^2\phi, xx$$

$$T(Nxy=Nyx) = -\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y} = Ehk_2\nabla_r{}^2\phi, xy$$

$$Mx = -D\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2} + \nu\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2}\right) = -D\nabla^4(\phi, xx + \nu\phi, yy)$$

$$My = -D\left(\frac{\partial^2\omega}{\partial y^2} + \nu\frac{\partial^2\omega}{\partial x^2}\right) = -D\nabla^4(\phi, yy + \nu\phi, xx)$$

$$-Mxy = Myx = -D(1-\nu)\frac{\partial^2\omega}{\partial x\partial y}$$

$$= -D(1-\nu)\nabla^4(\phi, xy)$$

$$Qx = -D(\nabla^2\omega), x = -D\nabla^6\phi, x$$

$$Qy = -D(\nabla^2\omega), y = -D\nabla^6\phi, y \qquad (9\sim a, h)$$

$(9\sim a, h)$에서 x, y는 x, y에 관한 편미분(偏微分)이다.

4. 미분방정식의 해(解)

(7)식은 선형 미분방정식이므로 이 식의 particular solution을 ϕ_p, homogenous solution을 ϕ_h라 하면 $\phi=\phi_p+\phi_h$가 그 general solution이다. 그러면 먼저 (7)식의 homogenous solution부터 구해 보기로 한다.

≫homogenous solution≪

homogenous solution은 $x=\pm a$에서의 경계조건을 생각하여 plate 문제에서와 같이 Levy type의 급수해(級數解)를 가정한다. 즉

$$\phi_h = \sum_{n=1}^{\infty}\phi(y)\cos\lambda x = \sum_{n=1}^{\infty}a_n e^{\lambda\rho y}\cos\lambda x,\quad \lambda = \frac{n\pi}{2a} \quad (10)$$

라 하고 이것을 (7)식에 대입하면

$$[(-\lambda^2+\lambda^2\rho^2)^4 + \alpha(-\lambda^2+\gamma\lambda^2\rho^2)^2]a_n e^{\lambda\rho y}\cos\lambda x = 0$$

이므로

$$[(-\lambda^2+\lambda^2\rho^2)^4 + \alpha(-\lambda^2+\gamma\lambda^2\rho^2)^2] = 0 \qquad (11)$$

이어야 한다. (11)식에서 ρ는 결정해야 할 방정식의 근으로 이것을 다시

$$\rho = \sqrt{1+m},\quad \varepsilon = \frac{2\lambda}{\sqrt[4]{4\alpha}} \qquad (12\sim a, b)$$

라 놓으면 (11)식의 해(解)는

$$\left.\begin{matrix} m_1 \\ m_2 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2}\,\varepsilon^2}[a \pm i(\sqrt{2}\gamma^2 + b)],$$

$$\left.\begin{matrix} m_3 \\ m_4 \end{matrix}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2}\,\varepsilon^2}(a \pm i(-\sqrt{2}\gamma + b)]$$

이다. 단

$$a = \sqrt{\sqrt{r^4 + 4\varepsilon^2(1-\gamma)^2} - \gamma^2}$$

$$b = \sqrt{\sqrt{r^4 + 4\varepsilon^2(1-\gamma)^2} + \gamma^2}$$

따라서 a, b가 계산되면 이에 따라 $m_1\sim m_4$가 정해지고 다시 $m_1\sim m_4$의 값을 $(12\sim a)$식에 대입하면 ρ의 값이 결정되나 a, b, ε의 계산과 그 결과 얻어지는 ρ의 값 계산과정이 대단히 번잡하므로 $\lambda<1$일 때의 근사해를 다음과 같이 구하기로 한다. 즉 $\lambda<1$이면 $(\lambda^2, \lambda^4)\ll 1$인 것이므로 새로운 배개변수 ρ를

$$\rho=\sqrt{1+\frac{m}{\lambda^2}} \qquad (13)$$

라 놓으면 (11)식은

$$m^4+\alpha[\lambda^2(r-1)+rm]^2 \fallingdotseq m^4+\alpha\gamma^2m^2=0\text{이다.}$$

식 $m^4+\alpha\gamma^2m^2=0 \qquad (14)$

의 해는 $m_{1,2}=0$ 중근(重根), $m_{3,4}=\pm\alpha^{\frac{1}{2}}\gamma i$이다.

이 $m_{1\sim4}$의 값을 (13)식에 대입하면

$$\rho_{1\sim4}=1\text{중근(重根)},\ \rho_{5\sim8}\fallingdotseq\pm\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\alpha^{\frac{1}{4}}\gamma^{\frac{1}{2}}}{\lambda}(1\pm i)$$

이므로 homogenous solution은

$$\phi_k=e\lambda^y(a_0+a_1y+a_2y^2+a_3y_3)+a_4e\mu^{(1+i)y}+a_5e\mu^{(1-i)y}+a_6e^-\mu^{(1+i)y}+a_7e^-\mu^{(1-i)y}$$

이다. 단

$$\mu=\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha^{\frac{1}{4}}\gamma^{\frac{1}{2}} \qquad (15)$$

이고 $a_0\sim a_3$는 실적분상수(實積分常數), $a_4\sim a_7$는 복소적분상수(復素積分常數)이나 ϕ_h가 실수(實數)이어야 하는 점과 응력 및 변위의 대칭성을 고려하면

$$\phi_h=(a_0+a_2y^2)\cosh\lambda y+(a_1y+a_3y^3)\sinh\lambda y+a_4\cosh\mu y\cos\mu y+a_5\sinh\mu y\sin\mu y \qquad (16)$$

라 쓸 수 있다. (16)식의 적분상수는 모두 실수이다.

≫particular solution≪

(7)식의 Particular solution은 Navier type의 solution을 가정한다. 즉 주어진 하중을 Fourier급수로 전개하면 근사적인 particular solution을 구할 수 있다. 먼저 등분포면하중(等分布面荷重)(uniform surface load)시는

$$p_z=\sum_{n=1}^{\infty}p_n\cos\lambda x,\ \ \phi_p=\sum_{n=1}^{\infty}\phi_n\cos\lambda x \qquad (17\sim a,b)$$

라 놓아

$$\phi_n=\frac{1}{\lambda^8+\alpha\lambda^4}\cdot\frac{p_n}{D} \qquad (18)$$

을 얻는다. 등분포하중이 아닐 때에는

$$p_z=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}p_{mn}\cos\lambda x\cos\sigma y,$$

$$\phi_p=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}\phi_{mn}\cos\lambda x\cos\sigma y \qquad (19\sim a,b)$$

라 놓아

$$\phi_{mn}=[(\lambda^2+\sigma^2)^4+\alpha(\lambda^2+\gamma\sigma^2)^2]\cdot\frac{p_{mn}}{D} \qquad (20)$$

을 얻는다. (18~20)식에서 $\sigma=\frac{m\pi}{2b}$ $p_n=\frac{4}{\pi}p_z$, p_{mn}의 값은 하중상태에 따라 여러가지로 표시될 것이나 여기서는 등분표면하중시만을 생각키로 한다.

5. 경계치(境界値) 문제

≫응력≪

식 (2)에 의한 $y=\pm b$에서의 경계조건은 4개이고 (16)식에서 결정야할 상수(常數)는 6개이므로 상수결정이 불가능하나 다음과 같은 사실을 알 수 있다. 즉 (7)식은 곡이론(曲理論) (bending theory)에 의한 응력을 지배하는 식으로 이 식의 homogenous solution이 (16)식이고 particular solution은 (17, 18)식이라는 것이다.

그런데 particular solution은 막응력(膜應力) (membrane stress)을, homogenous solution은 곡응력을 지배하여 또한 곡응력은 edge disturbance를 고려하는 식으로 생각할 수 있으므로 본 소론에서와 같이 Gausian curvature가 $k>0$으로 edge disturbance가 edge에 국한되고 급격히 감소되어 정점(여기서는 원점)에서 영이되는 경우에는 (16)식의 적분상수중 $a_0=a_1=0$이라 할 수 있다. 여기서 (16)식을 번잡을 피하기 위하여

$$\phi_h=\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{i=1}^{4}f_i\alpha^i\right)\cos\lambda x$$

또는 tensor해석에서와 같이 summation sign Σ를 없애면 간단히

$$\phi_h=\sum_{n=1}^{\infty}(f_i\alpha^i)\cos\lambda x,\ \ i=1,2,3,4 \qquad (21)$$

또는

$$\phi_h=\sum_{n=1}^{\infty}(\delta^i{}_jf_i\alpha^j)\quad (i,j=1,2,3,4) \qquad (22)$$

라고 쓸 수 있다. 여기서 $\delta^i{}_j$는 Kronecker delta로

$$\delta^i{}_j=\begin{cases}1\ ;\ i=j\\0\ ;\ i\neq j\end{cases}\qquad (i,j=1,2,3,4)$$

이며 이때의 α^i, α^j등은 주지하는 바와 같이 i,j승(乘)이 아니고 단지 subscript를 superscript로 배치한 것이다. (21)식에서

$$f_1=y^2\cosh\lambda y,\ \ f_2=y^3\sinh\lambda y$$
$$f_3=\cosh\mu y\cos\mu y,\ f_4=\sinh\mu s\sin\mu y \qquad (23\sim a,d)$$

이다.

이에 응력함수 및 직응력은 §3에 의하여(f', f''등은 y에 관한 편미분(偏微分)임)

$$Fh=-Ehk_2\nabla_r{}^2\phi_h=-Ehk_2\Sigma(Y^1{}_i\alpha^i)\cos\lambda x;$$

단, $Y^1{}_i=-\lambda^2f_i+\gamma f_i'' \qquad (24\sim a)$

이며 직응력은 각각

$$\left.\begin{aligned}
N_{yh}&=\frac{\partial^2F_h}{\partial x^2}\\
&=Ehk_2[\Sigma(\lambda^2Y^1{}_i\alpha^i)\cos\lambda x]\\
N_{xh}&=\frac{\partial_2F_h}{\partial y^2}\\
&=-Ehk^2\Sigma(Y^2{}_i\alpha^i)\cos\lambda x;\\
&\text{단, } Y_i{}^2=-\lambda^2f_i''+\gamma f_i{}^{(4)}\\
T_h&=-\frac{\partial^2Fh}{\partial x\partial y}\\
&=-Ehk_2\Sigma(Y_i{}^3\alpha^i)\cos\lambda x;\\
&\text{단, } Y_i{}^3=-\lambda^3f_i'+\gamma\lambda f_i'''
\end{aligned}\right\}\qquad (25\sim a,b,c)$$

$$\left.\begin{aligned} &F_p=Ehk_2\Sigma\lambda^2\phi_n\cos\lambda x \\ &\quad(\text{등분포 하중시})\ (24\sim b) \\ &N_{yp}=-Ehk_2\Sigma\lambda^4\phi_n\cos\lambda x, \\ &\quad N_{xp}=T_p=0 \end{aligned}\right\}\quad(25\sim d,e,f)$$

이다. 변위 및 곡응력도 같은 방법으로

$$\omega_h=\nabla^4\phi_h=\Sigma(Y_i{}^4\alpha^i)\cos\lambda x;$$

$$\text{단. } Y_i{}^4=f_i{}^{(4)}-2\lambda^2f''+\lambda^4f_i \qquad (26\sim a)$$

이며 곡응력은 각각

$$\left.\begin{aligned} &M_{yh}=-D\Sigma(Y_i{}^5\alpha^i)\cos\lambda x; \\ &\text{단, } Y_i{}^5=f_i{}^{(6)}-\lambda^2(2+\nu)f_i{}^{(4)} \\ &\qquad +\lambda^4(1+2\nu)f_i''-\lambda^6\nu f_i \\ &M_{xh}=-D\Sigma(Y_i{}^6\alpha^i)\cos\lambda x; \\ &\text{단. } Y_i{}^6=\nu f_i{}^{(6)}-\lambda^2(1+2\nu)f_i{}^{(4)} \\ &\qquad +\lambda^4(2+\nu)f_i''-\lambda^6f_i \\ &M_{xyh}=-M_{yxh} \\ &\qquad =-D(1-\nu)\Sigma(Y_i{}^7\alpha^i)\sin\lambda x; \\ &\text{단, } Y_i{}^7=\lambda f_i{}^{(5)}-2\lambda^3f_i'''+\lambda^5f_i' \end{aligned}\right\}\quad(27\sim a(b,c)$$

$$\left.\begin{aligned} &Q_{xh}=D\Sigma(Y_i{}^8\alpha^i)\sin\lambda x; \\ &\text{단, } Y_i{}^8=\lambda f_i{}^{(6)}-3\lambda^3f_i{}^{(4)} \\ &\qquad +3\lambda^5f_i''-\lambda^7f_i \\ &Q_{yh}=-D\Sigma(Y_i{}^9\alpha^i)\cos\lambda x; \\ &\text{단, } Y_i{}^9=f_i{}^{(7)}-3\lambda^2f_i{}^{(5)} \\ &\qquad +3\lambda^4f_i'''-\lambda^6f_i' \end{aligned}\right\}\quad(28\sim a,b)$$

$$\omega_p=\Sigma\lambda^4\phi_n\cos\lambda x\ (\text{등분포 하중시}) \qquad (26\sim b)$$

$$M_{yp}=\nu D\Sigma\lambda^6\phi_n\cos\lambda x$$

$$M_{xp}=D\Sigma\lambda^6\phi_n\cos\lambda x,\quad M_{xyp}=0 \qquad (27\sim d,e,f)$$

$$Q_{xp}=-D\Sigma\lambda^7\phi_n\sin\lambda x,\quad Q_{yp}=0 \qquad (28\sim c,d)$$

≫적분상수(積分常數)≪

경계조건 $(2\sim a,b)$식과 위의 제응력식으로 $y=\pm b$에서의 경계조건은

$$\left.\begin{aligned} &N_y=N_{yh}+N_{yp}=0 \\ &\qquad\text{즉, } a_i{}^1\alpha^i=\lambda^2\phi_n \\ &N_x=N_{xh}+N_{xp}=0 \\ &\qquad\text{즉, } a_i{}^2\alpha^i=0 \\ &\omega=\omega_h+\omega_p=0 \\ &\qquad\text{즉, } a_i{}^3\alpha^i=-\lambda^4\phi_n \\ &M_y=M_{yh}+M_{yp}=0 \\ &\qquad\text{즉, } a_i{}^4\alpha^i=\nu\lambda^6\phi_n \end{aligned}\right\}\quad(29\sim a,b,c,d)$$

(29)식에서

$$a_i{}^1=(Y_i{}^1)y=\pm b,\quad a_i{}^2=(Y_i{}^2)y=\pm b,$$

$$a_i{}^3=(Y_i{}^5)y=\pm b,\quad a^4{}_i=(Y^5{}_i)y=\pm b \qquad (30\sim a,b)$$

이다. 여기서 (29)식을 matrix 형으로 표시하면

$$\{a^j{}_i\}[\alpha^i]=[b] \qquad (31)$$

이며 { }는 square matrix, [ ]는 column matrix이다.

(31)식에 의하여 $[\alpha^i]$는

$$[\alpha^i]=\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\end{pmatrix}=\{a^i{}_j\}^{-1}[b]$$

$$=\frac{1}{\delta(\mathrm{A})}\begin{pmatrix}\sum_{i=1}^{4}b_i\triangle_{1i}\\ \cdot\\ \cdot\\ \sum_{i=1}^{4}b_i\triangle_{4i}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{\lambda^4\phi_n}{\delta(\mathrm{A})}\begin{pmatrix}\frac{\triangle_{11}}{\lambda^2}-\triangle_{13}+\nu\lambda^2\triangle_{14}\\ -\quad-\quad-\\ -\quad-\quad-\\ \frac{\triangle_{41}}{\lambda^2}-\triangle_{43}+\nu\lambda^2\triangle_{44}\end{pmatrix} \qquad (32)$$

에 의하여 $[\alpha^i]$가 결정되며 $[\alpha^i]$의 값을 제응력식에 대입하면 응력이 결정된다.

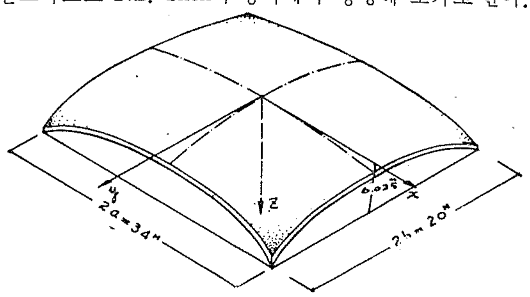
(31), (32)식에서

$$[b]=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\\ b_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\lambda^2\phi_n\\ 0\\ -\lambda^4\phi_n\\ \nu\lambda^6\phi_n\end{pmatrix}$$

이고 $\delta(\mathrm{A})$는 $\{a^i{}_j\}$의 행열식(determinant), $\triangle_{1i}\cdots\triangle_{4i}$는 $\{a^i{}_j\}^{-1}$의 element이다.

6. 응력계산예

지금까지 전개한 근사이론을 아래 그림과 같은 철근콘크리트조 T.L. Shell의 응력해석 응용해 보기로 한다.



제 1 도

≫Dimension, 기타≪

중립면 방정식 $z=\frac{1}{2}\left(\frac{x^2}{36}+\frac{y^2}{25}\right)$. 이것을 $z=\frac{1}{2}k_2(\gamma x^2+y^2)$에 맞추어 보면 $k_2=0.04_{\mathrm{m}}{}^{-1}$, $\gamma=0.695$, max height$=6,025_{\mathrm{m}}$, $h=avg10_{\mathrm{cm}}$, $E=2.10\times10^{6t}{}_{\mathrm{m}}{}^{-2}$, $\nu=\frac{1}{6}$, $a=17_{\mathrm{m}}$, $b=10_{\mathrm{m}}$, $p_z=0.35^t{}_{\mathrm{m}}{}^{-2}$, $p_n\doteqdot0.45^t{}_{\mathrm{m}}{}^{-2}$, $\alpha=12(1-\nu^2)\left(\frac{k_2}{h}\right)^2\doteqdot1.8667_{\mathrm{m}}{}^{-4}$, $D=\frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}$ $=1.80\times10^{2tm}$, $\lambda=\frac{n\pi}{2a}=0.0925_{\mathrm{m}}{}^{-1}$(단 $n=1$), $\mu=\frac{1}{\sqrt{2}}\alpha^{\frac{1}{4}}\gamma^{\frac{1}{2}}=0.6891_{\mathrm{m}}{}^{-1}$

≫matrix 계산≪

$a_i^1=-\lambda^2 f_i+\gamma f_i''$; $a^1_1=4.3807$, $a_2{}^1=97.8304$,

$a^1_3=-189.8256$, $a^1_4=264.2084$

$a^2_i=-\lambda^2 f_i''+\gamma f_i{}^{(4)}$; $a^2_1=0.0890$, $a^2_2=3.0840$,

$a^2_3=-250.99233$, $a^2_4=-180.2809$

$a^3_i=f_i{}^{(4)}-2\lambda^2 f''+\lambda^4 f_i$; $a^3_1=0.0998$, $a^3_2=3.7847$,

$a^3_3=-361.9461$, $a^3_4=-263.3088$

$a^4_i=f_i{}^{(6)}{}_i-\lambda^2(2+\nu)f_i{}^{(4)}+\lambda^4(1+2\nu)f_i''-\lambda^6\nu f_i$;

$a^4_1=0.0007$, $a^4_2=0.0849$

$a^4_3=311.7589$, $a^4_4=-300.5190$

$\delta(A)=18,804.6533$

$\triangle_{11}=90,529,2054$, $\triangle_{13}=12,962,225.8288$

$\triangle_{14}=-2,330.8833$, $\triangle_{21}=-3,851.9766$,

$\triangle_{23}=-578,874.1553$, $\triangle_{24}=201.7477$

$\triangle_{31}=-8.3604$, $\triangle_{33}=-1,387.3223$,

$\triangle_{34}=11.1746$ $\triangle_{41}=-9.5502$,

$\triangle_{43}=-1,572.5559$, $\triangle_{44}=-12.9969$

$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\\ \alpha_4\end{pmatrix}=\lambda^4\phi_n\begin{pmatrix}-124.136787\\ 6.735722\\ 0.021582\\ 0.024001\end{pmatrix}$$

≫응력 및 변위≪

$N_x=-9.0[(0.2290y-0.000150y^3)\sinh\lambda y$
$+(0.015231y^2+3.6587)\cosh\lambda y$
$-0.014871\sin\mu y\sin\mu y$
$-0.013724\cosh\mu y\cos\mu y]$ (t/m)

$N_y=-9.0[(0.0328y+0.000150y^3)\sinh\lambda y$
$+(2.4763-0.025001y^2)\cosh\lambda y$
$+0.000124\sinh\mu y\sin\mu y$
$-0.000134\cosh\mu y\cos\mu y]$ (t/m)

$T=-9.0[(0.020106y^2-7.0271)\sinh\lambda y$
$+(0.50788y-0.000150y^3)\cosh\lambda y$
$+0.000045\sinh\mu y\sin\mu y$
$-0.001323\cosh\mu y\cos\mu y]$ (t/m)

$\omega\fallingdotseq 0.15\times 10^{-2}(7.4564\cosh\lambda y+0.34578y\sinh\lambda y$
$-0.019755\cosh\mu y\cos\mu y$
$-0.020109\sinh\mu y\sin\mu y)$ (m)

$M_x=0.24[(0.0553-0.000503y^2)\cosh\lambda y$
$-0.00049y\sinh\lambda y-0.003321\sinh\mu y\sin\mu y$
$+0.003199\cosh\mu y\cos\mu y]$ (tm/m)

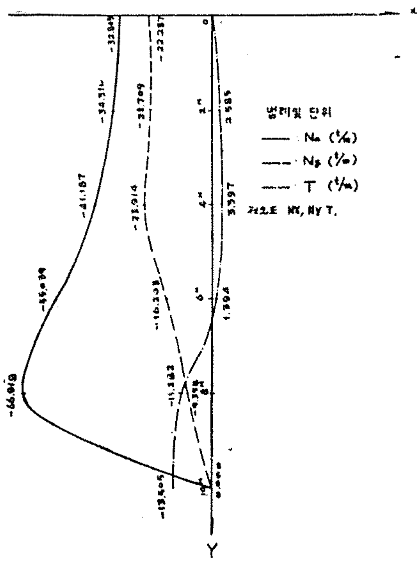
$M_y=0.24[(0.0171-0.000302y^2)\cosh\lambda y$
$-0.01819y\sinh\lambda y-0.022507\sinh\mu y\sin\mu y$
$+0.016429\cosh\mu y\cos\mu y]$ (tm/m)

$M_{xy}=-M_{yx}=-0.20(-0.0725\sinh\lambda y$
$+0.00326y\cosh\lambda y-0.001382\sinh\mu y\cos\mu y$
$+0.001288\cos\mu y\sin\mu y)$ (tm/m)

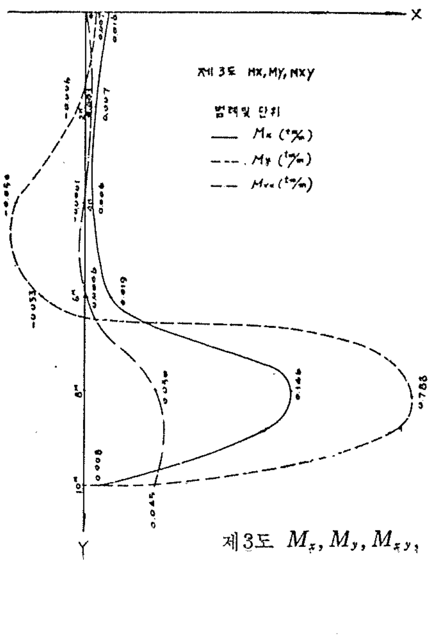
$Q_x=0.24[0.00170y\sinh\lambda y$
$+(0.000259y^2-0.0984)\cosh\lambda y$
$+0.002270\sinh\mu y\sin\mu y$
$-0.001899\cosh\mu y\cos\mu y]$ (t/m)

$Q_y=-0.24[(0.0177+0.000259y^2)\sinh\lambda y$
$+0.00773y\cosh\lambda y+0.026940\cosh\mu y\sin\mu y$
$-0.000726\sinh\mu y\cos\mu y]$ (t/m)

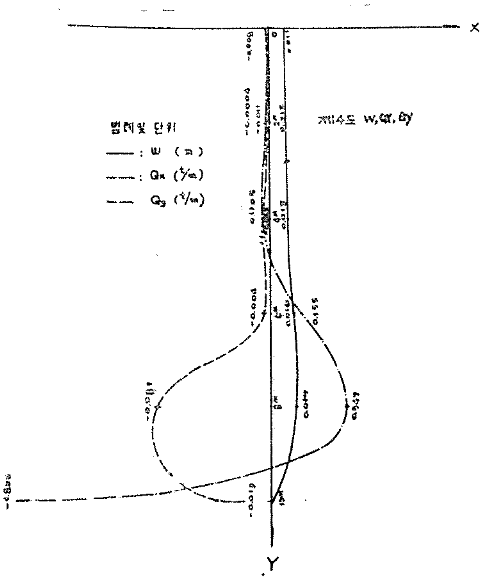
이상 변위 및 작응력은 $(Y_i{}^j\alpha^i)(i,j=1,2,3,4)$만을 계산한 것이며 $\Sigma(Y_i{}^j\alpha^i)\cos\lambda x$ 또는 $\Sigma(Y_i{}^j\alpha^i)\sin\lambda x$가 아님을 밝혀둔다. $n=1$일 때의 변위 및 작응력은 간단히 계산할 수 있음으로 생략하고 $y-$축상에서의 값을 도표로 만들면 다음과 같다.



제2도 $N_x, N_y T.$



제3도 M_x, M_y, M_{xy},



제4도 ω, Q_x, Q_y

7. 결　언(結言)

지금까지 곡면상태가 특수한 T.L. shell의 응력해석을 다루어 보았다. 여기서 한가지 흥미있는 점은 축대칭(軸對稱) 구형(球形) shell 등에서는 정점의 직응력이 거의 막이론에 의한 응력치인 반면 본 소론의 예제에서는 오히려 곡이론에 의한 응력치가 막이론에 의한 막응력치 보다 크다는 사실이다. 즉 N_y를 예로 들면

$N_{yp}=-9,000\mathrm{t/m}$, $N_{yh}=-11.287\mathrm{t/m}$로

$N_{yh}/N_{yp}\fallingdotseq 1.25$이다.

일반으로 shell구조의 곡이론은 난해한 것으로 알려졌으며 본고에서 다룬 T.L. Shell도 곡면형태, 하중 및 경계조건에 따라 그 응력해석이 매우 어렵게 되겠으나 비제한 우리로서는 더 이상 추적치 못하고 본고를 맺으면서 한없이 부끄럽게 생각한다.

참고문헌

(1) Colin Faber; Candela, The Shell Builder (1963)
(2) S.Timosenko;Theory of Plates and Shells (1959)
(3) David P. Billington; Thin Shell Concrete Structures (1965)
(4) H.C. Martin;Martix Method of Structural Analysis (1966)
(5) Harry Lass; Vector and Tensor Analysis (1950)
(6) 佐武一郎; 行列과 行列式 (1965)