Matrix 법에 의한 보의 응력해석

신 문 철
이 수 곤

차 례

1. 서 언

구조해석에 있어서 Matrix 이론은 1950년대 학술문헌에 나타나기 시작한 것이 처음이라 하며 이것이 오늘날 놀라운 발전을 한 것은 공학의 제분야에 있어 구조설계가 대단히 복잡하게 되어 감에 따라 재래의 방법만으로는 적절한 설계자료를 얻을 수 없었기 때문이라 생각한다. 더우기 전자계산기의 점차적인 개발에 따라 Matrix법에 의한 구조해석 이론도 보다 깊이 연구되고 이를 실 설계에 광범위하게 응용되고 있음이 현실이라 하겠다.

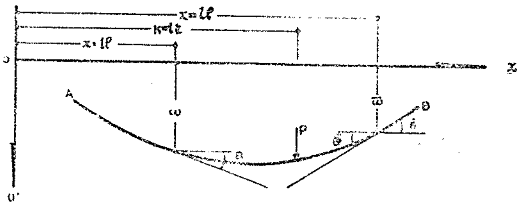
본고에서는 고유 Matrix법을 소개 및 응용해 보려한다. 본 고유 Matrix법은 특히 부정정보의 해석 및 복잡한 영향선 문제에 보다 명료한 해답을 주는 법으로 주로 谷本勉之助의 상설 Matrix 응용력학을 참고로 하였다. 주지하는 바와같이 탄성곡선의 기본미분방정식은 변위가 작을 때

$$EI\frac{d^2w}{dx^2}=-M$$

이다. 이 미분방정식의 해를 다항식형(polynomial form)으로 표시한 후 적분상수를 연속 및 경계조건에 의하여 처리함이 재래의 방법이라 부른다면 하중작용점좌표, 임의점(이동) 좌표, 적분상수의 Matrix form 으로 표시한 것이 본고에서 다루어 보려는 고유Matrix 법이다.

이 때 특히 적분상수를 요소(element)로 하는 Matrix 가 고유 Matrix이며 고유 Matrix 즉 적분상수는 재래방법과 마찬가지로 연속 및 경계조건에 의하여 결정한다.

2. 기본 미분방정식 및 고유 Matrix 법



도면 : 1

도 1 에서 AB와 같은 보가 하중작용 하에 작은 변형(deformation)을 일으킬때 휨(deflection)W와 곡 moment M과의 관계는 주지하는 바와 같이

$$EI\frac{d^2w}{dx^2}=-M$$

이며 moment, 전단력 및 임의의 분포하중 $q(x)$간에는

$$S=\frac{dM}{dx}=-EI\frac{d^3w}{dx^3},\quad q(x)=-\frac{dS}{dx}=EI\frac{d^4w}{dx^4} \qquad (2-2,3)$$

의 관계가 성립한다. 여기서 다루어 보려' 고유 Matrix법은 (2—2, 3)식을 기본으로 한다. 즉 집중하중 P만을 받고 있는 보를 예로 들면 $q(x)=0$이므로

$$\frac{d^4w}{dx^4}=0 \qquad (2-4)$$

이다. 여기서(2—4)식의 해를 구하기 전에 무차원량을 다음과 같이 정의한다.

$$k=\frac{K}{l},\quad \rho=\frac{x}{l} \qquad (2-5,6)$$

위의 정의에 의하여 (2—4)식의 해는 영역 $0<\rho<k$ 에서

$$w=K_0(A_1+A_2\rho+A_3\rho^2+A_4\rho^3) \qquad (2-7)$$

이며 Ai가 k의 함수 즉 $Ai=f(k)$, $(i=1,2,3,4)$면 $w=F(k,\rho)$이고 영역 $k<\rho<1$에서의 deflection $\bar{\omega}$는 Maxwell-Betti의 상반작용의 정리(Reciprocal theorem)에 의하여 $\bar{\omega}=F(\rho,k)$이다. (2—7)식을 Matrix form으로 표시하면

$$\frac{w}{k_0}=[A_1A_2A_3A_4]\begin{Bmatrix}1\\ \rho\\ \rho^2\\ \rho^3\end{Bmatrix}$$

이며 간단히

$$\frac{w}{k_0}=[Ai]\begin{pmatrix}1\\ \rho\\ \rho^2\\ \rho^3\end{pmatrix}=[1\ \rho\ \rho^2\ \rho^3]\{Ai\} \qquad (2-8)$$

이라 쓸 수 있다. (2—8)식에서 〔 〕는 row matrix, { }는 column matrix이며 row matrix 〔 〕을 column matrix { }로 바꾸는 것을 전치(Trans pose)라 한다 (2—8)식은 $[A]\{B\}=[\bar{B}]\{\bar{A}\}$가 성립하는 matrix의 일반적인 성질을 이용한 것으로는 $\bar{A}$는 A의 전치이다. 그런데 $Ai=f(k)$는 k에 관한 3차식으로 주어짐을 알수 있다. 즉

$$\begin{array}{l} A_1=a_{11}+a_{12}k+a_{13}k^2+a_{14}k^3\\ \ \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \\ A_4=a_{41}+a_{42}k+a_{43}k^2+a_{44}k^3 \end{array}$$

이므로

$$\{A\}=\begin{pmatrix}A_1\\ A_2\\ A_3\\ A_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ k\\ k^2\\ k^3\end{pmatrix}=[N]\begin{pmatrix}1\\ k\\ k^2\\ k_3\end{pmatrix}$$

따라서 (2—8)식은

$$\frac{\bar{\omega}}{k_0}=[1\ \rho\ \rho^2\ \rho^3]\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34}\\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ k\\ k^2\\ k^3\end{pmatrix}$$

$$=[1\ \rho\ \rho^2\ \rho^3]\ [N]\ \{1\ k\ k^2\ k^3\} \qquad (2-7)$$

같은 방법으로

$$\frac{\bar{\omega}}{k_0}=[1\ k\ k^2\ k^3]\ [N]\ \{1\ \rho\ \rho^2\ \rho^3\}$$

$$=[1\ \rho\ \rho^2\rho^3]\ [N]\ \{1\ k\ k^2\ k^3\} \qquad (2-10)$$

$\bar{N}$는 N의 전치며 N는 적분상수 즉 $a_{11}\sim a_{44}$를 요소로 하는 matrix이다.

$\bar{N}$, N을 광의로 고유(eigen) matrix, 협의로는 N을 고유 matrrix, $\bar{N}$을 N의 공포(Conjugate) matrix라 부른다. (2—9, 10)식에서 N가 결정되면 w, $\bar{\omega}$가 결정되고 이에 따라 (2—1, 2)식에 의하여 응력이 결정된다 단 $\bar{\omega}$는 w의 전치가 아니고 편의상 붙인 기호이다. 이하 고유 matrix법을 실제문제에 응용해 보기로 한다.

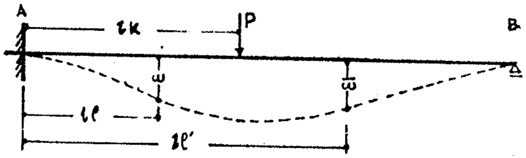
3. 단경간의 양

단경간 양의 지지조건은 $_3C_1\times{}_3C_1$로 총 9가지의 지지상태를 생각할 수 있겠으나 양단자유, 일단단순타단자유…… 등은 실제로 존재할 수 없을 것이다. 여기서는 외적 부정정차수가 일차, 이차인 좌단고정, 우단단순 양단고정인 양만을 다루어 보기로 한다.

(1) 고정하중 작용시

a, 좌단고정 우단단순양

도 2와 같은 양에서 먼저 하중작용점에서의 변위, 회전각, 곡 moment의 연속과 수직방향 힘의 평형을 생각해 보면



도 면 : 2

$x=k=lk$에서

$$w=\bar{\omega},\ \frac{dw}{dx}=\frac{d\bar{\omega}}{dx},\ -EI\left(\frac{d^2\bar{\omega}}{px^2}\right)=-EI\left(\frac{d^2\bar{\omega}}{dx^2}\right),$$

$$-EI\left(\frac{d^3w}{dx^3}\right)=-EI\left(\frac{d^3w}{dx^3}\right)+P$$

이므로 이것을 무차원량으로 변형시켜

$$(w)_{\rho=k}-(w)\rho=k=0;\ K_0[1\ k\ k^2\ k^3](N-\bar{N})\{1\ k\ k^2\ k^3\}=0$$

$$\left(\frac{dw}{d\rho}\right)_{\rho=k}-\left(\frac{d\bar{\omega}}{d\rho}\right)_{\rho=k}=0;\ K_0[0\ 1\ 2k\ 3k^2](N-\bar{N})\{1\ k\ k^2k^3\}=0$$

$$\left(\frac{d^2w}{d\rho^2}\right)_{\rho=k}-\left(\frac{d^3\bar{\omega}}{d\rho^3}\right)_{\rho=k}=0;\ K_0[0\ 0\ 26k](N-\bar{N})\{1\ k\ k^2\ k^3\}=0$$

$$\left(\frac{d^3w}{d\rho^3}\right)_{\rho=u}-\left(\frac{d^3\bar{\omega}}{d\rho^3}\right)_{\rho=u}=\frac{\rho l^3}{EI};\ K_0[0\ 0\ 0\ 6](N-\bar{N})\{1\ k\ k^2\ k^3\}=-\frac{Pl^3}{EI}$$

그런데 $(N-\bar{N})$는

$$(N-\bar{N})=\begin{pmatrix}0 & a_{12}-a_{21} & a_{13}-a_{31} & a_{14}-a_{41}\\ a_{21}-a_{12} & 0 & a_{23}-a_{32} & a_{24}-a_{42}\\ a_{31}-a_{13} & a_{32}-a_{23} & 0 & a_{34}-a_{43}\\ a_{41}-a_{14} & a_{42}-a_{24} & a_{43}-a_{34} & 0\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}0 & a_2 & a_3 & a_4\\ -a_2 & 0 & b_3 & b_4\\ -a_3 & -b_3 & 0 & c_4\\ -a_4 & -b_4 & -c_4 & 0\end{pmatrix}$$

단 $a_2=a_{12}-a_{21}$, $a_3=a_{13}-a_{31}$, $a_4=a_{14}-a_{41}$, $b_4=a_{23}-a_{32}$, $b_4=a_{24}-a_{42}$, $c_4=a_{34}-a_{43}$,

이므로 K점(하중작용점)에서의 연속조건을 matrix형

으로 표시하면

$$\begin{pmatrix} 1 & k & k^2 & k^3 \\ 0 & 1 & 2k & 3k^2 \\ 0 & 0 & 2 & 6k \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & a_2 & a_3 & a_4 \\ -a_2 & 0 & b_3 & b_4 \\ -a_3 & -b_3 & 0 & c_4 \\ -a_4 & -b_4 & -c_4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ k \\ k^2 \\ k^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -\dfrac{Pl^3}{EIK_0} \end{pmatrix} \qquad (3-1)$$

이라 쓸수 있다. (3~1)식의 계산은 다음과 같이 진행함이 편리하다. 우선

$$\begin{array}{c|c} & \begin{bmatrix} 1 & k & k^2 & k^3 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{matrix} 1 \\ k \\ k^2 \\ k^3 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & \underline{a_2} & a_3 & a_4 \\ \underline{a_2} & 0 & b_3 & b_4 \\ -a_3 & -b_3 & 0 & c_4 \\ -a_4 & -b_4 & -c_4 & 0 \end{pmatrix} \end{array} = 0$$

에서 종횡으로 맞추어 상수항 K에 관한 일차항, 이차항 등 K에 관한 차수순으로 정리하면

$(\underline{a_2}-\underline{a_2})k+(a_3-a_3)k^2+(a_4-a_4)k^3+\cdots\cdots=0$이며 이 식은 항등식이다. 다음에

$$\begin{array}{c|c} & \begin{bmatrix} 1 & k & k^2 & k^3 \end{bmatrix} \\ \hline \begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2k \\ 3k^2 \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & a_2 & a_3 & a_4 \\ -a_2 & 0 & \underline{b_3} & b_4 \\ -a_3 & \underline{-b_3} & 0 & c_4 \\ \underline{-a_4} & -b_4 & -c_4 & 0 \end{pmatrix} \end{array} = 0$$

를 상식과 같은 방법으로 정리하면 $-a_2-2a_{3k}-(\underline{2b_3}-\underline{b_3}+3\underline{a_4})k^2-2b_4k^3-c_4k^4=0$이며 이 식이 k값에 관계없이 언제나 성립하려면 $a_2=a_3=(b_3+3a_4)=b_4=c_4=0$이어야 할 것이다.

위에서 $\boxed{1\ \kappa\ \kappa^2\ \kappa^3}$ $\boxed{\begin{matrix} 0 \\ 1 \\ 2\kappa \\ 3\kappa^2 \end{matrix}}$은 각각 횡단책, 종단책이라 부르며 이와같은 행열계산법을 단책법이라 한다. 3번째로 $(-2b_3+6a_4)\kappa=0$ 즉 $b_3+3a_4=0$ 마지막으로 $-6a_4=-\dfrac{\rho l^3}{EI\kappa_0}$ 즉 $a_4=\dfrac{\rho l^3}{6EI\kappa_0}$이다. 여기서 a_4가 될 수 있는 한 간단한 값을 갖도록 $\kappa_0=\rho l^3/6EI$로 정하면 $a_4=1$, $b_3=-3$이다. 여기서 $a_2=a_{12}-b_{21}=0$, $a_3=a_{13}-a_{31}=0$이므로 (2-9, 10)식의 고유 matrix는

$$N=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & v_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23+3} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14-1} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix} \qquad (3-2)$$

$$\bar{N}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14-1} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23+3} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix} \qquad (3-2')$$

이다. 이제 도 2와 같은 양의 좌단고정, 우단자유의 경계조항은 각각

$$(w)_{\rho=0}=0[1\ 0\ 0\ 0]N\{1\ \kappa\ \kappa^2\ \kappa^3\}$$

$$\left(\frac{dw}{d\rho}\right)_{\rho=0}[0\ 1\ 0\ 0]N\{1\ \kappa\ \kappa^2\ \kappa^3\}$$

이므로 간단히

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ N=BN=0이라 쓸 수 있다. 이때 B=$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$는 경계(Boundary) matrix라 부른다. BN=O의 계산을 단책법에 의하여 계산하면 $a_1i=a_2i(i=1, 2, 3, 4)$ 이므로

$$N=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & a_{33} & a_{34} \\ -1 & 0 & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix}, \quad \bar{N}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{34} & a_{44} \end{pmatrix} \qquad (3-3, 3')$$

이다. 우단단순경계조건 $(\omega)_{\rho=1}=(M)_{\rho=1}=0$의 Boundary matrix B'는 B'=$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{bmatrix}$ 이므로 $B'\bar{N}=0$을 단책법으로 정리하면

$$3-2a_{34}=0, \qquad -1-2a_{44}=0$$

$$2a_{33}+6a_{34}=0, \quad 2a_{34}+6a_{44}=0$$

이므로 이것을 풀면

$a_{33}=-9/2$, $a_{34}=3/2$, $a_{34}=3/2$, $a_{44}=-1$이므로 이값을 (3-3, 3')식에 대입하면

$$N=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & -9 & 3 \\ -2 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \quad \bar{N}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -9 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad (3-4, 4')$$

이므로

$$\omega=k_0[1\ \rho\ \rho^2\ \rho^3]N\{1\ \kappa\ \kappa^2\ \kappa^3\}$$
$$=\frac{\rho l^3}{6EI}\cdot\frac{1}{2}\Big[(6\kappa-9\kappa^2+3\kappa^3)\rho^2-(2-3\kappa^2+\kappa^3)\rho^3\Big] \qquad (3-5)$$

$$\bar{\omega}=\kappa_0[1\ \rho\ \rho^2\ \rho^3]\ \bar{\omega}\{1\ \kappa\ \kappa^2\ \kappa^3\}$$
$$=\frac{\rho l^3}{6EI}\cdot\frac{1}{2}\Big[(3\kappa^2-\kappa^3)\rho^2-(9\kappa^2-3\kappa^3)\rho^2+6\kappa^2\rho-2\kappa^3\Big] \qquad (3-5')$$

이며 곡 moment 및 전단력은 각각

$$M=-EI\frac{d^2\omega}{dx^2}=-EI\frac{1}{l^2}\cdot\frac{\rho l^3}{12EI}-\Big[(12\kappa-18\kappa^2+6\kappa^3)-(12-18\kappa^2+6\kappa^3)\rho\Big]$$
$$=\frac{pl}{2}(k-1)\Big[(\kappa^2-2\kappa-2)\rho-(\kappa-2)\kappa\Big]$$
$$0<\rho<\kappa \qquad (3\sim6)$$

$$S=\frac{dM}{dx}=\frac{dM}{ld\rho}=\frac{1}{2}\rho(\kappa-1)\ (\kappa^2-2\kappa-2)$$
$$0<\rho<\kappa \qquad (3-7)$$

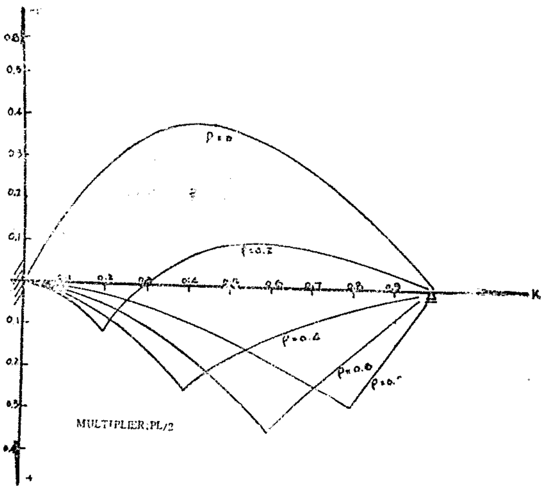
$$\bar{M}=-\mathrm{EI}\frac{d^2\bar{\omega}}{dx^2}=-\mathrm{EI}\,\frac{1}{l^2}\cdot\frac{\rho l^3}{12\mathrm{EI}}\Big[6(3\kappa^2-\kappa^3)\rho-2(9\kappa^2-3\kappa^3)\Big]=\frac{\rho l}{2}\kappa^2(\kappa-3)\ (\rho-1)$$

$$\kappa<\rho<1 \qquad (3-6')$$

$$\bar{S}=\frac{d\bar{M}}{dx}=\frac{d\bar{M}}{ld\rho}=\frac{\rho l}{2}\kappa(\kappa-3)\quad \kappa<\rho<1 \quad (3-7')$$

(3~6′, 7′)식에서 $\bar{M}$, $\bar{S}$등은 어느 한 경간에 있어 그 공포영역의 moment 및 전단력을 표시하는 기호이고 M, S의 전치가 아님을 밝혀둔다.

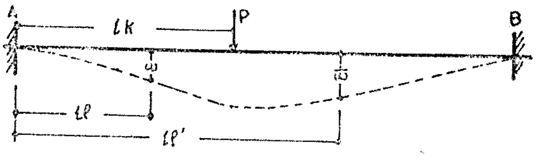
상식에서 ρ를 일정치로 고정시키고 K치를 변화시켜 얻어지는 M, $\bar{M}$및 S, $\bar{S}$가 곧 곡moment 및 전단력의 영향선이다. 따라서 서언에서 말한것처럼 고유 matrix 법의 한가지 이점은 영향선문제를 쉽게 해결할수 있다는 점이다. (3~6, 6′)식에 의한 moment 영향선만을 도시하면 도3과 같다.



도면 : 3

b, 양단고정양

도4와 같은 양단고정양에서는 도3의 양에서와 같은 방법으로 하중작용점의 연결및 좌단고정 경계조건을 처리하여



도면 : 4

$$N=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&3&a_{33}&a_{34}\\-1&0&a_{34}&a_{44}\end{pmatrix},\quad \bar{N}=\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&3&0\\0&0&a_{33}&a_{34}\\0&0&a_{34}&a_{44}\end{pmatrix}(3-3,3')$$

이며 우단고정 경계조건은

$$(\bar{\omega})_{\rho=1}=\left(\frac{d\bar{\omega}}{d\rho}\right)_{\rho=1}=0 \text{ 즉 } B'=\begin{bmatrix}1&1&1&1\\0&1&2&3\end{bmatrix}\text{ 이}$$

므로 $B'\cdot\bar{N}=0$을 계산하면 $a_{33}=-6$, $a_{34}=3$, $a_{44}=-2$이다. 이값을 (3−3, 3′)식에 대입하면

$$N=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&3&-6&3\\-1&0&3&-2\end{pmatrix},\quad \bar{N}=\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&3&2\\0&0&-6&3\\0&0&3&-0\end{pmatrix}\quad(3-8,8')$$

을 얻는다. 또한 변위및 응력은

$$\omega=\kappa_0[1\ \rho\ \rho^2\ \rho^3]\ \mathrm{N}\{1\ \kappa\ \kappa^2\ \kappa^3\}$$
$$=\frac{pl^3}{6\mathrm{EI}}\Big[3\kappa(1-2\kappa+\kappa^2)\rho^2-(2\kappa^3-3\kappa^2+1)\rho^3\Big]\qquad(3-9)$$

$$\mathrm{M}=-\mathrm{EI}\frac{d^2\omega}{dx}=-\mathrm{EI}\frac{d^2\omega}{l^2d\rho^2}=-pl\Big[(1-\kappa)^2\kappa-(1-\kappa)\ (1+\kappa-\kappa^2)\rho\Big]\qquad(3-10)$$

$$\mathrm{S}=\frac{d\mathrm{M}}{dx}=\frac{d\mathrm{M}}{ed\rho}=p(1-\kappa)\ (1+\kappa-\kappa^2)\ (3-11)$$

$$\bar{\omega}=\mathrm{K}_0[1\ \rho\ \rho^2\ \rho^3]\bar{N}\{1\ \kappa\ \kappa^2\ \kappa^3\}$$
$$=\frac{pl^3}{6\mathrm{EI}}\Big[(-\kappa^3+3\kappa^2\rho-3(2\kappa^2-\kappa^3)\rho^2+(3\kappa^2-2\kappa^3)\rho^3\Big]\qquad(3-9')$$

$$\bar{M}=-\mathrm{EI}\frac{d^2\bar{\omega}}{dx^2}=-\mathrm{EI}\frac{d^2\bar{\omega}}{l^2d\rho^2}=-\rho l\kappa^2\Big[(\kappa-2)-(2\kappa-3)\rho\Big]\qquad(3-10')$$

$$\bar{S}=\frac{d\mathrm{M}}{dx}=\frac{d\mathrm{M}}{ld\rho}=-p(3-2\kappa)\kappa^2\qquad(3-11')$$

이다.

(2) 등분포하중 작용시

등분포하중 작용시에는 (2—3, 5, 6)식에 의하여

$$\frac{d^4\omega}{d\rho^4}=\frac{ql^4}{\mathrm{EI}}\qquad(2-2')$$

이다. (2−2′)식으로 주어지는 미분방정식의 일반해 (general Solution)를 particular solution (ω_p)및 homogenous solution (ω_b)로 나눈다면

$$\mathrm{w}_p=\frac{ql^4}{24\mathrm{EI}}\rho^4,\ \ \omega_b=\mathrm{C}_1+\mathrm{C}_2\rho+\mathrm{C}_3\rho^2+\mathrm{C}_4\rho^3\text{이므로}$$

$$\omega=\omega_p+\omega_b=\frac{ql^4}{24\mathrm{EI}}[1\ \rho\ \rho^2\ \rho^3\ \rho^4]\ \{a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ 1\}$$
$$=\frac{ql^4}{24\mathrm{EI}}[1\ \rho\ \rho^2\ \rho^3\ \rho^4]\mathrm{N}\text{ 단 }\mathrm{C}i=\frac{ql^4}{24\mathrm{EI}}a_i\ (3-12)$$

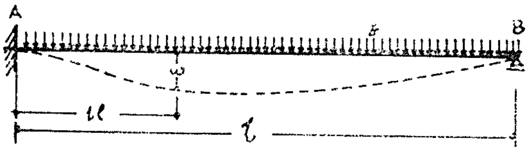
이다. (3—12)식에서 N은 고유 matrix 즉 적분상수로 $\mathrm{N}=\{a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ 1\}$이다. 3—1에서와 같이 고유 matrix의 요소 ai가 결정되면 변위및 응력을 계산할수 있다.

N의 결정은 양단의 지지조건에 따라서 결정하며 집중하중시와 같이 고정—단순, 고정—고정양에 대하

여 생각해 본다.

(ω) 고정—단순양

도5에서 좌단고정 경계조건은 $(\omega)_{\rho=0}=\left(\frac{d\omega}{d\rho}\right)_{\rho=0}$ $=0$



도면 : 5

즉 $B=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\end{bmatrix}$, 우단자유의 경계조건은

$(\omega)_{\rho=1}=\left(\frac{d^2\omega}{d\rho_2}\right)_{\rho=1}=0$ 즉 $B'=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&0&2&6&12\end{bmatrix}$

$\approx\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&0&1&3&6\end{bmatrix}$ 이다.

여기서 $BN=0$, $B'N=0$ 즉

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\1&1&1&1&1\\0&0&1&3&6\end{pmatrix}N=O$$

를 단책법에 의하여 계산하면,

$a_1=0,\quad a_3+a_4=-1$

$a_2=0,\quad a_3+3a_4=-6$

이며 이것을 풀면 $a_3=\frac{3}{2}$, $a_4=-\frac{5}{2}$ 이므로

(3—12)식의 고유matrix N은

$$N=\frac{1}{2}\{0\ 0\ 3\ -5\ 2\} \tag{3—13}$$

$$\omega=\frac{ql^4}{24EI}[1\ \rho\ \rho^2\ \rho^3\ \rho^4]N=\frac{ql^4}{48}(3\rho^2-5\rho^3+2\rho^4) \tag{3—14}$$

$$M=-EI\frac{d^2\omega}{dx^2}=-EI\frac{d^2\omega}{l^2d\rho^2}=-\frac{ql^2}{8}(1-5\rho+4\rho^2) \tag{3—15}$$

$$S=\frac{dM}{dx}=\frac{dM}{ld\rho}=\frac{ql}{8}(5-8\rho) \tag{3—16}$$

***b.* 양단 고정양**

좌우양단이 고정일때에는 $(\omega)_{\rho=0}$, $=\left(\frac{d\omega}{d\rho}\right)_{\rho=0}$,

$(\omega)_{\rho=1}=\left(\frac{d\omega}{d\rho}\right)_{\rho=1}=0$

이므로 경계 matrix는 각각

$B=\begin{bmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\end{bmatrix}$, $B'=\begin{bmatrix}1&1&1&1&1\\0&1&2&3&4\end{bmatrix}$

이다. 이제 $BN=B'N=0$ 즉

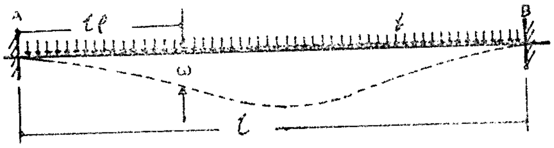
$$\begin{pmatrix}1&0&0&0&0\\0&1&0&0&0\\1&1&1&1&1\\0&1&2&3&4\end{pmatrix}N=0$$

을 단책법에 의하여 정리하면

$a_1=0,\quad a_3+a_4=-1$

$a_2=0,\quad 2a_3+3a_3=-4$

이며 이것을 풀면 $a_3=1$, $a_4=-2$이며



도면 : 6

a_i값을 알므로

$$N=\{0\ 0\ 1\ -2\ 1\} \tag{3～17}$$

이며 N이 決定되었으로 변위및 응력은 전과 마찬가지 방법으로

$$\omega=\frac{ql^4}{24EI}(\rho^2-2\rho^3+\rho^4) \tag{3～18}$$

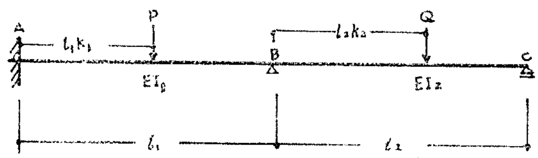
$$M=EI-\frac{d^2\omega}{dx^2}=-EI\frac{d^2\omega}{l^2d\rho^2}=-\frac{8l^2}{12}(1-6\rho+6\rho^2) \tag{3～19}$$

$$S=\frac{dM}{dx}=\frac{d\omega}{ld\rho}=\frac{ql}{2}(1-2\rho) \tag{3～20}$$

이다. 참고로 $\rho=0$ 즉 좌단에서의 곡moment및 전단력은 $(M)_{\rho=0}=-\frac{ql^2}{12}$, $S=R_A=\frac{ql}{2}$이며 $\rho=1$ 즉 우단에서의 값은$(M)_{\rho=1}=-\frac{ql^2}{12}$, $S=-R_B=-\frac{ql}{2}$이다,

4. 2경간 연속양

2경간 연속양도 단경간 양에서와 같이 여러가지 지지상태를 가정할 수 있겠으나 여기서는 도7과 같이 좌경간 좌단이 고정이고 우경간 우단이 단순지지이며 각 경간에 하나의 하중 P, Q가 작용하는 연속보만을 취급해 보기로 한다.



도면 : 7

단 계산상 번잡을 피하기 위하여 연속양은 같은 재료로 Span및 단면만 틀리다 가정한다. 즉

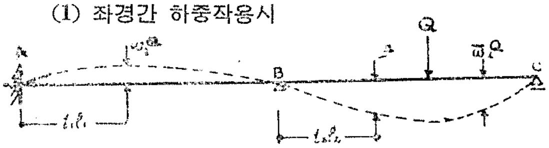
$$I_2=6\gamma_1,\qquad l_2=\mu l_1 \tag{4～1}$$

인 연속양을 생각키로 한다.

연속양의 좌우 양경간에 하중이 동시에 작용하므로 인한 변위및 응력식은 좌경간에만 하중이 작용하므로 인한 변위및 응력식과 우경간에만 하중이 작용하므로 인한 변위및 응력식을 별도로 구한후 이들을 합성한 결과(중첩의 원리)임은 주지의 사실이며 한 경간에 다수의 하중이 작용할 경우도 마찬가지이다. 본고에서도

법으로 구분하여 취급키로 한다.

(1) 좌경간 하중작용시



도면 : 8

AB경간 BC경간으로 나누어 각 경간에 있어서 하중작용점의 연속조건, 경계조건을 처리하고 마지막으로 공동지점 B에서의 결합조건을 생각한다.

a, 좌경간

좌재하 경간은 §3~1. a와 동일하므로

$$\left|\frac{\omega^p}{R^p}\right| = \frac{pl_1^3}{6EI}[1\ \rho_1\ \rho_1^2\ \rho_1^3]\left(\frac{N^p\rho}{5^1}\right)\{1\ \kappa_1\ \kappa_1^2\ \kappa_1^3\} \qquad (2\sim 9.\ 10)$$

에서 하중작용점의 연속조건 및 좌단고정 조건을 처리한 결과는

$$N_1^p=\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&3&a_{33}&a_{34}\\-1&0&a_{34}&a_{44}\end{pmatrix},\quad \bar{N}_1^p=\begin{pmatrix}0&0&0&-1\\0&0&3&0\\0&0&a_{33}&a_{34}\\0&0&a_{34}&a_{44}\end{pmatrix} \qquad (3\sim 4,\ 4')$$

이다. 상식에서 ω_1^p…… $\bar{N}_1^p$ 등의 Superscript p는 집중하중 p로 인한 ω_1 N_1 등을 표시하는 기호이다. 여기서 우단경계조건은 $(\bar{\omega}_1^p)_{\rho 1=1}=0$ 즉 $B'=[1\ 1\ 1\ 1]$이므로 $B'N_1^p=0$에 의하여 $a_{33}+a_{34}=-3$, $a_{34}+a_{44}=1$을얻으며 a_{33}, a_{34}를 a_{44}로 표시하면

$$a_{33}=a_{44}-4,\quad a_{34}=1-a_{44},\quad a_{44}=a_{44} \qquad (4\sim 2)$$

이다.

b, 우무재하 경간

$d^4\omega_2/d\rho^4_2=0$이므로

$$\omega_2^p=\frac{\rho l_2^3}{6EI}\ [1\ \rho_2\ \rho_2^2\ \rho_2^3]N_2\ \{1\ \kappa_1\ \kappa_1^2\ \kappa_1^3\}$$

$$0<\kappa_2<1 \qquad (4\sim 3)$$

$$\text{단 } N_2=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}&b_{13}&b_{14}\\b_{21}&b_{22}&b_{23}&b_{24}\\b_{31}&b_{32}&b_{33}&b_{34}\\b_{41}&b_{42}&b_{42}&b_{44}\end{pmatrix} \qquad (4\sim 4)$$

에서 출발한다. 여기서 좌우양단의 경계조건은 (ω_2) $(\omega_2)p_{2=0}=(\omega_2)^{\rho 2}{}_{=1}=\left(\frac{d^2\omega^2}{d\rho_2^2}\right)_{\rho_{2=1}}=0$ 즉 boundary는 matrix B_2는

$$B_2=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\1&1&1&1\\0&0&2&6\end{pmatrix}$$

이므로 $B_2N_2^p=0$을 계산하면

$$b_{1i}=0,\quad b_{2i}=2b_{4i},\quad b_{3i}=-3b_{4i}\quad (i=1,2,3,4) \qquad (4\sim 5)$$

이다.

c, 결합 조건

중간지점 B에서 회전각, 곡 moment의 연속조건을 생각하면

$$\frac{pl_1^2}{EI_1}\left(\frac{d\omega^p}{d\rho_1}\right)_{\rho 1=1}=\frac{pl_2^p}{EI_2}\left(\frac{d\omega_2^p}{d\rho_2}\right)_{\rho 2}=0,$$

$$\frac{pl_1}{EI_1}\left(\frac{d^2\omega_1^p}{d\rho_1^2}\right)_{\rho 1=1}=\frac{pl_2}{EI_2}\left(\frac{d^2\omega_2^p}{d\rho_2^2}\right)_{\rho 2=0}$$

이므로 이것을 결합하여 matrix형으로 표시하면

$$\begin{pmatrix}[0\,1\,2\,3]-\frac{\mu^2}{\gamma}[0\,1\,0\,0]\\[0\,0\,2\,6]-\frac{\mu}{\gamma}[0\,0\,2\,0]\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\bar{N}_1^p\\N_2^p\end{pmatrix}=C\begin{pmatrix}\bar{N}_1^p\\N_2^p\end{pmatrix}=0 \qquad (4\sim 7)$$

이다. (4~7)식에서 C 는

$$C=\begin{pmatrix}[0\,1\,2\,3]&\left[0-\frac{\mu^2}{\gamma}0\,0\right]\\[0\,0\,2\,6]&\left[0\,0-\frac{2\mu}{\gamma}0\right]\end{pmatrix}$$

$$=\left(\begin{pmatrix}0&1&2&3\\0&0&2&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0-\frac{\mu^2}{\gamma}0&0\\0\,0-\frac{2\mu}{\gamma}&0\end{pmatrix}\right) \qquad (4\sim 8)$$

로 결합(Connection) matrix라 부른다.

(4~7)식에 의한 계산은 전과 같이 단책법에 의함이 편리하며 그 결과를 정리하면

$$2(a_{44}-4)+3(1-a_{44})-\frac{2\mu^2}{\gamma}b_{43}=-3,$$

$$2(1-a_{44})+3a_{44}-\frac{2\mu^2}{\gamma}b_{44}=0,$$

$$b_{41}=0,\quad 2(a_{44}-4)+6(1-a_{44})+\frac{3\mu}{\gamma}b_{43}=0,$$

$$b_{42}=0,\quad 2(1-a_{44})+6a_{44}+\frac{6\mu}{\gamma}b_{44}=0.$$

이므로 이것을 풀어

$$a_{44}=-\frac{2(3+\mu)}{(3+4\mu)},\quad b_{43}=-\frac{3\gamma}{\mu(3+4\mu)},$$

$$b_{44}=-b_{43} \qquad (4\sim 9)$$

을 얻는다. (4~9)식에서 우무재경간이 없다면 $\mu=0$이므로 $a_{44}=-2$이며 이 값을 (4~2)식에 대입하면 $a_{33}=-6$, $a_{34}=3$으로 이것은 양단고정 단경간의 고유Matrix와 일치한다. 이는 우무재경간의 좌재하경간에 대한 영향이라 생각할 수 있다. 지금까지의 결과를 종합하면

$$\left|\frac{\omega_1^p}{\bar{\omega}_1^p}\right|=\frac{pl_2^3}{6EI_1}[1\ \rho_1\ \rho_1^2\ \rho_1^3]\left|\frac{N_1^p}{\bar{N}_1^p}\right|\{1\ \kappa_1^2\ \kappa_1^3\}\left|\begin{matrix}0<\rho_1<\kappa_1\\\kappa_1<\rho_1<1\end{matrix}\right| \qquad (4\sim 10)$$

$$\omega_2^p=\frac{pl^3{}_2}{6EI_2}(1\ \rho_{22}\ \rho_2^2\ \rho^3]\ N_2^p\ \{1\ \kappa_1\ \kappa_1^2\ \kappa_1^3\}$$

$$0<\rho_2<1 \qquad (4\sim 10')$$

에서

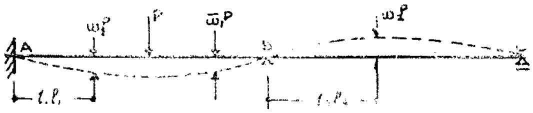
$$N_1^P=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 3 & (a_{44}-4) & (1-a_{44})\\ -1 & 0 & (1-a_{44}) & a_{44}\end{pmatrix},$$

$$N_2^P=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 2b_{43} & -2b_{43}\\ 0 & 0 & -3b_{43} & 3b_{43}\\ 0 & 0 & b_{43} & -b_{43}\end{pmatrix} \qquad (4\sim11,)$$

$\bar{N}_1^P$, N_1^P의 전치이고 a_{44}, a_{43}는 각각
$a_{44}=-2(3+\mu)/(3+4\mu)$, $b_{43}=-3\gamma/\mu(3+4\mu)$이다.

(2) 우경간 하중작용시

좌경간에 하중이 작용할 때와 동일한 방법으로 다룬다. 즉 좌무재하경간 및 우재하경간에대한 식은



도면 : 9

$$\omega_1^Q=\frac{Ql_1^3}{6EI_1}[1\ \rho_1\ \rho_1^2\ \rho_1^3]N_1^Q\{1\ \kappa_2\ \kappa_2^2\ \kappa_2^3\}$$

$$0<\rho_1<1$$

$$\left|\frac{\omega_2^Q}{\bar{\omega}_2^Q}\right|=\frac{Ql_2^3}{6EI_2}[1\ \rho_2\ \rho_2^2\ \rho_2^3]\left(\frac{N_2^Q}{\bar{N}_2^Q}\right)\{1\ \kappa_2\ \kappa_2^2\ \kappa_2^3\}$$

$$\left|\frac{0<\rho_2<\kappa_2}{\kappa_2<\rho_2<1}\right|$$

에서 N_1^Q는 (2～9)식, N_2^Q는 (4～4)식과 동일형으로 $\bar{N}_2$는 N_2의 전치이다.

a. 좌무재하경간

좌우양단의 지지상태에 따라 $(\omega_1^Q)_{\rho_1=0}=\left(\frac{d\omega_1^Q}{d\rho_1}\right)$ $\rho_1=0=(\omega_1^Q)_{\rho_1=1}=0$ 이므로 경계 matrix B_1

$$B_1=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{pmatrix}$$ 이고 따라서 $B_1N_1^Q=0$을 계산하면

$$a_{1i}=a_{2i}=0,\ a_{3i}=-a_{4i}\ (i=1,2,3,4) \qquad (4\sim12)$$

이다.

b. 우재하경간

먼저 하중작용점의 연속조건을 처리하면 N_2^Q, $\bar{N}_2^Q$는 (3～3, 3′)식과 동일하게 된다.
여기에 양단지지조건 $(\omega_2^Q)_{\rho_2=0}=0$, $(\omega_2^Q)_{\rho_2=1}=\left(\frac{d^2\bar{\omega}_2^Q}{d\rho_2^2}\right)_{\rho_2=1}=0$에 의한 boundary matrix $B_2=[1\,0\,0\,0]$, $B_2'=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 2 & 6\end{bmatrix}$와 $B_2N_2^Q=0$, $B_2'\bar{N}_2^Q=0$을 계산하면 그 결과는 다음과 같다.

$$b_{1i}=0 \qquad b_{24}=\frac{2}{4}b_{22}$$

$$b_{21}=0 \qquad b_{33}=\frac{1}{4}(9b_{22}-18)$$

$$b_{22}=b_{22} \qquad b_{34}=\frac{1}{4}(-3b_{22}+6)$$

$$b_{23}=-\frac{6}{4}b_{22} \qquad b_{44}=\frac{1}{4}(b_{22}-2)$$

c. 결합조건

중간지점 B에서의 결합조건은 (4～8)식과 동일하므로 $C\{N_1^QN_2^Q\}$를 단책법에 의하여 계산하면

$$a_{31}=0,\ a_{32}+\frac{\mu^2}{\gamma}b_{22}=0,\quad 4a_{32}-\frac{3\mu}{\gamma}b_{22}=-\frac{6\mu}{\gamma}$$

$$a_{33}-\frac{3\mu^2}{2\gamma}=0,\qquad 4a_{33}+\frac{9\mu}{2\gamma}b_{22}=\frac{9\mu}{\gamma}$$

$$a_{34}-\frac{\mu^2}{2\gamma}b_{22}=0,\qquad 4a_{34}-\frac{3\mu}{2\gamma}b_{22}=-\frac{3\mu}{\gamma}$$

이므로 이것을 풀면

$$a_{32}=2a_{34},\ a_{33}=-3a_{34},\ a_{34}=-3\mu^2/\gamma(3+4\mu),$$
$$b_{22}=6/(3+4\mu) \qquad (4\sim14)$$

를 얻는다. 지금까지의 결과를 종합하면

$$\omega_1^Q=\frac{Ql_1^3}{6EI_1}[1\ \rho_1\ \rho_1^2\ \rho_1^3]\ N_1^Q\ \{1\ \kappa_2\ \kappa_2^2\ \kappa_2^3\}$$

$$0<\rho_1<1 \qquad (4\sim15)$$

$$\left|\frac{\omega_2^Q}{\bar{\omega}_2^Q}\right|=\frac{Ql_2^3}{6EI_2}[1\ \rho_2\ \rho_2^2\ \rho_2^3]\left|\frac{N_2^Q}{\bar{N}_2^Q}\right|\ \{1\ \kappa_2\ \kappa_2^2\ \kappa_2^3\}$$

$$\left|\frac{0<\rho_2<\kappa_2}{\kappa_2>\rho_2<1}\right| \qquad (4\sim15')$$

에서

$$N_1^Q=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 2a_{34} & -3a_{34} & a_{34}\\ 0 & -2a_{34} & 3a_{34} & -a_{34}\end{pmatrix},$$

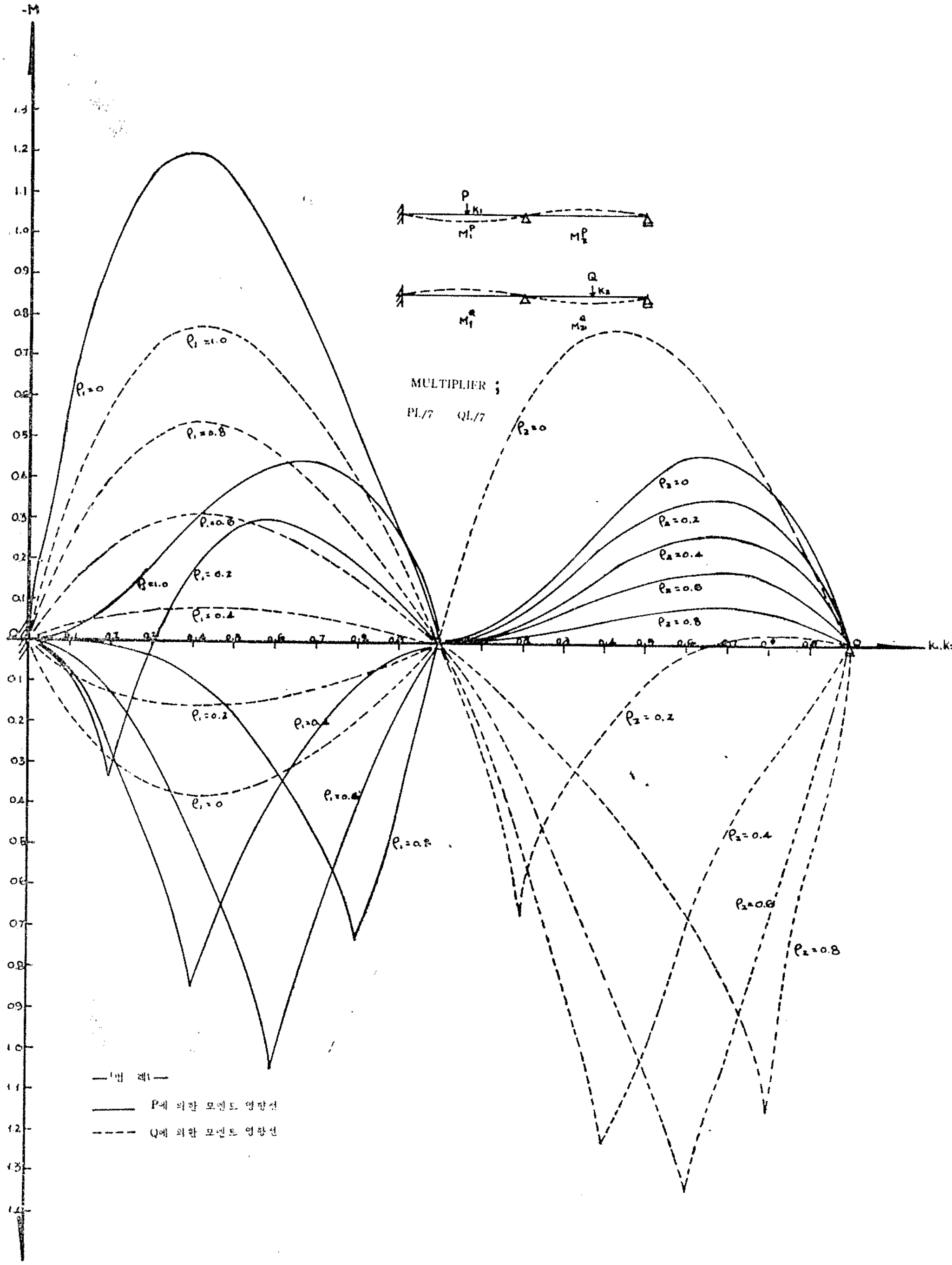
$$N_2^Q=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 4b_{22} & -6b_{22} & 2b_{22}\\ 0 & -6b_{22}+12 & 9b_{22}-18 & -3b_{22}+6\\ -4 & 2b_{22} & -3b_{22}+6 & b_{22}-2\end{pmatrix}$$

$$(4\sim16,\ 16)$$

$\bar{N}_2^Q$는 N_2^Q의 전치이고 a_{34}, b_{22}는 각각 $a_{34}=-3\mu^2/\gamma(3+4\mu)$, $b_{22}=6/(3+4\mu)$이다.

도 7과 같은 보의 임의점에서의 변위 및 응력은 (4～10, 11), (4～15, 16)식에 의하여 $\omega_1=(\omega_1^P+\omega_1^Q)$ $\bar{\omega}_2=(\omega_2^P+\bar{\omega}_2^Q)$, $M_1=-EI_1\frac{d^2\omega_1}{l_1^2d\rho_1^2}$, —|, $\bar{M}_2=-EI_2\frac{d^2\omega_2}{l_2^2d\rho_2^2}$ 등으로 합성할 수 있다.

이하 경간 각점에서의 변위 및 응력을 구해보기로 한다. 단 계산편의상 등단면($I_1=I_2=I$, $\gamma=1$), 등 Span



도면 : 10

($l_1=l_2=l$, $\mu=1$)를 가정한다. $\gamma=\mu=1$이므로 (4~11, 11') 식에 각각 $a_{44}=-8/7$, $b_{43}=-3/7$을 대입하면

$$N_1{}^p=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&21&-36&15\\-7&0&15&-8\end{pmatrix},$$

$$\bar{N}_1{}^p=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}0&0&0&-7\\0&0&21&0\\0&0&-36&15\\0&0&15&-8\end{pmatrix}$$

$$N_2{}^p=\frac{3}{7}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&-2&2\\0&0&3&-3\\0&0&-1&1\end{pmatrix}$$

이므로

$$\omega_1{}^p=\frac{pl^3}{42EI}\Big[(21\kappa_1-36\kappa_1{}^2+15\kappa_1{}^3)\rho_1{}^2-(7-15\kappa_1{}^2+8\kappa_1{}^3)\rho_1{}^3\Big]$$

$$M_1{}^p=-EI\frac{d^2\omega_1{}^p}{l^2d\rho_1{}^2}=\frac{pl}{7}(1-\kappa_1)\Big[(5\kappa_1-7)\kappa_1-(8\kappa_1{}^2-7\kappa_1-7)\rho_1\Big]\qquad 0<\rho_1<\kappa_1$$

$$S_1{}^p=\frac{dM_1{}^p}{ld\rho_1}=\frac{p}{7}(1-\kappa_1)(7+7\kappa_1-8\kappa_1{}^2)$$

$$\bar{\omega}_1{}^p=\frac{pl^3}{42EI}\Big[-7\kappa_1{}^3+21\kappa_1{}^2\rho_1-(36\kappa_1{}^2-15\kappa_1{}^3)\rho_1{}^2+(15\kappa_1{}^2+8\kappa_1{}^3)\rho_1{}^3\Big]$$

$$\bar{M}_1{}^p=\frac{pl}{7}\kappa_1{}^2[(12-5\kappa_1)-(15-8\kappa_1)\rho_1]$$

$$\bar{S}_1{}^p=-\frac{p}{7}\kappa_1{}^2(15-8\kappa_1)\qquad \kappa_1<\rho_1<1$$

$$\omega_2{}^p=-\frac{pl^3}{14EI}\kappa_1{}^2(1-\kappa_1)(\rho_2-1)(\rho_2-2)$$

$$M_2{}^p=-\frac{3pl}{7}\kappa_1{}^2(1-\kappa_1)(1-\rho_2)$$

$$S_2{}^p=\frac{3p}{7}\kappa_1{}^2(1-\kappa_1)\qquad 0<\rho_2<1$$

또한 (4~15, 15')식에 $a_{34}=-3/7$, $b_{22}=6/7$을 대입하면

$$N_1{}^Q=\frac{3}{7}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\\0&2&-3&1\\0&-2&3&-1\end{pmatrix},\quad N_2{}^Q=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}0&0&0&0\\0&6&-9&3\\0&12&-18&6\\-7&3&6&-12\end{pmatrix}$$

$$\bar{N}_2{}^Q=\frac{1}{7}\begin{pmatrix}0&0&0&-7\\0&6&12&3\\0&-9&-18&6\\0&3&6&-2\end{pmatrix}$$

이므로

$$\omega_1{}^Q=-\frac{Ql^3}{14EI}\kappa_2(\kappa_2-1)(\kappa_2-2)\rho_1{}^2(1-\rho_1)$$

$$M_1{}^Q=\frac{Ql}{7}\kappa_2(\kappa_2-1)(\kappa_2-2)(1-3\rho_1)\quad 0<\rho_1<1$$

$$S_1{}^Q=-\frac{3}{7}Q\kappa_2(\kappa_2-1)(\kappa_2-2)$$

$$\omega_2{}^Q=\frac{Ql^3}{42EI}\Big[\kappa_2(6-9\kappa_2+3\kappa_2{}^2)\rho_2+\kappa_2(12-18\kappa_2+6\kappa_2{}^2)\rho_2{}^2-(7-3\kappa_2-6\kappa_2{}^2+2\kappa_2{}^3)\rho_2{}^3\Big]$$

$$M_2{}^Q=\frac{Ql}{7}(1-\kappa_2)[2\kappa_2(\kappa_2-2)(1-\rho_2)+7\rho_2]\qquad 0<\rho_2<\kappa_2$$

$$S_2{}^Q=\frac{Q}{7}(\kappa_2-1)(2\kappa_2{}^2-4\kappa_2-7)$$

$$\bar{\omega}_2{}^Q=\frac{Ql^3\kappa_2}{42EI}\Big[-7\kappa_2{}^2+3(\kappa_2{}^2+4\kappa_2+2)\rho_2+3(2\kappa_2{}^2\ 6\kappa_2-3)\rho_2{}^2-(2\kappa_2{}^2-6\kappa_2-3)\rho_2{}^3\Big]$$

$$\bar{M}_2{}^Q=-\frac{Ql}{7}\kappa_2(2\kappa_2{}^2-6\kappa_2-3)(1-\rho_2)$$

$$\bar{S}_2{}^Q=\frac{Q}{7}\kappa_2(2\kappa_2{}^2-6\kappa_2-3)\qquad \kappa_2<\rho_2<1$$

상식에 의한 곡 moment 영향선만을 도시하면 도10과 같다.

도 7에서 C단이 고정, A단이 단순일 때에도 같은 방법으로 진행시킬 수 있다.

5. 결 언

지금까지 미소변화를 전제로 한 보의 탄성곡선 미분방정식의 해를 행렬형으로 표시하고 변위 및 응력도 같은 기법으로 표시하였다. 미지요소의 행렬 즉 고유 matrix의 결정은 때에 따라 partitioned matrix, inversed matrix법 등을 이용함이 편리하나 지면관계상 생략하였다.

§4에 예로보아 경간수의 증가, 경간장, 하중상태, 지지상태의 변화는 고유 matrix의 결정을 대단히 복잡하게 할 것이므로 자연 computer에 의존해야 할 것이다. 도 10 곡 moment 영향선도는 임의점의 곡moment 부호가 하중 P,Q의 크기 및 이들이 이동하는 위치에 따라 바뀌지게 하는 예측을 확실히 하여 준다.

참고문헌

谷本勉之助 : 상설 Matrix 응용역학(1966)

H.C. Martin : Introduction to Martix Method of Structural Analysis (1966)

C.N. Nolis : Elememtary Structural Analysis(1960)

Timosenko and Young; Elements of Strength and Materials. (1962)

C.K. Wang; Statically Indeterminate Structures (1962)

(필자 신문철 ; 전남대학교 공과대학 조교수

이수곤 ; 전남대학교 공과대학 전임강사)