計量管理圖에 있어서 中位數의 利用

商工部 工業第一局 纖維課
纖維係長
金 顯 詰

1. 머릿말
2. 中位數의 定義
3. 中位數 利用의 利點
4. 範圍의 中位數로 標準偏差算定
5. 諸般 標準偏差의 對比
6. (例 1) 一般的인 境遇
(例 2) Sugar bag
(例 3) 車軸의 境遇
7. 表(1) 正規分布圖의 윗쪽 確率
表(2) σ로表示된 95%管理限界線
表(3) $\bar{R}$로 表示된 95%管理限界線
表(4) $\tilde{R}$로 表示된 95%管理限界線

1. 머 릿 말

正規分布에서 Excentricity(Z)가 1.96이면 이를 벗어나는 兩側의 確率은 0.05임을 表1에서 쉽게 밝혀낼수 있다. 即 平均値μ, 標準偏差α인 正規分布를 하는 統計量이 $\mu \pm 1.96\sigma$ 範圍에 들어갈 確率은 0.95가 된다. 이러한 理論을 根據로 하여 $\bar{x}$管理圖의 95%管理限界線을 計算하면 $UCL_{\bar{x}} = \bar{\bar{x}} + 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$ 및

$LCL_{\bar{x}} = \bar{\bar{x}} - 1.96\frac{\sigma}{\sqrt{n}}$임이 明白하다.

그러나 여기서의 問題는 標準偏差(σ)를 어떻게 推定하느냐 하는 것이다. 管理上下限線이 異常原因에 의하여 發生한 보아넘기기 어려운 點을 區別해내는 指標가 되어야 한다면 σ는 當然히 工程이 安定된 狀態에 있을때 計算된 것이라야 할것이다. 왜냐하면 工程이 不安定한 狀態에서 異常點(Outlier)들은 計算上 標準偏差의 값을 크게 하고 結果的으로 管理上下限線을, 中心線으로부터 必要以上으로 벌어지게 하여 다음에 오는 工程의 不安定을 가려내기에 不化되기 때문이다.

그러므로 韓國工業規格(KS A3201 管理圖法)에서는 工程의 標準偏差를 그때 그때 計算하는 代身 理想的인 正規分布를 하는 Normal bowl로부터 試料를 2個, 3個…… 15個 여러번 採取했을때 나타난 範圍의 平均値($\bar{R}$)와 旣知의 標準偏差와의 關係를 나타내는 常數에 1.96을 乘하여 試料의 크기(n) 順으로 配列한 常數表(A_2)의 使用을 권장하고 있다. 實際 工程에서 一群의 範圍는 工程의 어떤 趨勢에 影響을 받지 않으며 工程의 途中平行變動에도 影響을 받지 않으므로 複合된 原因이 加味된 計算値인 σ_p는 $\bar{R}$에 理論的 常數를 곱하여 얻은 σ보다는 큰값을 갖게 된다.

그러나 範圍의 平均 計算에서 한 群內異常點이 發生하면 그 範圍는 커지고 終局에는 $\bar{R}$의 값을 크게 함으로 보아 넘기기 어려운點은

範圍計算에서 除外할 것을 아울러 勵奬하는것이다. 그러므로 異常點을 內包하는 群은 群의 範圍에 計算에서 아이예 削除해 버리는 것이 上策일 것 같다.

여기서 招介하는 範圍의 中位數($\tilde{R}$)에 의한 管理限界線 計算方法은 設或 어떤 群이 異常原因에 의한 Outlier를 包含한다 할지라도 異常點은 中位數計算에 影響을 미치지 않으므로 구태여 神經을 써서 Outlier를 가려내는 混雜을 避할 수 있다.

더구나 中位數의 算定은 平均値의 計算보다 簡便하고 迅速하다는 點에서 $\bar{x}$-R管理圖를 $\tilde{x}$-R管理圖로 代替하는데도 많은 難點이 있을 것으로 믿는다.

2. 中位數(Median)의 定義

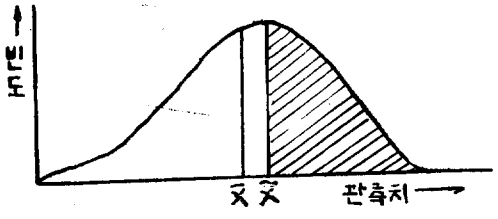
平均値(Mean) 또는 最頻數(Mode)와 같이 어떤 計量으로 表示된 集團의 中心槪念으로서 크기의 順으로 羅列되어 있는 數列에서 中心에 位置한 數値이며 度數分布에서는 觀測値에 對한 頻度를 나타내는 分布圖를 同一한 面積으로 兩分하는 觀測値 座標上에 點을 말한다.

例示(1)

1.2g, 1.5g, 1.6g, 1.7g, 2.0g

Me($\tilde{x}$)

例示(2)



3. 中位數 利用의 利點

(1) 取扱計算의 簡便

(2) Outlier에 影響을 받지 않음

例示(3) Data Sheet 單位 : 5mm-ϕ

群番號	測定値 X_1	X_2	X_3	平均値 ($\bar{x}$)	中位數 ($\tilde{x}$)	範圍
1	21	22	19	20.7	21	3
2	18	20	20	19.3	20	2
3	24	21	22	22.3	22	3
4	20	22	17	19.7	20	4
5	29	22	20	23.7	22	9
6	23	20	23	22.0	23	3
7	18	19	21	19.3	19	3
8	24	20	22	22.0	22	4
9	20	22	21	22.0	21	2

$\Sigma\bar{x}=190$ $\Sigma R=33$

$\bar{\bar{x}}=\frac{\Sigma X}{k}=21.1$ $\bar{R}=\frac{\Sigma R}{k}=3.7$

Meme=21 MeR=3

4. 範圍의 中位數(Median range)로 工程의 標準偏差算定

4.1 工程의 標準偏差

(1) Process performance(σp)

現在 遂行되고 있는 工程評價의 尺度

1) 工程의 平行變動

2) Outlier및

3) 工程의 趨勢가 加味된 것

(2) Process Capability (σc)

上記 3가지 要因에 影響을 받지 않은 理想的 工程能力

4.2 여러 境遇의 標準偏差 算定方法

(1) 單一試料

$$S=\sqrt{\frac{\Sigma(X-\bar{x})^2}{N-1}}=\sqrt{\frac{X\Sigma^2-\frac{(\Sigma X)^2}{N}}{N-1}}$$

$$=d.\sqrt{\frac{\Sigma fX^2-\frac{(\Sigma fX)}{N}}{N-1}}$$

(2) 複合試料集團

1) N이 一定한 경우

$$S=\sqrt{\frac{S_1^2+S_2^2+\cdots+S_K^2}{K}}$$

2) N이 一定치 않은경우

$$S=\sqrt{\frac{(N_1-1)S_1^2+(N_2-1)S_2^2+\cdots+(N_K-1)S^2{}_K}{N_1+N_2+\cdots+N_K-K}}$$

(3) 範圍의 平均($\bar{R}$)으로

$S=C_i\times R$

(註) 表(3)을 使用하여 群의크기 N에 對하여 주어진 常數(C_i)에 範圍의 平均値를 乘한다.

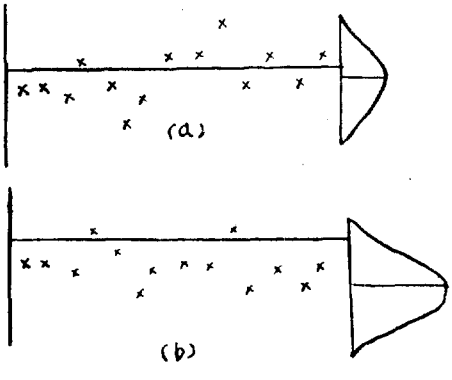
(4) 範圍의 中位數($\tilde{R}$)로 $S=C_i\times\tilde{R}$

(註) 表(4)를 使用하여 群의 크기n에 對하여 주어진 常數(C_i)에 範圍의 中位數를 乘한다.

5. 諸般 標準偏差의 對比

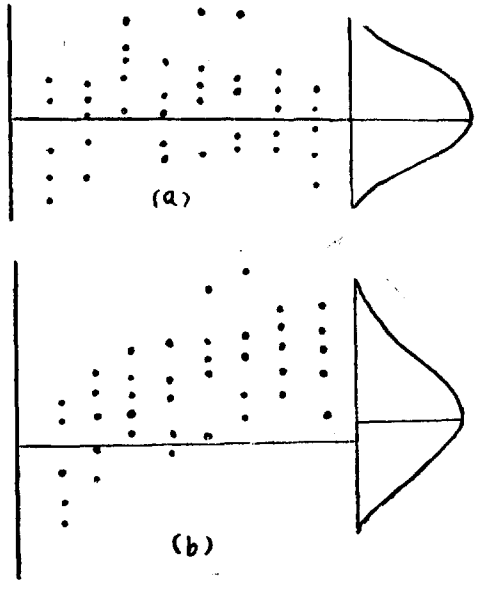
算 定 方 法	影 響 을 미 치 는 要 因			備 考
	工 程 의 平 行 變 動	異 常 點 의 發 生	工 程 의 趨 勢	
$S=\sqrt{\frac{\Sigma(X-\bar{x})^2}{N-1}}$	Yes	Yes	Yes	Process performance
$S=C_iR$	No	Yes	No	Process capability with influence of outliers
$S=C_jR$	No	No	No	Process capability

(例 示 4)



註 : 工程의 흐름 途中에 Process resetting은 全般的 集團의 散布를 크게 하는 結果가 된다.

(例示5)



註 : (a), (b)의 境遇 範圍 (5個點으로 이루어진 群內의 範圍)의 平均과 中位數는 相互同一하나 上昇趨勢를 보이는 (b)의 境遇가 (a)에 比하여 큰散布를 갖는다.

6. 例 題

例 (1) 試料의 크기 3個씩 15個群을 採取하여 測定한 結果 다음과 같은 Data를 얻었다. 中位數와 範圍에 對한 管理線을 求하고 工程의 標準偏差를 算定하라.

(單位 : μ)

群 番 號	測 定 値			中位數($\tilde{x}$)	範 圍(R)
	X_1	X_2	X_3		
1	21	21	23	21	2
2	18	20	22	20	4
3	21	17	18	18	3
4	19	17	22	19	5
5	23	19	22	22	4
6	20	23	24	23	4
7	21	18	21	21	3
8	16	17	23	17	7
9	19	18	21	19	3
10	19	20	23	20	4
11	24	18	21	21	6
12	21	22	26	22	5
13	17	21	22	21	5
14	23	17	19	19	6
15	18	18	21	18	3

(解)

Me	度數	累計	R	度數	累計
17	/	1	2	/	1
18	//	3	3	///	5
19	///	6	4	////	9
20	//	8	5	///	12
21	////	12	6	//	14
22	//	14	7	/	15
23	/	15			

$\text{Meme}=20\mu$ $\quad\quad$ $\text{Me}R=4\mu$

○ 管理線

$UCL_{Me}=\text{Meme}+C_{3i}\text{Me}R=20+0.824\times4$
$=23.3\mu$

$LCL_{Me}=\text{Meme}-C_{3i}\text{Me}R=20-0.824\times4$
$=16.7\mu$

$UCL_R=C_{3M}\text{Me}R=2.32\times4=9.3\mu$

$LCL_R=C_{3M}\text{Me}R=0.19\times4=0.8\mu$

○ 標準偏差

$\sigma=C_{3S}\text{Me}R=0.629\times4=2.5\mu$

例 (2) 公稱重量의 10g의 Sugar bag을 生産하고 있다.

工程은 10g에 未達하는 製品이 全體의 1%를 넘지 않도록 調整되었고 오래동안 5個씩 取하여 秤量한 結果 MeR가 99mg 임이 밝혀졌다. 95% 管理限界線을 求하라.

解 : 標準偏差

$\sigma=0.442\times99=44\text{mg}$

工程의 Setting (μ)

$Z=\dfrac{X-\mu}{\sigma}$ 그런데 1%($P_r=0.01$)는

表(1)에서

$Z=2.33 \quad 2.33=\dfrac{\mu-10}{0.044}$

$\mu=10+0.044\times2.33=10.1\text{g}$

管理限界線

$UCLme=10.1+0.469\times0.044=10.15\text{g}$

$LCLme=10.1-0.069\times0.044=10.05\text{g}$

$UCL_R=1.86\times0.099=0.18\text{g}$

$LCL_R=0.38\times0.099=0.04\text{g}$

例 (3) 어떤 車軸의 規格은 100mm±1.0mm인데 長期間 5個式의 試料를 採取하여 調査한 結果 MeR가 0.32mm로 밝혀졌다. 지금 管理費用을 節減하기 위하여 試料의 크기를 $n=3$으로 줄이려고 하는데 中位數에 對한 95% 管理限界線을 計算하라.

解 : 工程의 標準偏差

$\sigma_c=0.442\times0.32=0.141\text{mm}$

○誤謬

$UCLme=100+1.31\times0.141=100.18\text{mm}$

$LCLme=100-1.31\times0.141=99.82\text{mm}$

○理由

Me와 常數와 乘하여 工程의 標準偏差를 計算하면 工程의 平均變動이나 異常要因의 點 또는 趨勢는 그 計算에 影響을 미치지 않아서 理想値인 σ_c는 아주 작게 된다. 그러므로 上記 例와 같이 許用公差(=±10mm)가 σ_c(=0.141mm)에 比하여 越等히 큰 境遇하는 다음과 같이 管理線을 求한다.

○對案

$UCLme=101-3\sigma+1.31\times0u141$
$=100.76\text{mm}$

$UCLme=99+3\sigma-1.31\times0.141$
$=99.24\text{mm}$

7. 表(1)

Table for probability of excess in the normal distribution

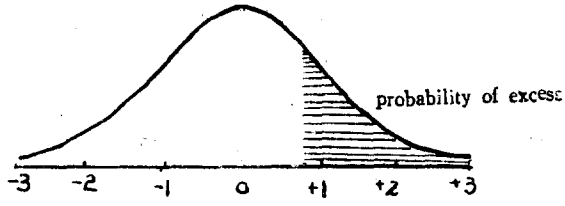


Table of the cumulative normal distribution

Z	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	5000	4960	4920	4880	4840	4801	4761	4721	4681	4641
0.1	4602	4562	4522	4483	4404	4404	4364	4325	4286	4247
0.2	4207	4168	4129	4090	4052	4013	3974	3936	3897	3859
0.3	3821	3783	3745	3707	3669	3632	3594	3557	3520	3483
0.4	3446	3409	3372	3336	3300	3264	3228	3191	3156	3121
0.5	3085	3050	3015	2981	2946	2912	2877	2843	2810	2776
0.6	2743	2709	2676	2643	2611	2578	2646	2514	2483	2451
0.7	2420	2389	2358	2327	2296	2266	2236	2206	2177	2148
0.8	2119	2090	2061	2033	2605	1977	1949	1922	1894	1867
0.9	1841	1814	1788	1762	1736	1711	1685	1660	1635	1611
1.0	1587	1562	1539	1515	1492	1469	1446	1423	1401	1376
1.1	1357	1335	1314	1292	1271	1251	1230	1210	1190	1170
1.2	1151	1131	1112	1093	1075	1056	1038	1020	1003	0985
1.3	0968	0951	0934	0918	0901	0885	0869	0853	0838	0823
1.4	0808	0793	0778	0764	0749	0735	0721	0708	0694	0681
1.5	0668	0655	0643	0630	0618	0606	0594	0582	0571	0559
1.6	0548	0537	0526	0516	0505	0495	0485	0475	0465	0455
1.7	0446	0436	0427	0418	0409	0401	0392	0384	0375	0367
1.8	0359	0351	0344	0336	0329	0322	0314	0307	0301	0294
1.9	0287	0281	0274	0268	0262	0256	0250	0244	0239	0233
2.0	0228	0222	0217	0212	0207	0202	0197	0192	0188	0183
2.1	0179	0174	0170	0166	0162	0158	0154	0150	0146	0143
2.2	0139	0136	0132	0129	0125	0122	0119	0116	0113	0110
2.3	0107	0104	0102	0099	0096	0094	0091	0089	0087	0084
2.4	0082	0080	0078	0075	0073	0071	0069	0068	0066	0064
2.5	0062	0060	0059	0057	0055	0054	0052	0051	0049	0048
2.6	0047	0045	0044	0043	0041	0040	0039	0038	0037	0036
2.7	0035	0034	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026
2.8	0026	0025	0024	0023	0023	0022	0021	0021	0020	0619
2.9	0019	0018	0018	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014
3.0	0013	0013	0013	0012	0012	0011	0011	0011	0010	0010
3.1	0010	0009	0009	0009	0008	0008	0008	0008	0070	0007
3.2	0007	0007	0007	0006	0006	0006	0006	0005	0005	0005
3.3	0005	0005	0005	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003
3.4	0003	0003	0003	0003	0003	0003	0003	0003	0003	0002

A5 means that in rounding-off the nearest odd number must be taken. A5 is rounded-off to the nearest even number.

表(2)

Table for the 95% confidence limits expressed in the process standard deviation

Sample size	Range				limit distunce to standard of	
	LCL	UCL	mean	medium	Mean	Median
2	0. 04	3. 17	1. 13	0. 95	1. 39	1. 39
3	0. 30	3. 68	1. 69	1. 59	1. 13	1. 31
4	0. 59	3. 98	2. 06	1. 98	0. 98	1. 07
5	0. 85	4 20	2. 33	2. 26	0. 88	1. 06
6	1. 06	4. 36	2. 53	2. 47	0. 80	0. 91
7	1. 26	4. 49	2. 70	2. 65	0. 74	0. 90
8	1. 41	4. 61	2 85	2. 79	0. 69	0. 80
9	1. 55	4. 70	2. 97	2. 92	0. 65	0. 79
10	1. 67	4. 79	3. 08	3. 02	0. 62	0. 73
11	1. 78	4. 86	3. 17	3. 12	0. 59	0. 73
12	1. 88	4. 92	3. 26	3. 21	0. 57	0. 67

表(3)

Table for the 95% Confidence limits expressed in the average range

Sample size	Range		limit distance to standard of		Process standard deviation
	LCL	UCL	mean	median	
2	004	281	1232	1232	0887
3	018	217	0668	0776	0591
4	029	193	0476	0518	0485
5	037	181	0377	0452	0429
6	042	172	0316	0360	0395
7	046	166	0274	0332	0370
8	050	162	0244	0283	0351
9	052	158	0220	0268	0337
10	054	156	0202	0238	0325
11	056	153	0186	0229	0316
12	058	151	0174	0207	0306

表(4)

Table for the 95% confidence limits expressed in the median range

Sample size	Range		limit distance to standard of		Prosess standard deviation
	LCL	UCL	Mean	Median	
2	0. 04	3. 34	1. 464	1. 464	1. 053
3	0. 19	2. 32	0. 711	0. 824	0. 629
4	0. 30	2. 01	0. 495	0. 540	0. 505
5	0. 38	1. 86	0. 389	0. 469	0. 442
6	0. 43	1. 76	0. 324	0. 368	0. 405
7	0. 47	1. 70	0. 280	0. 340	0. 377
8	0. 51	1. 65	0. 247	0. 285	0. 358
9	0. 53	1. 62	0. 223	0. 270	0. 342
10	0. 55	1. 59	0. 205	0. 242	0. 331
11	0. 57	1. 56	0. 189	0. 234	0. 321
12	0. 59	1. 53	0. 178	0. 209	0 312