Bull. Korean Math. Soc. Vol. 6(1969) 25--29

群의 生成系에 있어서의 制限된 Burnside 問題에 對하여

朴 泰 燁

1. 序論. 制限된 Burnside 問題를 解決하기 爲하여 交換子와 associated Lie 環의 使用, 特히 制限된 Burnside 問題의 prime exponent에 있어서의 解를 論한다.

G 群의 元 x와 y의 交換子에 對하여 記號 $(x, y)=x^{-1}y^{-1}xy$를 使用한다.

H와 K가 G이 部分群일 때 모든 交換子$(h, k)(h\in H, k\in K)$으로 生成되는 部式群을 (H, K)로 쓴다. 群 G가 주어졌을 때, $G_1=G$, $G_i=(G_{i-1}, G)$ $(i=2, 3\cdots\cdots)$으로 定義된 部分群은 G의 lower central series을 만든다.

$$G_1\supseteq G_2\supseteq G_3\supseteq\supseteq G_n\supseteq G_{n+1}\supseteq\cdots\cdots \tag{1}$$

lower central series의 定義에서 萬一 어떤 n에 對하여 $G_n=G_{n+1}$이면

$$G_n=G_{n+1}=G_{n+2}=\cdots\cdots=G_{n+i}=\cdots\cdots \tag{2}$$

이다.

群 G가 nilpotent이면 어떤 i에 대해서 $G_{s+i}=1$이다. 따라서 $G_s=1$이다. 有限群 G는 그것이 p群(그것들은 G의 Sylow 部分群)의 直積일 때에 限하여 nilpotent임이 알려져 있다. 이와 같이하여 p를 素數로 할 때 exponent p^s의 群이 有限群이면 nilpotent이다. G가 r個의 生成元을 가진 自由群이면 G_n/G_{n+1}은 $\mu_r(n)$個의 生成元을 가진 自由 Abel 群이 되며

$$\mu_r(n)=\frac{1}{n}\sum_{d|n}\mu\left(\frac{n}{d}\right)r^d \tag{3}$$

이다. 여기서 $\mu(n)$은 Möbius의 函數이다. 이와 같이하여 G가 r個의 元으로 生成되고 exponent가 p^s이면, 剩余群 G_i/G_{i+1}의 各各은 有限群이므로, G는 nilpotent일 때에 限하여 有限群이다. 또, 어떤 큰 自然數 N에 對하여 $G_N=1$이고 또 어떤 自然數 n에 對하여 $G_n=G_{n+1}$이면, (2)에서 $G_n=1$이다. 그러므로 制限된 Burnside 問題는 $G_n=G_{n+1}$인 n이 存在하면 肯定的으로 解決된다. Kostrikin [4]에 依하면 $G=B(5, 2)$일 때는 $G_{13}=G_{14}$이고 2個의 生成元을 가지는 exponent 5의 最大有限群의 位數는 5^{33}이다.

Graham Higman [1]은 制限된 Burnside 問題를 exponent가 5인 경우

生成元의 수효가 有限일 때 解決하였다. Kostrikin [4]은 prime exponent의 경우에 問題를 解決했다.

지금 $x^{-1}ax=a^x$와 같이 놓으면 먼저 導入한 $((x, y), z)=(x, y, z)$를 使用하면 交換子에 對하여 아래와 같은 몇 개의 恒等式이 成立한다.

$$(x, x)=1, \quad (y, x)=(x, y)^{-1} \tag{4}$$

$$(x, y, z)=(x, z)^y(y, z)=(x, z)(x, z, y)(y, z) \tag{4a}$$

$$(x, y, z)=(x, z)(x, y)^z=(x, z)(x, y)(x, y, z) \tag{5}$$

$$(x, y^{-1}, y)^y(y, z^{-1}, x)^z(z, x^{-1}, y)^x=1 \tag{6}$$

$$\begin{aligned}&(x, y, z)(y, z, x)(z, x, y)\\&=(y, x)(z, x)(z, y)^x(x, y)(x, z)^y(y, z)^x(x, z)(z, x)^y\end{aligned} \tag{7}$$

여기서 $(G_i, G_j)\subseteq G_{i+j}$인 것은 알려져 있고, 또 (7)의 右邊은 (G_2, G_2)의 元인 것도 容易하게 나온다.

恒等式 (4)—(7)은 Lie環의 경우와 거의 같다. R이 associated ring이면 R에 있었어의 Lie積 $[x, y]$은

$$[x, y]=xy-yx \tag{8}$$

와 같이 定義된다.

다음 恒等式이 成立한다.

$$[x, x]=0, \quad [y, x]=-[x, y] \tag{9}$$

$$[x, y, z]=[x, z]+[y, z] \tag{10}$$

$$[x, y+z]=[x, y]+[x, z] \tag{11}$$

$$[x, y, z]+[y, z, x]+[z, x, y]=0 \tag{12}$$

特히 (12)는 Jacobi 恒等式으로 알려져 있다.

Graham Higman [3]의 方法에 따라서, 群 G에서 *Lie*環 L을 誘導하면 任意의 自然數 i, j에 對하여 $(H_i, H_j)\subseteq H_{i+j}$인 正規部分群의 列

$$G=H_1\supseteq H_2\supseteq H_3\supseteq\cdots\cdots\supseteq H_i\supseteq\cdots\cdots \tag{13}$$

를 얻을 수 있다.

L의 加法群은 이 列의 剩余群 H_i/H_{i+1}의 直和이다. 이 때 H_i/H_{i+1}의 元을 次數 i의 齊次元이라 한다. 齊次元의 大括弧乘法은

$$[g_iH_{i+1}, g_jH_{j+1}]=g_i^{-1}g_j^{-1}g_ig_jH_{i+j+1} \tag{14}$$

에 依하여 定義된다. 또 (14)는 双一次性 (10)과 (11)에 依하면 L에도 擴張

된다.

G에서의 (7)에 의하면 L의 齊次元에 對한 Jacobi 恒等式(12)를 얻을 수 있고 双一次性에 依하여 이것은 L의 任意의 元 S에도 擴張된다.

지금 G를 exponent p^s, k個의 元으로 生成되여 있고, 또 L이 (14)에 依한 assoriated Lie 環이라 하면, $L^n=0$, $G_n=G_{n+1}$이고 (2)에 依하면 $G_n=1$이다. n이 同一한 各各의 有限群 G에 對하여, G의 位數에 對한 限界$b(p^s, k)$가 있는 것이 알려져 있고, 그리하여 制限된 Burnside 問題의 肯定的인 解決을 보게 된다. 素數 羃 exponent에 對한 制限된 Burnside 問題는 풀이하는 것은 associated Lie 環이 nilpotent이라는 것과 同値이다.

Kostrikin [4]은 prime exponent p에 對한 制限된 Burnside 問題를 解決하였는데, 그는 Philip Hall [1] 結果에서 出發하고 있다. 즉 exponent p의 群 G에서는 任意의 x와 y에 對해

$$(y, \overbrace{x, \cdots\cdots, x}^{p-1})\equiv 1 \pmod{G_{p+1}} \tag{15}$$

가 成立한다는 結果이다. 여기서 左邊의 交換子의 무게는 p이다. associated Lie 環에서는 x의 個數가 $p-1$일 때

$$[y, \ x, \cdots\cdots, x]=0 \tag{16}$$

로 된다. (15)에서는 記號 $((a_1, \cdots\cdots, a_{n-1}), a_n)=(a_1, \cdots\cdots, a_n)$를 使用하고 있으나, (16)에서도 같다. 條件 (16)은 位數 $p-1$의 Engel 條件이라 불리운다. (15)에서 (16)을 얻고자 할 때 L의 齊次元에 對해서만이 아니고, 모든 元에 對해서 얻으려면 다소의 注意가 心要하다. Kostrikin [4]은 $m<p$인 m에 對하여 m次의 Engel 條件을 滿足하는 標數 p의 Lie 環 L에는 恒常 nilpotent ideal이 存在한다는 것을 證明하였다. Lie 環 L의 一般論에 依하면 有限生成이고 이 性質을 가지는 L은 心然的으로 nilpotent이다. 따라서 適當한 自然數에 對하여 $L^n=0$이고, 또 $G_n=G_{n+1}$이므로 制限된 Burnside 問題에 對한 肯定的인 解를 얻는다.

Lie 環 L에 있어서의 inner derivations가 이루는 環 $D(L)$를 다음과 같이 定義한다.

$A(x)$: 모든 $u\in L$에 對하여 $u\rightarrow[u, \ x]$ (17)로 하자. 여기서 $A(x)$은 加法群으로의 L의 自己準同型 對應이다. 環 $D(L)$은 $A(x)$로 生成되는 環이고, (9)—(12)에 依하여 다음이 成立한다.

$$A(x+y)=A(x)+A(y) \tag{18}$$

$$A([x, y])=A(x)A(y)-A(y)A(x)=[A(x), A(y)] \tag{19}$$

여기서 (19)는 主로 Jacobi 恒等式(12)에 依存하고 또 (19)의 右邊의 大括弧는 環 $D(L)$에서의 (8)로부터 얻어진다. L에 nilpotent ideal이 存在하지 않으면 L에서 $D(L)$의 寫像(17)은 faithfull하다. 따라서 簡單히 $A(x)$ 代身에 x로 쓰면 Engel 條件(16)은 $D(L)$에서

$$x^{p-1}=0 \tag{20}$$

와 같이 된다. $D(L)$에서의 條件 $a_1a_2\cdots\cdots a_m=0$은 L에서 모든 u에 對하여 $[u, a_1, a_2, \cdots\cdots, a_m]=0$이라고 하는 것과 同値이다.

2. 制限된 Burnside 問題의 考察 術語와 定義는 主로 Kostrikin [4]의 것을 따른다.

定義. C_m은 0이 아닌 $D(L)$의 元으로서 $D(L)$의 任意의 b에 對하여, $C_mb^iC_m=0$, $(i=0, \cdots\cdots, 2m-1)$을 滿足한다.

補題 1. 어떤 $C_m(m\geq 2)$가 存在하면, 다음 元의 하나는 어떤 C_{m+1}이다.

C_m, 어떤 a에 對하여 $C_m'=[C_ma^{2m+1}C_m]$, 또는 어떤 a와 d에 對하여 $[C_m' d^{2m+1}C_m']$.

補題 2. L가 $n<p$인 n에 對하여 n次의 Engel 條件을 滿足하고, m_0가 $(n-1)/2$보다 크지 않은 最大整數이면, 어떤 C_{m0}로 生成되는 ideal N는 nilpotent이고, $N^2=0$이다.

이것들로부터 다음 補題를 얻는다.

補題 3. $D(L)$가 어떤 元 C_2를 包含하면, L는 nilpotent ideal을 包含한다. Kostrikin의 남은 일은 元 C_2를 찾아 내는 것이다.

補題 4. $D(L)$은 $C\neq 0$, $C^2=0$인 元을 包含한다.

補題 5. $D(L)$은 어떤 元 C_2를 包含한다. Kostrikin은 $D(L)$에서 $v^{m-1}\neq 0$, $v^m=0$이면, $4\leq m$인 條件 밑에서 $D(L)$의 任意의 w에 對하여 $[wv^{m-1}]^{m-1}=0$으로부터 $b\neq 0$, $b^3=0$라고 하는 元을 구했다.

L가 locally nilpotent가 아니면 모순이 생긴다는 것으로부터, 그는 다음 結果를 얻는다.

定理. (Kostrikin) $m<p$인 m에 對하여 m次의 Engel 條件을 滿足하는 標數 p의 Lie 環은 locally nilpotent이다. 따라서 制限된 Burnside 問題는

prime exponent p에 對해서는 肯定的으로 해결된다.

exponent $p^s(s>1)$에 對해서는, 制限된 Burnside 問題는 해결되지 못하였다. Associated Lie 環에서의 元의 加法的 位數는 p라기보다는 p^s이고 그것이 複雜性을 加한다.

exponent 4의 群에서는 Sanov가 群 $B(4, k)$의 有限性을 證明하였으므로 制限된 Burnside 問題와 制限하지 않은 Burnside 問題는 一致한다. C. R. B. Wright [5]은 $G=B(4, k)$에 對하여 $G_{3k}=G_{3k+1}=\cdots\cdots$, 그리고 Sanov의 結果를 使用하여 $G_{3k}=1$을 表示하고, G의 class가 $3k-1$임을 證明하였다. 이것은 勿論$B(4, k)$의 位數를 評價하는데 Sanov의 本來의 일 보다 훨신 滿足할 基礎를 提供하고 있다. exponent 4일 때는 任意의 x와 y에 對하여

$$(y, x, x, x, x, x)=1 \tag{21}$$

임을 안다. 이것은 5次의 Engel 條件이다. Wright [5]의 主要한 結果는 (1) $n\geq 6$ 및 (2) a_i 가운데서 넷 또는 그 以上이 같다고 하는 條件이고

$$(a_1, a_2, \cdots\cdots, a_n)\equiv 1 \pmod{G_{n+1}} \tag{22}$$

라고 하는 것이다. 이것으로부터 容易하게 $B(4, k)$의 class가 $3k$라고 하는 結果를 얻는다. 特別한 論法에 依하면 이것이 $3k-1$으로 簡約된다.

参 考 文 獻

1. P. Hall, *A note on solvable groups*, J. London Math. Soc. 3(1928). 98—105.
2. G. Higman, *On finite groups of exponent five*, Proc. Cambridge Philos. Soc. (1956).
3. ——, *Lie ring methods in the theory of finite nilpotent groups*, Proc. Itern. Congr. Math. (1958)
4. A.I. Kostrikin, *Solutions of the restricted Burnside Problem for exponent* 5, Izv. Akad, Nauk SSR, Ser. mat 19(1955), 233—244.
5. C. R.B. Wright, *On the nilpotency class of a group of exponent four*, Pac. J. Math. 11, (1961).

京畿工業高等專門學校