Bull. Korean Math. Soc. Vol. 6. (1969) 11—23

# 一次聯立方程式의 數値解法에 대하여

李 禹 輪

**緖論.** 近年에 急速하게 發達된 콤퓨터는 科學技術의 硏究分野는 勿論 社會一般에 걸쳐서 影響을 주고 있다. 特히 微分方程式의 解法, 線型計劃法, 戰略硏究, 經營理論等 多方面에 利用되는 行列의 計算과 一次聯立方程式의 實地解法은 콤퓨터의 發達에 의하여 從來 거의 不可能視 되든 것이 可能하게 되었다

本解說에서는 우선 行列式의 二角化手順을 살피고 이것을 利用하여 聯立方程式의 解法 特히 Gauss의 消去法을 紹介한다. 다음에 이것을 콤퓨터에 알맞도록 整理하여 그 手順을 Flow Chart 化한 다음 一般的으로 흔이 使用되는 **FORTRAN** 語로 記述한다.

## §1. 行列式의 三角化. $n$元 一次聯立方程式

$$
\begin{aligned}
&a_{11}x_1+a_{12}y_2+\cdots\cdots+a_{1n}y_n=b_1\\
&a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots\cdots+a_{nn}x_n=b_n
\end{aligned}
$$

을 풀기 위하여 Cramer의 法則을 使用하면 $n$次이 行列式을 $(n+1)$개 計算해야 한다. 가령 係數로 맡든 $n$次 行列式

$$
D=\begin{vmatrix}
a_{11} & a_{12} & \cdots\cdots & a_{1n}\\
a_{21} & a_{22} & \cdots\cdots & a_{2n}\\
\cdots & \cdots & \cdots\cdots & \cdots\\
a_{n1} & a_{n2} & \cdots\cdots & a_{nn}
\end{vmatrix}
$$

의 값을 $\varepsilon(\alpha\beta\cdots\cdots\nu)a_{\alpha1}a_{\beta2}\cdots\cdots a_{\nu n}$의 總和로서 구하고저 하면 $n!$ 번의 곱셈을 하게 된다. 이런 行列式이 모두 $(n+1)$개 있으므로 주어진 方程式을 풀자면 $(n+1)!$ 번 곱셈을 하게 된다.

그러나 行列式은 三角形化하여서, 즉

$$\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13}\cdots\cdots b_{1n} \\ 0 & b_{22} & b_{23}\cdots\cdots b_{2n} \\ 0 & 0 & b_{33}\cdots\cdots b_{3n} \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ 0 & 0 & 0\ \cdots\cdots b_{nn} \end{vmatrix} = b_{11}b_{22}b_{23}\cdots\cdots b_{nn}$$

와 같은 꼴로 유도하는 方法을 쓰면 $\frac{1}{3}n^4$ 번의 곱셈만으로 풀 수 있게 된다.

이 때에는 훨씬 적은 수효의 곱셈을 하면 좋다.

**例 1.** 3次 行列式

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 7 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

을 三角化하여서 그 값을 구하라.

**解.** 第一行에 $\frac{3}{2}$을 곱하고 이것을 第二行에서 빼면

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

이다. 또 第一行에 $\frac{1}{2}$을 곱하고 이것을 第三行에서 빼면

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{vmatrix}$$

이다. 다음 第二行에 $-3$을 곱하고 이것을 第三行에서 빼면

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

이다. 따라서 구하는 값은 $2\left(-\frac{1}{2}\right)(-2)=2$ 이다.

**例 2.** $n$次行列式을 三角化하기 위하여 우선 3次行列式을 取扱한다.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

에 있어서 第一行을 $a_{11}(a_{11}\neq 0)$로 나누고 $a_{21}$로 곱한 다음 이것을 第二行에서 빼면

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22}-\dfrac{a_{21}a_{12}}{a_{11}} & a_{23}-\dfrac{a_{21}a_{13}}{a_{11}} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

이다. 第三行에 대해서도 마찬가지로 하면

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ 0 & a_{22}-\dfrac{a_{21}a_{12}}{a_{11}} & a_{23}-\dfrac{a_{21}a_{13}}{a_{11}} \\ 0 & a_{32}-\dfrac{a_{31}a_{12}}{a_{11}} & a_{33}-\dfrac{a_{31}a_{13}}{a_{11}} \end{vmatrix}$$

이다. 지금까지의 일을 第二, 三行과 第二, 三列의 元으로 이루워지는 2次行列式에 대하여 한다면 구하는 行列式을 三角化한 셈이 된다. 이런 절차는 一般的인 $n$次行列式에 있어서도 꼭 만찬가지이다.

특히 여기서 주의할 것은 $a_{12}$, $a_{13}$은 第一列에 0이 온다음에는 아무런 용도가 없다는 것이다. 그래서 $a_{12}$, $a_{13}$이 자리에는 각각 $\dfrac{a_{12}}{a_{11}}$, $\dfrac{a_{13}}{a_{11}}$의 값을 넣어 두기로 한다.

또 本來의 $a_{22}$, $a_{23}$, $a_{32}$, $a_{33}$의 자리에는 각각 $a_{23}-\dfrac{a_{21}a_{12}}{a_{11}}$, $a_{23}-\dfrac{a_{21}a_{13}}{a_{11}}$, $a_{33}-\dfrac{a_{31}a_{12}}{a_{11}}$, $a_{33}-\dfrac{a_{31}a_{13}}{a_{11}}$의 값이 들어 있다는 點에 주의하면 좋다. $a_{21}$, $a_{31}$의 자리에는 0이 오게 되여 있으나 行列式의 계산에는 이 0들이 아무런 역할도 하는 것이 없으므로 콤퓨터로 하여금 0을 그 곳에 넣게 할 필요도 없다.

이런 것을 참작하여서 Flow Chart를 그리면 다음과 같다.

$$\boxed{k \longleftarrow 1}$$

$$\downarrow$$

$$\boxed{j \longleftarrow k+1 \quad \text{즉} \quad j \longleftarrow 2}$$

$$\downarrow$$

$a_{kj} \longleftarrow a_{kj}/a_{kk}$ 즉 $a_{12} \longleftarrow a_{12}/a_{11}$

↓

$i \longleftarrow k+1$ 즉 $i \longleftarrow 2$

↓

$a_{ij} \longleftarrow a_{ij} - a_{ik}a_{kj}$ 즉 $a_{22} \longleftarrow a_{22} - a_{21}a_{12}$

↓

$i \longleftarrow i+\mathrm{r}$ 즉 $i \longleftarrow 3$

↓

$a_{j} \longleftarrow a_{ij} - a_{ik}a_{kj}$ 즉 $a_{32} \longleftarrow a_{32} - a_{31}a_{12}$

↓

$j \longleftarrow j+1$ 즉 $j \longleftarrow 3$

↓

$a_{kj} \longleftarrow a_{kj}/a_{kk}$ 즉 $a_{13} \longleftarrow a_{13}/a_{11}$

↓

$i \longleftarrow k+1$ 즉 $i \longleftarrow 2$

↓

$a_{ij} \longleftarrow a_{ij} - a_{ik}a_{kj}$ 즉 $a_{23} \longleftarrow a_{23} - a_{21}a_{13}$

↓

$i \longleftarrow i+1$ 즉 $i \longleftarrow 3$

↓

$a_{ij} \longleftarrow a_{ij} - a_{ik}a_{kj}$ 즉 $a_{33} \longleftarrow a_{33} - a_{31}a_{13}$

↓

$k \longleftarrow k+1$ 즉 $k \longleftarrow 2$

↓

$j \longleftarrow k+1$ 즉 $j \longleftarrow 3$

↓

$a_{kj} \longleftarrow a_{kj}/a_{kk}$ 즉 $a_{23} \longleftarrow a_{23}/a_{22}$

↓

$i \longleftarrow k+1$ 즉 $i \longleftarrow 3$

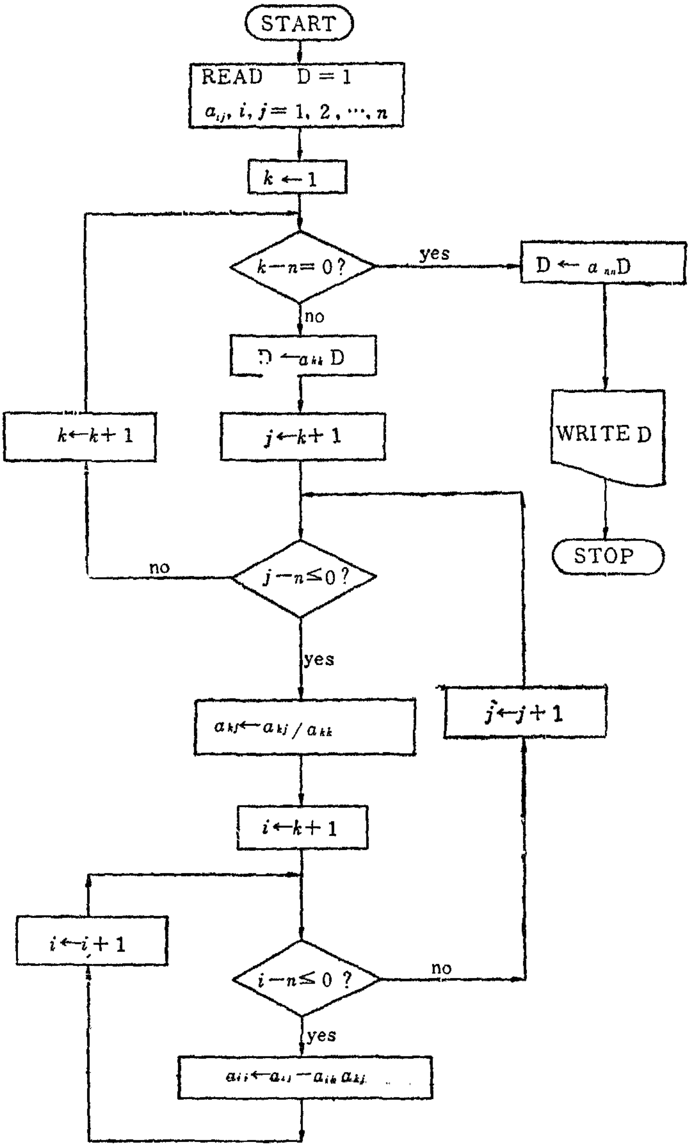
↓

$a_{ij} \longleftarrow a_{ij} - a_{ik}a_{kj}$ 즉 $a_{33} \longleftarrow a_{33} - a_{32}a_{23}$

↓

$D \longleftarrow a_{11}a_{22}a_{33}$

이 Flow Chart를 보면 여러번 유사한 절차가 되풀리 되는데, 이것을 좀 간단히 하고 $n$을 一般的(特定된 3이 아닌)인 整數로 잡으면 다음과 같이 된다.



§2. **Gauss의 消去解法.** $n$元 一次聯立方程式을 푸는데에 Cramer의 方法을 使用하면 行列式을 三角化해도 $\frac{1}{3}n^4$번의 곱셈을 해야 한다. 그러나 Cramer의 方法에 의하지 않고 三角化의 方法으로 未和數를 消去해 나가면 곱셈을 $\frac{2}{3}n^3$번 해서 풀 수가 있다. 이 方法을 Gauss의 消去解法이라고 한다. 주어진 聯立方程式에서 係數의 行列式을 三角化手法을 그냥 그대로 適用해서

$$
\begin{aligned}
b_{11}x_1+b_{12}x_2+b_{13}x_3+\cdots\cdots+b_{1n}x_n&=d_1\\
b_{22}x_2+b_{23}x_3+\cdots\cdots+b_{2n}x_n&=d_2\\
b_{33}x_3+\cdots\cdots+b_{3n}x_n&=d_3\\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots&\\
b_{nn}x_n&=d_n
\end{aligned}
$$

을 얻었다고 하자. 그러면 맨 끝의 方程式에서 $x_n=d_n/b_{nn}$을 얻고, 이것을 바로 그 위의 方程式에 代入해서 $x_{n-1}$의 값을 구하고, ……, 하면 끝에는 $x_1$의 값을 구하게 된다.

위의 消去에 있어서 未知數를 消去하는 데에 使用되는 方程式을 Pivot 方程式이라고 한다. 따라서 위의 聯立方程式의 方程式은 모두 Pivot 方程式이다. 또 消去할 때에 使用된 未知數(즉 消去되는 未知數)의 係數를 Pivot 元이라고 한다. 이 Pivot 元은 0이 되어서는 않되기 때문에 (1, 1) 位置에 0이 있으면 方程式의 順序와 未知數의 順序를 바꾸어서 (1, 1) 位置에는 0아닌 係數가 오도록 해야 한다. 特히 Piovt 元은 그 絶對値가 클수록 解의 近似値가 優良하다는 點도 考慮에 넣어야 한다.

**例 3.** 聯立方程式

$$
\begin{aligned}
2x_1+3x_2+5x_3&=5\\
3x_1+4x_2+7x_3&=6\\
x_1+3x_2+2x_3&=5
\end{aligned}
$$

을 풀어라.

**解.** 係數中 $7x_3$의 것이 最大임으로 方程式을

$$
\begin{aligned}
7x_3+4x_2+3x_1&=6\cdots\cdots\cdots(1)\\
5x_3+3x_2+2x_1&=5\cdots\cdots\cdots(2)\\
2x_3+3x_2+x_1&=5\cdots\cdots\cdots(3)
\end{aligned}
$$

와 같이 고쳐 놓는다. 지금 (2)—(1)×$\frac{5}{7}$, (3)−(1)×$\frac{2}{7}$를 하면

$$\frac{1}{7}x_2-\frac{1}{7}x_1=\frac{5}{7}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(4)$$

$$\frac{13}{7}x_2+\frac{1}{7}x_1=\frac{23}{7}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(5)$$

를 얻는다. 方程式 (4), (5)에서

$$\frac{13}{7}x_2+\frac{1}{7}x_1=\frac{23}{7}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(6)$$

$$\frac{1}{7}x_2-\frac{1}{7}x_1=\frac{5}{7}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

을 얻고 (7)—(6)×$\frac{1}{13}$을 하면

$$-\frac{14}{13}x_1=\frac{42}{13}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8)$$

를 얻는다. 그러므로

$$7x_3+4x_2+3x_1=6$$
$$\frac{13}{7}x_2+\frac{1}{7}x_1=\frac{23}{7}$$
$$-\frac{14}{13}x_1=\frac{42}{13}$$

을 얻는다. 이것으로 부터

$$x_1=-3,\quad x_2=2,\quad x_3=1$$

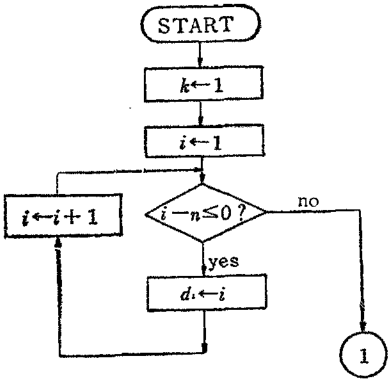
을 얻는다.

**例 4.** 앞의 例에서와 같은 方法으로 聯立方程式

$$a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots\cdots+a_{1n}x_n=a_{1n+1}$$
$$a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots\cdots+a_{2n}x_n=a_{2n+1}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$a_{n2}x_1+a_{n2}x_2+\cdots\cdots+a_{nn}x_n=a_{nn+1}$$

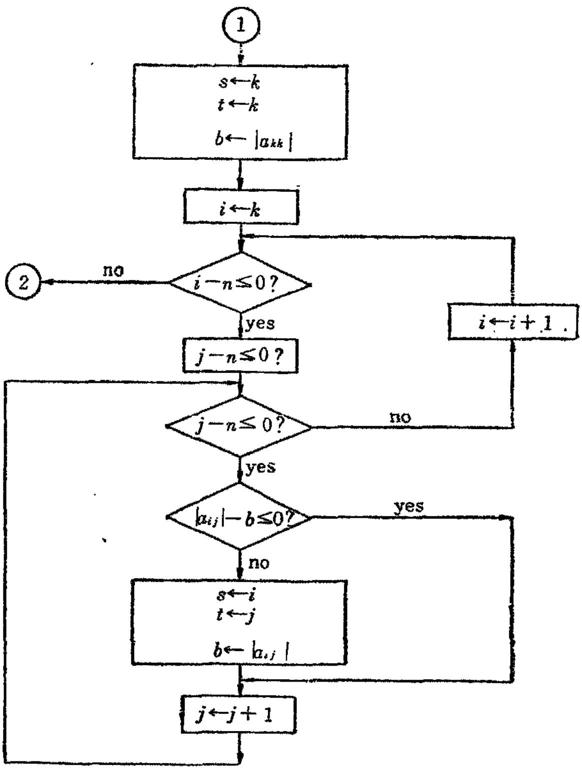
을 풀어 보자. 未知數의 消去手法은 例 2에서의 行列式의 三角化의 것과 꼭 같다. 다만 여기서 자세히 알아 보아야 하는 것은 係數中 그 絶對値가 最大인 것을 찾아 내는 일, 方程式과 未知數의 順序를 바꾸는 일, 消去된 未知數가 어느 것인가를 알아 두는 일, 未知數가 消去된 後 解를 구하는 일들이다.

다음의 Flow Charl는 이들 각 절차를 설명하고 있다.



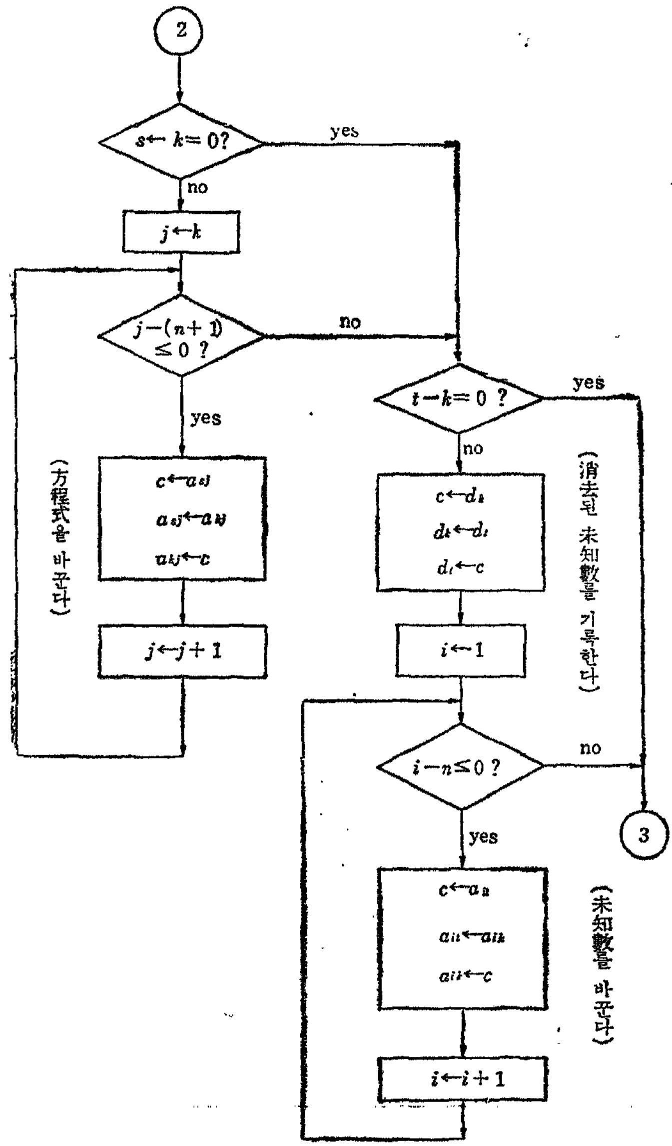

$d_i$는 어떤 未知數가 消去됐는지를 알아 두기 위하여 使用될 것이다.

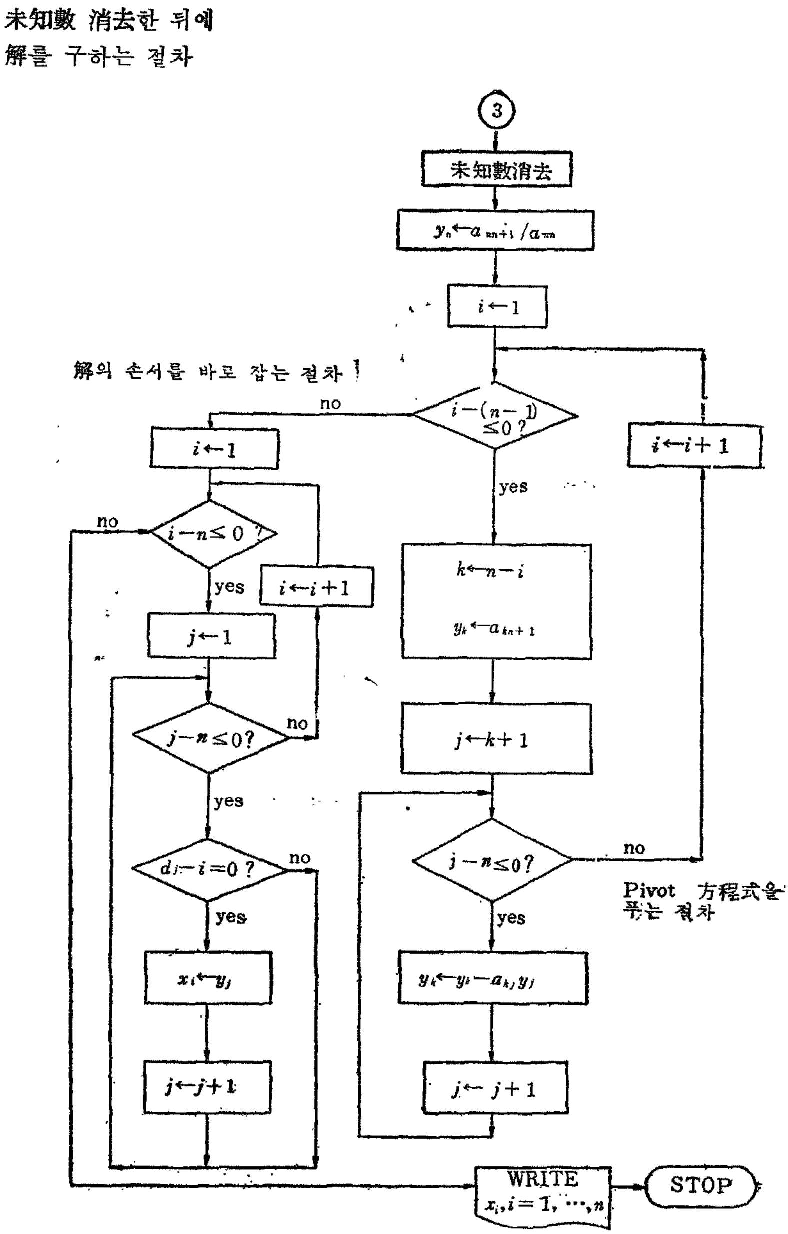
係數中 最大인 것을 구하는 절차



係數가 最大인 項이 (1, 1) 位置에

오게 하는 절차




未知數 消去한 뒤에
解를 구하는 절차
3
未知數消去
$y_n \leftarrow a_{n n+1}/a_{nn}$
$i \leftarrow 1$
解의 손서를 바로 잡는 절차
$i-(n-1) \leq 0$ ?
no
yes
$i \leftarrow i+1$
$i \leftarrow 1$
$i-n \leq 0$ ?
no
yes
$i \leftarrow i+1$
$j \leftarrow 1$
$j-n \leq 0$ ?
no
yes
$d_j-i=0$ ?
no
yes
$x_i \leftarrow y_j$
$j \leftarrow j+1$
$k \leftarrow n-i$
$y_k \leftarrow a_{k n+1}$
$j \leftarrow k+1$
$j-n \leq 0$ ?
no
yes
Pivot 方程式을
푸는 절차
$y_k \leftarrow y_k - a_{kj} y_j$
$j \leftarrow j+1$
WRITE
$x_i, i=1, \cdots, n$
STOP

지금까지의 內容을 科學硏究에서 널리 使用되는 **FORTRAN** 語로 記述하여 소위 SUBROUTINE 形式으로 쓰면 다음과 같다.

```
      SUBROUNTINE GAUELI (AA, N, BB, X)
      DIMENSION AA(20,20),BB(20), A(20, 21),Y(20), X(20), ID(20)
      NN=N+1
      DO 200 I=1, N
      A(I, NN)=BB(I)
      DO 200 J=I, N
  200 A(I, J)=AA(I, J)
      K=1
    1 CONTINUE
      DO 21 I=1, N
   21 ID(I)=I
    2 CONTINUE
      KK=K+1
      IS=K
      IT=K
      B=ABSF (A(K, K))
      DO 3 I=K, N
      DO 3 J=K, N
      IF(ABSP(A(I, J))-B)3, 3, 31
   31 IS=I
      IT=J
      B=ABSF(A(I, J))
    3 CONTINUE
      IF (IS-K) 4, 4, 41
   41 DO 42 J=K, NN
      C=A(IS, J)
      A(IS, J)=A(K, J)
   42 A(K, J)=C
```

```
 4  CONTINUE
    IF(IT-K)5, 5, 51
51  IC=ID(K)
    ID(K)=ID(IT)
    ID(IT)=IC
    DO 52 I=1, N
    C=A(I, IT)
    A(I, IT)=A(I, K)
52  A(I, K)=C
 5  CONTINUE
    IF(A(K, K))6, 102, 6
 6  CONTINUE
    DO 7 J=KK, NN
    A(K, J)=A(K, J)/A(K, K)
    DO 7 I=KK, N
    W=A(I, K)*A(K,J)
    A(I, J)=A(I, J)-W
    IF(ABSF(A(I, J)-.0001*ABSF(W))71, 7, 7
71  A(I, J)=0.
 7  CONTINUE
    K=KK
    IF(K-N)2, 81, 102
81  IF(A(N, N))8, 102, 8
 8  CONTINUE
    Y(N)=A(N, NN)/A(N, N)
    NM=N-1
    DO 9 I=1, NM
    K=N-1
    KK=K+1
    Y(K)=A(K, NN)
```

```
      DO 9 J=KK, N
      Y(K)=Y(K)-A(K, J)*Y(J)
    9 CONTINIUE
      DO 10 I=1, N
      DO 10 J=1, N
      IF(ID(J)-I)10, 101, 10
  101 X(I)=Y(J)
   10 CONTINUE
      RETURN
  102 PRINT 1000
      RETURN
 1000 FORMAT(19H NO UNIQUE SOLUTION)
      END
```

서 울 大 學 校