Bull. Korean Math. Soc Vol. 6(1969). 1—9

無限次元 C^r 多樣體에 關하여

辛 龍 泰

序論. 本題에 관하여 이번 機會에 討論하고자 하는 것은 無限次元 C^r 多樣體의 定義부터 始作해서 두 개의 無限次元 多樣體 X와 Y에 대하여 X에서 Y에로 가는 C^r 寫像 $f: X \to Y$ 全體의 集合 $\mathscr{C}^r(X, Y)$에 어떤 方法으로 微分可能構造를 주어서 $\mathscr{C}^r(X, Y)$를 한 개의 無限次元 多樣體로 認定할 것인가 하는 것이다. 이와 같이 決定되는 多樣體 $\mathscr{C}^r(X, Y)$는 그 應用範圍가 相當히 넓으며, 이에 對한 硏究도 相當히 活潑한 것으로 알려져 있다. 여기에서 論하는 方法은 R. Palais 교수의 高見을 書翰往來를 通하여 얻은 S. Smale 교수가 開拓한 方法인데 그가 1963 年度 Columbia 大學校에서 講義한 微分位相學에 나타난 것이다. 끝으로 한 應用分野로서 埋藏(embedding)에 관한 硏究問題를 提示하였다.

1. Fréchet 微分法. A를 任意의 集合, F를 norm이 주어진 한 線型空間이라 하고, $B(A, F)$를 A에서 F로 가는 有界函數의 集合으로서 norm이

$$\|u\| = \operatorname*{Sup}_{x \in A} \|u(x)\|$$

와 같이 定義된 norm 線型空間을 表示하는 것으로 하자. 萬若 集合 A가 한 位相空間일 때는 $\mathscr{C}^\circ(A, F)$를 A에서 F에로 가는 有界連續함수들의 集合으로 위와 같은 方法으로 定義된 norm으로써 norm 線型空間을 表示하는 것으로 하자.

定理 1. 萬若 F가 한 Banach 空間이면 $B(A, F)$와 $\mathscr{C}^\circ(A, F)$도 또한 Banach 空間이 된다.

E_i와 F를 모두 Banach 空間이라 하자. $i=1, \cdots\cdots, n$. 그리고 $f: \prod_{i=1}^{n} E_i \longrightarrow F$ 라 하자. f가 **有界**라 함은 한 陽의 實數 K가 存在하여 모든 $(x_1, \cdots\cdots, x_n) \in \prod_{i=1}^{n} E_i$ 에 대하여

$$\|f(x_1, \cdots\cdots, x_n)\| \leq K \prod_{i=1}^{n} \|x_i\|$$

임을 말한다.

定理 2. $f: \prod_{i=1}^{n} E_i \longrightarrow F$ 를 한 n 線型函數라 하자. f가 連續이 될 必要充分조건은 f가 有界인 것이다.

系. $\prod_{i=1}^{n} E_i (E_i = E)$에서 F로 가는 連續 n-線型寫像 全體로 이루어진 線型空間 $L_n(E, F)$는

$$\|u\| = \operatorname*{Sup}_{\|x\|=1} \|u(x)\|$$

와 같이 定義된 norm 으로써 한 Banach 空間을 이룬다.

앞으로 E, F, G 等은 Banach 空間을 表示하기로 하자.

U를 E의 한 開部分集合이라 하자. 두 개의 連續寫像 f, $g: U \to F$가 한점 $x_0 \in U$에서 서로 接한다 함은

$$Q(x) = \begin{cases} \dfrac{\|f(x) - g(x)\|}{\|x - x_0\|}, & x \neq x_0 \text{ 때} \\ 0 \quad , & x = x_0 \text{ 때} \end{cases}$$

와 같이 定義된 實函數 $Q: U \to R$가 x_0 點에서 連續임을 말한다.

註. 1) f와 g가 x_0에서 서로 接하면 $f(x_0) = g(x_0)$를 얻는다.
2) f와 g가 x_0에서 서로 接한다고 하는 關係는 相等關係이다.

記號. A를 E의 任意의 部分集合이라 하자. 또 $f: A \to F$라 하자. 한 線型寫像 $L: E \to F$와 한 點 $x_0 \in A$에 한 寫像 $\alpha_f(x_0, L): U \to F$를 對應시키는데 이 對應되는 寫像 $\alpha_f(x_0, L): U \to F$는 $\alpha_f(x_0, L)(x) = f(x_0) + L(x - x_0)$와 같이 定義되었다고 하자.

定理 3. U를 E內의 한 開部分集合이라 하자. 만일 $f: U \to F$가 連續이고 $x_0 \in U$이라 하면 $\alpha_f(x_0, L)$와 f가 x_0에서 서로 接하는 線型寫像 $L: E \to F$는 많아야 한 개 뿐이다. 따라서 存在한다면 L는 唯一하다.

U를 E內의 한 開部分集合이라 하자. 한 寫像 $f: U \to F$가 $x_0 \in U$ **에서 (Fréchet) 微分可能**이라 함은 한 線型寫像 $L: E \to F$가 存在하여 f와 $\alpha_f(x_0, L)$가 x_0에서 서로 接함을 意味한다. 이 때의 唯一한 線型寫像 L를 x_0 **에서 取한 f의 (Fréchet)導函數**라 하고 記號로 $L = Df(x_0)$, $f'(x_0)$ 等으로 表示한다. 만일 f가 U內의 모든 點 f에서 微分能이면 f는 **U에서 微分可能**이란 말을 쓴다. 그리고 函數 $Df: U \to L(E, F)$; $x \to Df(x)$를 **f의 導函數**라 한다.

註. x_0에서 微分可能

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x) - \alpha_f(x_0, L)(x)\|_F}{\|x - x_0\|_E} = \lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)\|_F}{\|x - x_0\|_E} = 0.$$

萬若 $f: U \to F$ 가 U 에서 連續이고 또 微分可能이고, 나아가서 $D: f \equiv D(D^{i-1}f)$가 또한 모든 $i=1, \cdots\cdots, r-1$ 에 대해서 U 에서 連續이고 微分可能이면 函數 $D^r f: U \to L_r(E, F)$를 **f 의 r 階次 導函數**라고 한다. 한 寫像 $f: U \to F$ 가 **C^r 級**이라 함은 모든 $i=0, 1, \cdots\cdots, r$ 에 대하여 i-階次 導函數가 U 에서 定義되어 있고, 連續이고, 또 有界임을 意味한다. U 에서의 모든 C^r 級 寫像全體의 集合을 $\mathscr{C}^r(U, F)$로 表示한다. 따라서 $\mathscr{C}^r(U, F)$는 한 Banach 空間, $0 \leq r \leq \infty$ 인데 이 때의 norm 은 C^r sup. norm 이라 해서

$$\|f\|_r = \operatorname*{Sup}_{u \in U} \sum_{i=0}^{r} \|D^i f(u)\|,$$

단 $D^0 f = f$, $\|D^i f(u)\| = \operatorname*{Sup}_{\|u\|=1} \|D^i f(u)(t)\|$, $i > 0$ 와 같이 定義된 norm 을 取하는 것으로 한다.

2. 微分可能 多樣體와 寫像. S 를 한 Hausdorff 空間이라 하자. S 上의 한 **chart** 라 함은 어떤 셋메(U, φ, E)를 말하는 것이다. 다만, U 는 S 의 한 開部分集合이고, $\varphi: U \to E$ 는 Banach 空間 E 의 한 開部分集合에로의 位相同型 寫像이다. S 上의 **C^r atlas** 라 함은 S 上의 chart 들의 한 모임 $\mathcal{U} = (U_i, \varphi_i, E_i)$를 말한다. 다만 $\{U_i\}$는 S 를 덮어야 하고 또 모든 i, j 에 대하여

$$\varphi_j{}^0 \varphi_i{}^{-1}: \varphi_i(U_i \cap U_j) \longrightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

는 C^r 級同型(即 C^r 級이고 또 C^r 級의 逆寫像을 갖임)이라야 한다.

두 개의 C^r atlas 는 그들의 集合的和가 또한 C^r atlas 일 때 **C^r 級相等**이라고 한다. 한 C^r 級 相等組를 S 上의 **C^r 構造**라 한다.

한 **C^r 級 多樣體**라 함은 한 双 $X = (S, \mathcal{U})$를 말하는 것인데 다만 $\mathcal{U}$ 는 S 上의 한 C^r 構造를 가르킨다.

註. 萬若 X 가 連結 C^r 級 多樣體이면 $E_i \cong E$ 가 모든 i 에 대해서 성립하는 한 Banach 空間 E 가 存在하는데 이 때 X 를 E **上에서 模造된 C^r 級多樣體**라고 한다.

X 와 Y 를 C^r 級 多樣體라 하고 $f: X \to Y$ 라 하자. X 의 한 C^r atlas$\{(U_i, \varphi_i, E_i)\}$와 Y 의 한 C^r atlas$\{(V_j, \phi_j, F_j)\}$가 存在하여 모든 i, j 에 관해서

$$f_{ji}' = \phi_j \circ f \circ \varphi_i{}^{-1}: \varphi_i(U_i \cap f^{-1} V_j) \longrightarrow \phi_j V_j$$

가 Fréchet 微分法의 뜻에서 C^r 級寫像이면 f 를 **C^r 級寫像**라 한다. f 가 C^r 級이고 또한 C^r 級의 連寫像을 갖으면 f 를 **C^r 級同型**이라고 한다. X 에서 Y 에로 가는 모든 級寫像의 集合을 $C^r \mathscr{C}^r(X, Y)$로 表示하기로 하자.

이 集合 $\mathscr{C}^r(X, Y)$에 어떠한 方法으로 한 微分可能構造가 導入될 수 있을 것

인가에 대해서 한 一般的인 方法을 이에 말하고 그 다음에 具體的으로 한 標準構造를 建設하는 方法을 招介할 것이다.

$\mathscr{C}^r(X, Y)$의 한 部分集合 m이 한 C^r 級多樣體로서 evaluation 寫像 $ev: M\times X\to Y$, $(f, x)\to f(x)$이 C^r 級이면 M를 X에서 Y에로의 **寫像의 C^r 級多樣體**라 한다.

위와 같은 定義가 과연 뜻이 있는 것인가 나아가서 이러한 多樣體가 存在하는가 하는 問題를 解決해 주는 한 適切한 方法은 所謂 $\mathscr{C}^r(X, Y)$의 C^s 級標準構造를 例示하는 길인데 이는 S. Smale 교수와 R. Palais 교수들에 의하여 開拓된 것이다.

이에 대한 例示를 위하여 우선 다음 事項을 參酌하여야 할 것이다.

3. Banach bundle. 한 **局所的 Banech bundle**이라 함은 한 셋떼 $\pi\equiv(U\times E, U, \pi)$ 또는 한 寫像 $\pi: U\times E\to U$를 가르키는 것인데, 다만 U는 한 Banach 空間 E의 한 開部分集合이고 $\pi: U\times E\to U$는 第一因子에 對한 正射寫像이다. $\pi\equiv(U\times E, U, \pi)$와 $\rho\equiv(V\times F, V, \rho)$를 어떤 두 개의 局所的 Banach bundle이라 하자. 한 **C^r 級 局所的 bundle 寫像**이라 함은 C^r 級寫像들의 한 双 (f, f_B)를 가르키는 것인데, 다만 다음의 조건들을 心要로 한다.

即

(i) diagram

$$\begin{array}{ccc} U\times E & \xrightarrow{f_B} & V\times F \\ \pi\downarrow & f & \downarrow\rho \\ U & \longrightarrow & V \end{array}$$

가 交換的이라야 한다. (即 $\rho\circ f=f_B\circ\pi$)

(ii) 모든 $u\in U$에 對하여 $f|\pi^{-1}(u)$는 한 連續線型寫像이어야 한다.

끝으로

(iii) $f^*: U\to L(E, F)$, $u\to f|\pi^{-1}(u)$, C^r가 한 C^r 級 寫像이어야 한다.

한 **C^r 級 Banach bundle**이라 함은 셋떼 $\pi\equiv(X, X_B, \pi)$, 또는 寫像 $\pi: X\to X_B$를 가르키는데 다만 X와 X_B는 C^r 多樣體이고 $\pi: X\to X_B$는 한 C^r 級寫像으로서 다음의 조건들을 만족하는 X_B의 C^r atlas $\mathfrak{U}_B=\{(U_\alpha, \varphi_\alpha, E_\alpha)\}_{\alpha\in A}$와 X의 C^r atlas $\mathfrak{U}=\{\pi^{-1}(\Omega_\alpha), \phi_\alpha, E_\alpha\times F_\alpha)\}_{\alpha\in A}$가 存在하여야 한다.

即

(i) $\operatorname{Im}\phi_\alpha=\varphi_\alpha(U_\alpha)\times F_\alpha,\ \alpha\in A$

(ii) 모든 $(\alpha,\ \beta)\in A\times A$에 대하여 $(\phi_\beta\circ\phi_\alpha^{-1},\ \varphi_\beta\circ\varphi_\alpha^{-1})$는 한 C^r 級局所的 Bundle 寫像이어야 한다.

이러한 경우에 이 寫像은 다음 diagram을 交換시킴을 알 수 있다. 즉

$$\begin{array}{ccccc}
\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta)\times F_\alpha & \xrightarrow{\phi_\alpha^{-1}} & \pi^{-1}(U_\alpha\cap U_\beta) & \xrightarrow{\phi_\beta} & \varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta)\times F_\beta \\
{\scriptstyle p_\alpha}\downarrow & & {\scriptstyle \pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle p_\beta} \\
\varphi_\alpha(U_\alpha\cap U_\beta) & \xrightarrow{\varphi_\alpha^{-1}} & U_\alpha\cap U_\beta & \xrightarrow{\varphi_\beta} & \varphi_\beta(U_\alpha\cap U_\beta),
\end{array}$$

단 p_α, p_β는 標準的正射들이다.

特히 위와 같은 $\mathcal{U}$를 **bundle atlas**라 하고 각 chart$(\pi^{-1}(U_\alpha),\ \phi_\alpha,\ E_\alpha\times F_\alpha)$를 한 **局所的 bundle chart**라 하며, X를 **全空間** 또는 **bundle 空間**이라 하고 X_B를 **基空間**이라 한다. 각 $x\in X_B$에 대하여 $\pi^{-1}(x)$를 x上의 **fibre**라 한다.

$\pi: X\to X_B,\ \rho: Y\to Y_B$를 각각 C^r 級 Banach bundle이라 하자. π에서 ρ에로의 한 **C^r 級 bundle 寫像**이라 함은 다음 조건을 만족하는 C^r 級寫像들의 한 双$(f,\ f_B)$를 가르킨다. 即 diagram

$$\begin{array}{ccc}
X & \xrightarrow{f} & Y \\
{\scriptstyle \pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \rho} \\
X_B & \xrightarrow{f_B} & Y_B
\end{array}$$

가 交換的이라야 하고 또 局所的 bundle chart들을 通하여 誘導되는 局所的 Banach bundle들 사이의 寫像이 C^r 級 局所的 bundle 寫像이어야 한다.

接 bundle 空間 $T(X)$에 대하여 다음 定理는 有力한 것이다.

定理 4. X를 C^{r+1} 多樣體라 하자. 寫像 $\tau: T(X)\to X$가 $\tau|T_x(X)$이 恒等寫像으로 그 값이 x와 같게 定義된 경우 $\tau\equiv(T(X),\ X,\ \tau)$는 한 C^r 級 Banach bundle이 된다. 이것을 **接 bundle**이라 한다.

4. 切斷들의 空間. $\pi: X\to X_B$를 한 C^r 級 Banach bundle이라 하자. π의 **C^r 級切斷**이라 함은 C^r 級寫像 $\gamma: X_B\to X$로서 $\pi\circ\gamma=1_{X_B}$를 만족하는 γ를 가르켜 하는 말이다. $\Gamma^r(\pi)$는 π의 모든 C^r 級 切斷全體로서 이로어지는 各 fibre에서 誘導되는 線型構造를 갖는 vector 空間을 表示하는 것으로 하자.

以下 X_B를 compact 空間이라 가정하자.

$(U_i,\ \varphi_i,\ E_i)\}_{i\in A}$, A는 有限을, X_B의 한 atlas로 하고, $\phi_i: \pi^{-1}U_i\to V_i\times F_i$라 하고, K_i를 U_i의 compact 部分集合이라 하고, 그리고 $\{K_i\}_{i\in A}$를 X_B의

한 Covering 으로 하는 有限個의 넷떼 $\mathfrak{U}=\{K_i,\ U_i,\ \varphi_i,\ \phi_i)\}$를 π의 한 norm atlas 라 한다.

萬若 $\gamma\epsilon\Gamma^r(\pi)$이면 γ_i는 다음과 같이 誘導된 居所的 bundle의 切斷을 나타내는 것으로 하자.

卽

$\gamma_i=\phi_i\circ\gamma\circ\varphi_i^{-1}|\varphi_iK_i$, 단 φ_iK_i의 γ_i에 依한 像은 $\varphi_iK_i\times F_i$內에 있음. 지금 $p_i: V_i\times F_i\to F_i$를 第二因子에 관한 正射寫像이라 하면 π가 C^r級이므로

$$p_i\circ\gamma_i\,\epsilon\,\mathscr{C}^r(\varphi_iK_i,\ F_i)$$

이고 $\mathscr{C}^r(\varphi_iK_i,\ F_i)$는 C^r norm $\|\ \|_i$를 갖는다. 다시 여기서 定義하기로

$$^i\|\gamma\|_\alpha=\|p_i\circ\gamma_i\|_i$$

그리고
$$\|\gamma\|_\alpha=\operatorname*{Sup}_{i\epsilon A}{}^i\|\gamma\|_\alpha$$

와 같이하면 다음의 結果를 얻는다. 卽

定理 5. 萬若 $\mathfrak{U}$와 $\mathfrak{U}'$가 $\pi: X\to X_B$의 norm atlas 들이고 X_B가 compact면

(i) $\|\ \|_\alpha$는 $\|\ \|\Gamma^r(\pi)$에 대해서 한 norm이 된다.

(ii) $\|\ \|_\alpha$와 $\|\ \|_{\alpha'}$는 서로 相等 *norm*이다.

(iii) $(\Gamma^r(\pi),\ \|\ \|_\alpha)$는 한 Banach 空間이다.

5. Pull-back bundle. $f: X\to Y$를 한 C^r級寫像, $\pi: P\to Y$를 한 C^r級 Banach bundle이라 하자.

집합 $f^*(P)=\{(x,\ y)\,\epsilon\, X\times P: f(x)=\pi(y)\}$에 대하여 $f^*(\pi): f^*(P)\to X$와 $\pi^*(f): f^*(P)\to P$를 각각 第一 및 第二因子에서의 正射寫像이라 하자. 여기서 다음의 所謂 universal theorem은 重要한 것이다.

定理 6. f와 π를 위와 같이 놓자.

$f^*(\pi)\equiv(f^*(P),\ X,\ f^*(\pi))$는 한 C^r級 Banach bundle이고, 寫像의 双$(\pi^*(f),\ f)$는 C^r級 bundle 寫像이다. 그리고 π로 가는 任意의 bundle 寫像은 $f^*(\pi)$를 한 因子로 唯一하게 分解된다.

이 定理의 diagram的 表示는 다음과 같다.

$$\begin{tikzcd}
f^*(P) \arrow[rr, "\pi^*(f)"] \arrow[dd, "f^*(\pi)"'] & & P \arrow[dd, "\pi"] \\
& \rho \arrow[ul, dashed] \arrow[ur, "g"] \arrow[d] & \\
X \arrow[rr, bend right, "f"'] & Z \arrow[l, dashed] \arrow[r, "g_B"] & Y
\end{tikzcd}$$

다만 $\rho: Q\to Z$ 는 任意의 C^r 級 Banach bundle 이고 $(g_1 g_B)$는 ρ에서 π에로 가는 임의의 bundle 寫像다

6. Exponential 寫像. 한 C^r 多樣體 X에 대하여 $\tau_X: T(X)\to X$ 와 $\tau^2_X: T^2(X)\equiv T(X))\to T(X)$를 각각 X와 $T(X)$上의 接 bundle 이라 하자.

한 切斷 $\xi\epsilon\Gamma(\tau^2_X)\cap\Gamma(T^\tau_X)$가 모든 $v\epsilon T(X)$와 $\lambda\epsilon R$에 대하여 $\xi(\lambda v)=\lambda Th_\lambda(\xi(v))$를 만족하면 X上의 **spray** 라고 불리운다. 다만 $h_r: T(X)\to T(X)$는 $v\to\lambda v$의 對應으로 定義된다. 即 diagram 으로는

$$\begin{array}{ccc} T^2(X) & \xrightarrow{Th_\lambda} & T^2(X) \\ \xi\uparrow & & \uparrow\xi \\ T(X) & \xrightarrow{h_\lambda} & T(X) \end{array}$$

가 交換的이다.

X上의 한 spray ξ와 한 點 $v\epsilon T(X)$에 있어서의 ξ의 한 解 $\alpha_v(t)$에 대하여 D를 $T(X)$의 部分集合으로서 $\alpha_v(1)$이 定義될 수 있는 v全體의 集合을 表示하기로 하자.

ξ의 **exponential 寫像**이라 함은 寫像 $\exp^\xi D\to X$를 가르키는 것인데, 다만 $\exp^\xi$는 $v\to\tau_X(\alpha_v(1))$와 같은 對應으로 定義된 것이다. 그리고 D에서 $X\times X$에라 가는 寫像으로서 $v_x\to(x,\ \exp^\xi(x))$와 같. 定義된 것은 $E_{xp}{}^\xi$로 表示하기로 한다. 即 $E_{xp}{}^\xi=(\tau_X, \exp^\xi)$이다. 따라서 多樣體 X가 C^{r+2}, $r\geq 1$ 級이면 寫像 $E_{xp}{}^\xi$는 C^r 級임을 알 수 있다.

定理 7. X를 compact C^r 多樣體 $r\geq 1$라 하고 Y를 C^{r+s+2} 多樣體로서 微分可能單位分割을 容納하는 것이라고 가정하자. ξ를 Y上의 한 C^{r+s} 級 spray 라 하면 $T(Y)$內에 Y上의 零切斷의 한 近. D_ξ와 $Y\times Y$內에 對角線의 한 近傍 F_ξ가 存在하여 $E_{xp}{}^\xi|D_\xi: D_\xi\to F_\xi$가 C^{r+s} 級 同型일 수 있다.

7. 標準 atlas 로써의 多樣體. X와 Y를 각각 위의 定理 7에서와 같은 가정 밑에 두고, $f: X\to Y$를 C^r 級 寫像이라 하자.

$f^*T(Y)$를 f에 의한 $T(Y)$의 pull-back bundle 이라 하자. 따라서 $X\times Y$ 內의 graph(f)의 한 적당한 近傍을 $G_{f,\xi}$라 놓을 때 定理 7의 結果에 의하여 한 C^{r+s} 級 同型寫像 $\xi_f\equiv f^*E_{xp}{}^\xi: f^*D_\xi\to G_{f,\xi}$를 연을 수 있다. 萬若 $U_{f,\xi}$로 하여금 graph(g)가 $G_{f,\xi}$에 包含될 수 있는 모든 $g\epsilon\mathscr{C}^r(X,\ Y)$의 집합을 表示하는 것으로 하면 $(U_{f,\xi}, \varphi_{f,\xi}, \Gamma^r(f^*(\tau_Y))$는 $\mathscr{C}^r(X,\ Y)$內에서 點 f에서의 한

chart가 된다. 다만 $\varphi_{f,\xi}: U_{f,\xi}\to\Gamma^r(f^*(\tau y))$는 $g\to\xi^{-1}{}_f\circ\mathrm{graph}(g)$와 같은 對應으로서 定義되어 있으며, $\Gamma^r(f^*(\tau y))$는 定理 5에 의하여 X가 compact라 가정했으므로 한 Banach 空間이다. 이와 같이 定義되는 셋째 $(U_{f,\xi}, \varphi_{f,\xi}, \Gamma^r(f^*(\tau y)))$를 點 f에서의 $\mathscr{C}^r(X, Y)$에 대한 **한標準 chart**라 하고 이러한 chart 들의 最大의 모임을 $C^r(X, Y)$에 대한 **標準 atlas**라 한다.

定理 8. 萬若 X가 한 compact C^r 多樣體이고 Y가 한 C^{r+s+2} 多樣體로서 微分可能單位分割은 容納하는 것이라면 $\mathscr{C}^r(X, Y)$에 대한 標準 atlas는 $\mathscr{C}^s$ 級이다.

系. 萬若 X가 한 compact C^r 多樣體이고 H가 可分 Hilbert 空間이면 $C^r(X, H)$에 대한 標準 atlas는 C^r 級이다. 따라서 $C^r(X, H)$는 한 C^r 多樣體로 간주될 수 있다.

8. 埋藏問題에 관한 硏究方向. X와 Y를 定理 8에서와 같이 가정하자. $\mathscr{I}^r(X, Y)$와 $\varepsilon^r(X, Y)$를 각각 X에서 Y에로 가는 C^r 級寫像의 全體 $\mathscr{C}^r(X, Y)$의 部分集合으로서 $f\in C^r(X, Y)$가 immerision인 것 全體와 embedding인 것 全體의 集合들이라 할 때 (Cf. 筆者의 On a generalization의 Whitney's Embedding Theorem for a case of infinite dimensional manifolds, 本會報) $\mathscr{I}^r(X, Y)$ 또는 $\varepsilon^r(X, Y)$의 $\mathscr{C}^r(X, Y)$ 內에서의 狀態는 相當히 重要視될 만하다.

가령 $C^r(X, Y)$에 標準 atlas을 첨가해서 생각하는 C^s 多樣體에 관하여 $\mathscr{I}^r(X, Y)$ 또는 $\varepsilon^r(X, Y)$가 어떤 경우에 開部分集合들이 될 수 있을 것이며, 더 나아가서 이들이 dense가 될 수 있을 것인가 하는 問題는 難問題이며 또 重要視되는 問題이다.

特히 $\mathscr{I}^r(X, H)$ 또는 $\varepsilon^r(X, H)$가 $\mathscr{C}^r(X, H)$에 있어서 標準 atlas로 決定되는 構造에 관하여 空集合이 아님은 증명된 바인데 [5], [6] 과연 open이겠는가 또는 dense이겠는가 하는 問題는 어느 程度 진척이 있을 법도 하다.

參 考 文 獻

1. R. Abraham, *Lectures of Smale on differential topology,* Columbia University (1963).
2. J. A. Dieudonné, *Foundations of mordern analysis,* Academic (1960).
3. S. Lang, *Introduction to differentiable manifolds,* Interscience (1966).

4. J. Mc Alpin, *Infinite dimensional manifolds and Morse Theory*, Ph.D. Thesis, Columbia University (1965).
5. L.S. Pontrijagin, *Smooth manifolds and their application in homotopy theory*, A.M.S. Translations, 11(1964), pp.1—114.
6. Y.T. Shin, *On a generalization of Whitney's Embedeling Theorem for a case of infinite dimensional manifolds*, To be appeared in Sung Kyun Kwan University Journal, Vol.14 (1969).
7. H. Whitney, *Differentiable manifolds*, Ann. of Math. 37(1936).

忠南大學校