技術解說

시그널 푸로우 그라프에 의한 마이크로波 回路解析

李 文 基 *

1. 서 론

시그널 푸로우 그라프(signal flow graph)는 오늘날 회로망 해석 방법중 가장 편리한 방법의 하나이다[(1)-(3)]. 이 방법은 회로망 내의 신호의 흐름 혹은 변수사이의 관계를 점과 선으로 표시하므로 이들의 상호관계를 뚜렷히 나타내며 종래의 Matrix 방법과 달리 그라프 자체에서 간단한 조작에 의해 解를 비교적 쉽게 구할 수 있는 利點도 있다. 이 방법은 1953년 Mason이 선형회로에 적용시키기 위해 발전시킨 이래 회로망 해석은 물론 자동제어 분야에서도 유용하게 쓰여지고 있다[(4)-(6)].

특히 마이크로파 회로방정식을 산란계수로 표시하면 이에 해당되는 시그널 푸로우 그라프가 유익하게 된다[(7)].

왜냐하면 이들 회로를 종속결합시킨 계통의 푸로우 그라프는 각개 회로의 그라프를 결합시켜 원하는 해를 직접 구할 수 있게 되기 때문이다.

본문에서는 우선 푸로우 그라프의 정의, 용어해설 등을 기술한 후 귀찮은 非接루프法(Non touching loop rule)을 쓰지 않고 그라프자체의 조작으로 직접 해를 구하는 방법을 기술코자 한다.

또한 끝으로 이 방법을 적용하여 삽입손실 측정에 관한 문제를 취급했다.

2. 그라프의 정의 및 용어

시그널 푸로우 그라프를 그리는 방법을 예시하기 위해 아래와 같은 간단한 방정식을 생각해 보자

$$X_2 = t_{12} x_1 \qquad (1)$$

즉 X_1 X_2는 마디(node)를 나타내는 변수이고 t_{12}는 마디와 마디를 연결하는 지로(branch)의 이득 혹은 트랜스미턴스(transmittance)라 한다.

식 (1)의 그라프는 그림 1과 같다. 우선 그라프를 그리기 위해 마디 X_1과 X_2를 점으로 표시한 후 이득이 t_{12}인 지로를 X_1으로부터 X_2로 향하게 화살표로 그린다.

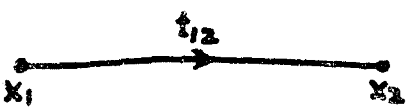

그림 1 $X_2 = t_{12} x_1$의 그라프

즉 이것은 X_2가 X_1의 종속변수임을 나타내고 신호의 흐름 방향을 지시한다. 따라서 이와 같은 그라프는 마디와 지로로 구성되지만 그 역할에 따라 각각의 명칭이 정해진다.

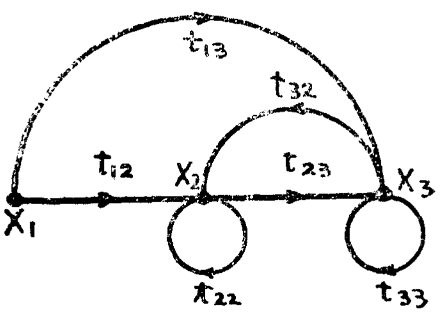

그림 2 연립방정식의 그라프

* 연세대학교 전자공학과

가령 방정식

$$X_2 = t_{12}x_1 + t_{22}x_2 + t_{32}x_3 \qquad (2)$$
$$X_3 = t_{13}x_1 + t_{23}x_2 + t_{33}x_3$$

를 나타내는 그림 2와 같은 그라프에서 각각의 명칭을 살펴 보면 다음과 같다.

입력마디 (Source node) : X_1과 같이 모든 신호가 흘러 나오는 마디.

출력마디 (Sink node) : 모든 신호가 흘러 들어오는 마디.

도전로 (Path) : 지로가 한개 혹은 그 이상 연결되어 신호의 통로가 된것

자기루프 (Self loop) : t_{33}나 t_{22}와 같이 한마디에서 나와 동일 마디로 들어가는 지로

궤환루프 (Feedback loop) : t_{32} t_{23}로 이루워진 도전로처럼 한개의 마디에서 나와 다시 그 마디로 들어가는 도전로

순방향도전로 (Forward path) : t_{12} t_{23}처럼 입력과 출력마디를 연결하는 도전로

3. 2단자, 4단자회로의 그라프

마이크로파 회로는 방정식을 산란계수로 표시한후 푸로우 그라프를 이용하여 해석하는 방법을 쓰면 매우 편리하다.

그림3(a)는 단자1,2로 들어가는 신호파의 진폭이 a_1, a_2이며 단자 1', 2'로부터 나가는 파의 진폭이 b_1, b_2인 4단자회로망을 나타낸다.

이 회로망에서 입사, 반사파의 관계는 아래와 같은 선형방정식으로 표시된다.

$$b_1 = S_{11}a_1 + S_{12}a_2 \qquad (3)$$
$$b_2 = S_{21}a_1 + S_{22}a_2$$

여기서

S_{11}은 단자 2—2'가 정합된 경우 즉 $a_2=0$일때 단자 1—1'에서의 반사계수 b_1/a_1,

S_{22}는 단자 1—1'가 정합된 경우 즉 $a_1=0$일때 단자 2—2'에서의 반사계수 b_2/a_2,

S_{12}는 단자 1—1'가 정합된 경우 즉 $a_1=0$일때 단자 2에서 단자 1에 이르는 전송계수 b_1/a_2,

그리고 S_{21}은 단자 2—2'가 정합된 경우 즉 $a_2=0$일때 단자 1에서 단자 2에 이르는 전송 계수 a_2/b_1을 각각 나타낸다.

두개의 독립변수 a_1, a_2를 포함한 4개의 마디로 이루워진 그라프를 2절의 방법으로 쉽게 그릴 수 있다.

그림3(b)가 4단자 회로망을 표시하는 그라프이다.

위와 마찬가지의 방법으로 여러가지 마이크로파 회로를 그라프로 나타내면 그림4와 같다.

그림4(a)는 반사계수가 Γ_L인 종단 혹은 부하

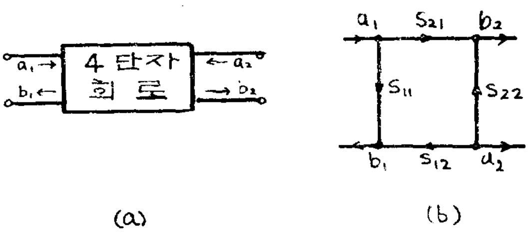

그림 3 4단자 회로망과 그의 그래프

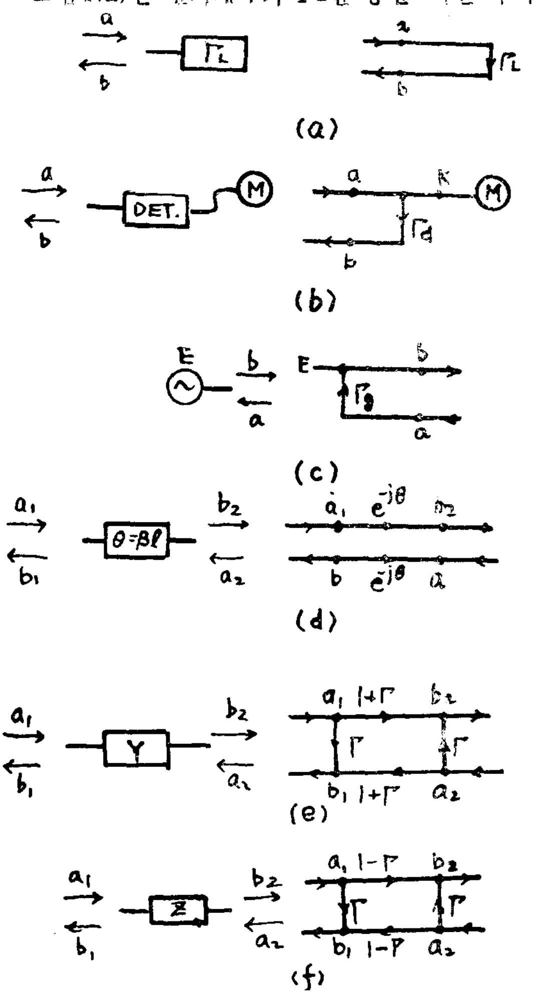

그림 4 마이크로파 회로소자의 그라프 표시

를 나타낸다.

그림4(b)는 검파기(그리스탈 혹은 바렉터)를 나타낸다. Γ_d는 검파기 반사계수이고 k는 메터 지시치 M과 실제 입사전력진폭의 비인 변환효율을 표시한다. 그림4(c)는 부정합 신호원을 나타낸다. 여기서 E는 정합시 진폭이고 Γ_g는 E가 零일때 반사계수이다.

그림4(d)는 무손실 선로를 나타내고 그림4(e)는 병열어드미턴스로 볼 수 있는 두 선로의 접점 혹은 탐침(Probe)를 나타낸다.

끝으로 그림4(f)는 직열임피던스를 표시한다.

그림4와 같은 각회로가 종속접속된 경우는 각회로의 푸로우 그라프를 종속접속시키면 된다.

즉 4단자 회로가 신호원과 부하에 그림5(a)처럼 종속접속된 경우 그라프는 그 각각의 그라프를 종속접속시킨 그림5(b)가 됨을 알 수 있다.

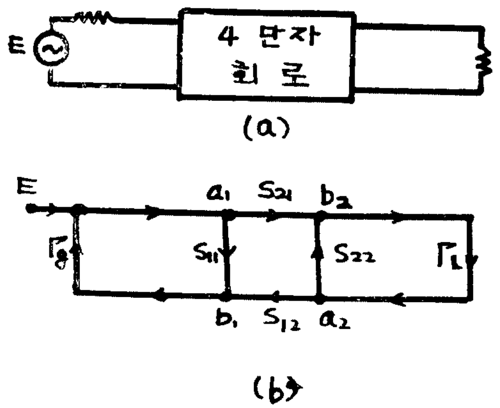

그림 5 신호원과 부하에 4단자회로가 연결된 경우

4. 푸로우 그라프의 Topological조작

푸로우 그라프를 작성하는 것은 단지 문제를 해결하는 한단계 일뿐 마디에서의 원하는 특정해를 구하는 문제에 결국 귀착된다.

따라서 본절에서는 복잡한 비접루프법을 이용하지 않는 그라프의 Topological조작에 대해 설명하고자 한다.

이 조작과정은 그라프 자체를 더욱더 간단히 전환시킴으로써 해가 자명해 지도록 하는 방법이다.

이 연속조작처리 과정은 다음과 같은 간단하고 알기 쉬운 4개의 법칙에 의거한다[8], [9].

※법칙 1;

오직 한개의 입력 및 출력 지로로 연결된(즉 직열지로로 연결된) 공통마디를 갖인 도전로는 각지로의 이득을 곱하면 단일지로로 전환된다.

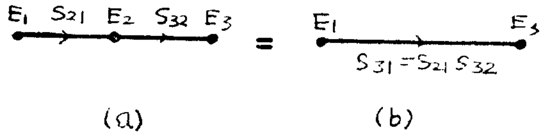

그림 6 직열지로의 합성

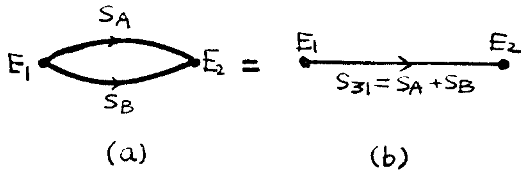

그림 7 병열지로의 합성

따라서 공통마디가 제거된다.

그림6에 법칙 1을 적용해 보자.

그림6(a)의 그라프는 연립방정식

$$E_2 = S_{21}E_1$$
$$E_3 = S_{32}E_2 \qquad (4)$$

를 표시한다.

식(4)의 윗식을 아래식에 대입하면

$$E_3 = S_{32}S_{21}E_1$$

가 된다. 즉 식(5)는 그림6(b)의 그라프를 나타낸다.

따라서 법칙1이 성립됨을 알 수 있다.

※법칙 2;

한 공통마디에서 다른 공통마디로 향하는 두개의 지로(즉 병렬지로)는 각지로의 이득을 합하면 단일지로로 전환된다. 그림7에서 법칙2를 증명해 보자 즉 그림7(a) 그라프에서

$$E_2 = S_A E_1 + S_B E_1 = (S_A + S_B)E_1 \qquad (6)$$

반면 그림7(b) 그라프에서는

$$E_2 = (S_A + S_B)E_1 \qquad (7)$$

즉 식(6), (7)에 의해 법칙2가 성립됨을 알수 있다.

※법칙 3;

마디 n에 이득이 Snn인 자기루프가 존재하면 이 마디에 유입되는 모든 지로의 이득을 1−Snn으로 나누면 자기루프는 제거된다.

그림8에서 자기루프를 제거시키는 방법을 살펴보자. 그림8(a)그라프의 식은

$$E_2=S_{21}E_1+S_{22}E_2 \tag{8}$$

$$E_3=S_{32}E_2 \tag{9}$$

식(8), (9)에서 E_1 함수로 E_2, E_3을 나타내면 식(10), (11)과 같고 이 식은 그림8(b)가 된다. 그러므로 법칙3이 성립됨을 알 수 있다.

$$E_2=\frac{S_{21}}{1-S_{22}}E_1 \tag{10}$$

$$E_3=S_{32}\frac{S_{21}}{1-S_{22}}E_1 \tag{11}$$

※법칙 4;

다음 각 경우에는 한개의 마디를 두개로 취급하여 그라프를 축소시킬 수 있다.

가) 단일 입력지로 〔그림9(a)〕
나) 단일 출력지로 〔그림9(b)〕
다) 공통마디의 직열접속 〔그림9(c)〕
라) 궤환루프 〔그림10(a)〕
마) 자기루프 〔그림10(b)〕

법칙4의 타당성은 그림 9,10 그라프에서 방정식을 세워 쉽게 증명할 수 있다.

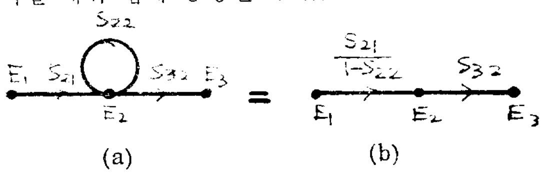

그림 8 자기루프의 제거

5. 그라프를 이용한 삽입손실과 오차 측정

시그낼 푸로우 그라프의 축소 조작 방법을 적용하여 피측기기 삽입손실 측정과 신호원과 부하(이 경우 검파기) 부정합에 의한 오차 문제를 해석해 보고자 한다.

삽입손실은 피측기기를 완전히 정합된 선로에 삽입한 경우와 삽입 안한 경우에 검파출력의 비룰써 정의된다[10].

그림11(a)와 (c)가 피측기기를 삽입한 경우와 안한 경우의 계통도를 각각 나타낸다.

그림11(b)는 그림11(a)의 그라프를 표시하고 그림11(c)의 그라프는 그림11(d)와 같다. 그림11(d)에서 T가 피측기기의 전력흡수와 반사에 의한 손실을 나타낸다. 여기서 Γ_g, Γ_d, Γ_1, Γ_2와 T는 복소량이다. 완전 정합된 선로인 경우

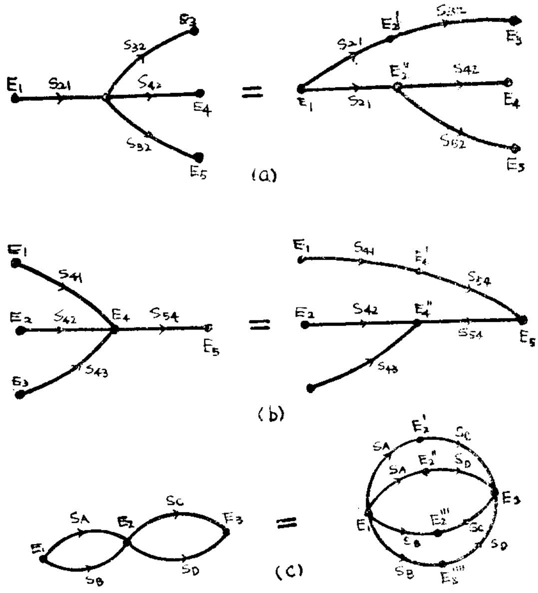

그림 9 그라프의 축소조작 처리

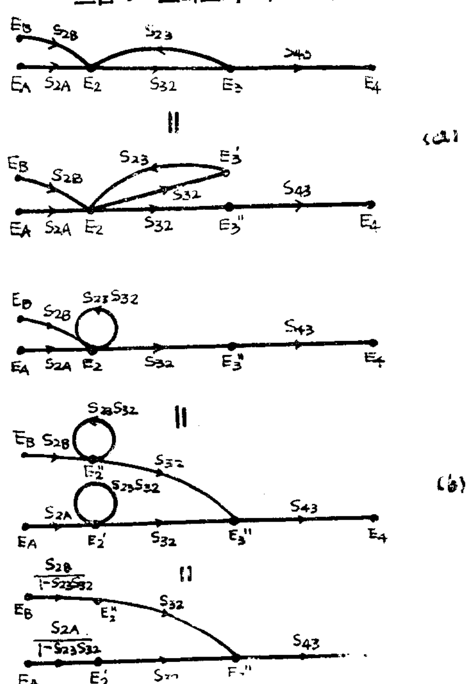

그림 10 루프의 축소조작법

$\Gamma_g=\Gamma_d=0$, 따라서 그림11(b)에서

$$M_1 정=KE_g 정 \tag{12}$$

그리고 그림11(d)에서

$$M_2 정=KE_gT \tag{13}$$

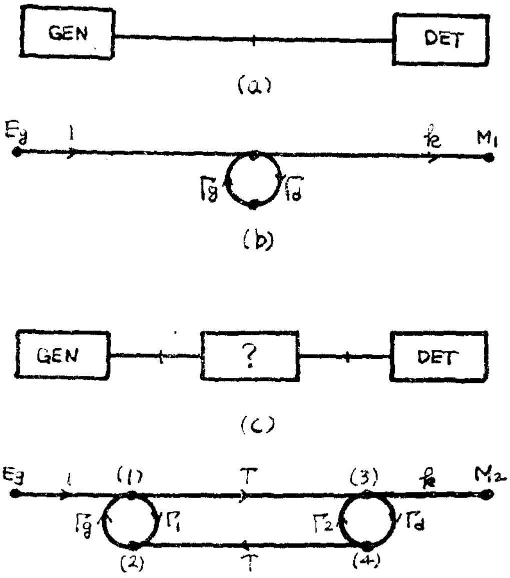

그림 11 삽입손실 측정에 대한 계통도및 그라프

그러므로 삽입손실은 다음과 같이 된다.

$$I_{ns}\ l_{oss}=20\ell og\frac{M_1 정}{M_2 정}=20\ell og\left|\frac{1}{T}\right| \qquad (14)$$

그러나 보통의 경우 $\Gamma_g \neq 0$, $\Gamma_d \neq 0$ 이므로 그림 11(b)에서 지시치 M_1을 계산키 위해 우선 법칙 1을 적용하여 이득이 $\Gamma_g\ \Gamma_d$인 자기루프를 만들고 다음 이자기루프를 법칙 3에 의해 신호원의 산란계수를 1에서 $\frac{1}{1-\Gamma_g\Gamma_d}$로 전환시켜 제거한다. 그러면 지시치 M_1은 아래와 같게 된다.

$$M_1=KE_g\frac{1}{1-\Gamma_d\Gamma_g} \qquad (15)$$

그림12는 피측기기가 삽입된 경우 검파기에서의 지시치를 구하기 위해 그라프를 Topological 조작에 의해 축소시키는 과정을 예시한다.

그림12(a)에서 마디(2), (4)는 법칙 4에 의해 (2'), (2''), (4')와 (4'')로 된다.

그림12(b)는 다음의 연속조작에 의한 결과이다.

첫째 법칙1을 적용하여 마디(3)에서 이득$\Gamma_d\Gamma_g$의 자기루프를 만들어 마디(4')를 제거시킨다

둘째, 이 자기루프를 법칙 3을 적용하여 마디(1)에서 (3)에 이르는 지로의 이득을 T에서 $\frac{T}{1-\Gamma_d\Gamma_2}$로 변환시켜 제거시킨다.

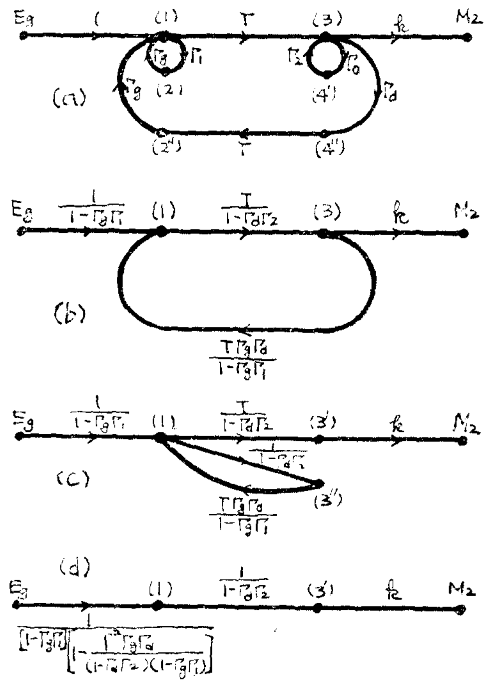

그림 12 삽입손실측정에 대한 그라프의 축소화 과정

셋째, 법칙 1을 적용하여 마디 (1)에서 이득 $\Gamma_g\ \Gamma_1$의 자기루프를 만들어 마디(2')를 제거한다.

넷째, 법칙3을 적용하여 신호원으로부터의 지로이득을 $\frac{1}{1-\Gamma_g\Gamma_1}$으로 또한 마디(2'')에서 (1)에 이르는 지로이득을 $\frac{\Gamma_g}{1-\Gamma_g\Gamma_1}$으로 변환시켜 자기루프를 제거.

다섯째, 마디(3)에서 (1)에 이르는 지로이득을 $\frac{T\Gamma_g\Gamma_d}{1-\Gamma_g\Gamma_1}$으로 변환시켜 마디(2'')와 (1)을 제거한다.

그림12(c)는 마디(3)을 (3')와 (3'')마디로 분리시킨 것이다.

법칙1에 의해 마디(3'')를 제거시킨 결과 발생한 마디(1)에서의 자기루프를 법칙3을 적용하여 제거시키면 그림12(d)가 된다.

이 최종 그라프는 오직 E_g에서 M_2에 이르는 한개의 도전로로 구성되 있고 마디(1)과 (3')는 법칙1을 적용하여 제거시킬 수 있다.

따라서

$$M_2 = KE_gT \frac{1}{(1-\Gamma_g\Gamma_1)\,(1-\Gamma_d\Gamma_2)} \overline{\left[1-\frac{T^2\Gamma_g\Gamma_d}{(1-\Gamma_d\Gamma_2)\,(1-\Gamma_g\Gamma_1)}\right]}$$

$$= KE_gT \frac{1}{1-\Gamma_g\Gamma_1-\Gamma_d\Gamma_2-T^2\Gamma_g\Gamma_d+\Gamma_g\Gamma_d\Gamma_1\Gamma_2} \quad (16)$$

식 (15), (16)에 의해 삽입손실은 식 (17)과 같다.

$$I_{ns.\,loss} = 20\log\frac{M_1}{M_2} = 20\log \left| \frac{1-\Gamma_g\Gamma_1-\Gamma_d\Gamma_2-T^2\Gamma_g\Gamma_d+\Gamma_g\Gamma_d\Gamma_1\Gamma_2}{T(1-\Gamma_g\Gamma_d)} \right| \quad (17)$$

식 (17)과 완전 정합인 경우(식 (15))를 비교하면 불완전 정합회로에 대한 오차 ε는 아래와 같이 된다.

$$\varepsilon(db) = 20\log\left(\frac{M_1\text{정}}{M_2\text{정}}\right)\left(\frac{M_1}{M_2}\right) = 20\log \left| \frac{1-\Gamma_d\Gamma_g}{1-\Gamma_2\Gamma_d-\Gamma_1\Gamma_g-T^2\Gamma_g\Gamma_d-\Gamma_g\Gamma_1\Gamma_2\Gamma_d} \right| \quad (18)$$

이와 같이 삽입손실, 오차 문제를 해결키 위한 식들을 회로방정식을 세우지 않고 푸로우 그라프 자체에 의해 간단히 구할 수 있다.

6. 결 론

이상에서 푸로우 그라프의 개념, Topological 조작법과 이것의 응용으로 삽입손실, 오차측정에 대해 기술하였다.

마이크로파 회로문제를 해석하는데 이 방법을 이용하면 해를 간단히 구할 수 있고 특히 비접루프법과 같은 복잡한 식을 피하고 단순히 Topological조작에 의하면 직접 구할 수 있음을 알았다.

더욱이 이 방법의 큰 이점중 하나는 종속접속된 회로를 해석하는데 있어서는 종래의 Matrix 방정식을 취급하는 것 보다 훨씬 편리하고 간편하다는 것이다.

참 고 문 헌

(1) Y. Chow, E. Cassignol,
Linear Signal Flow Graph & Application
New York, Wiley, 1962

(2) 金炯甲, 대한전기학회지
VOL. 17, No. 2 P11-15, 1967

(3) Mason, Zimmerman,
Electroic Circuit. Signal & System
New York, Wiley, 1960

(4) S. J. Mason,
Some Properties of Signal Flow Graph
PROC. IRE VOL 41, P1144-56, 1953

(5) S. J. Mason, ibid

(6) B. Kuo, Linear Networks and Systems
New York, McGraw-Hill, 1967

(7) J. K. Hunton,
IRE TRANS. MTT VOL. 8 P206-12, 1960

(8) N. Hunton, Microwave Journal
VOL. 6 No. 10, P59-66 1963

(9) H. K. Kim
IEEE Trans. on Education
VOL. E-11 No. 1, 1968

(10) N. Hunton, opt. cit.,