論 文
18～6～1

分布定數를 갖는 電氣回路에 대한 最大原理의 應用

An Application of the Maximum Principle to Distributive Electrical Circuits.

梁 興 錫*
(Heung Suk Yang)

〔ABSTRBCT〕

This thesis has suggested a method of applying the Maximum Principle of Pontryagin to the optimal control of distributive electrical networks.

In general, electrical networks consist of branches, nodes, sources and loads. The effective values of steady state currents and voltages are independent of time but only expressed as the functions of position. Moreover, most of the node voltages and branch currents are not predetermined, that is, initially unknown, and their inherent loop characteristics satisfy only Kirchhoff's current and voltage laws.

The Maximum Principle, however, needs the initial fixed values of all state variables for its standand way of application. In spite of this inconsistency this thesis has undertaken to suggest a new approach to the successful solution of the above mentioned networks by introducing scaling factors and a state variable change technique which transform the boundary-value unknown problem into the boundary-value partially fixed and partially free problem.

For the examples of applying the method suggested, the control problems for minimizing copper quantity in a distribution line have been solved with voltage drop constraint imposed on.

In the case of uniform load distribution it has been shown that the optimal wire diameter of the distribution line is reciprocally proportional to the root of distance.

For the same load pattern as above the wire diameter giving the minimum copper loss in the distribution line has been shown to be reciprocally proportional to distance.

1. 緖 論

最大原理는 連續制御의 時間的 最適化에 관한 여러가지 문제에 관해서 Pontryagin[1]과 그의 共同硏究者들에 의해서 提案된 것이다. 그들은 線形系의 時間的 最適制御 문제에 관한 解의 存在性과 一意性의 定理를 證明하였고, 最大原理가 時間的 最適問題의 必要條件임을 完全히 證明한 바 있다.

Gamkrekdze[2]는 任意의 積分(汎函數)를 最大化 또는 最小化하는 一般的인 문제에 最大原理를 擴張하였고 Rozonoer[3]는 自動制御理論에 있어서 必要한 여러 문제의 包括的인 取扱方法을 最大原理의 證明과 應用에 관련 시켜서 해설하였다. Chang[4], Katz[5] 등은 最大原理를 不連續制御나 非線形系의 最適制御에 擴張하였고 Denn[6]과 Aris[7]는 離散型 適大原理의 弱形式과 强形式을 證明하였다. S. Onyshko[8]는 하밀토니안 H(u) 대신에 I*(u)를 定義하여 펄스入力에 대한 線型프란트의 解析을 試圖하였다. 化學프로세스에 대한 擴張利用은 Fan[9] 等에 의하여 많이 開發되었다. 이와같이 最大原理에 修正을 가하든가 一般化하든가 또는 擴張하여 工學各分野에 利用하려고 努力하고있다.

本 論文은 分布負荷를 갖는 電氣回路에 대하여 Pontryagin의 最大原理를 적용하여 回路定數(line constants)의 最適分布를 決定하는 新理論을 展開하고 이것을 기초로하여 그 具體的 算法을 제시하였다.

一般的으로 最大原理의 전형적인 형태는 始端點狀態變數의 旣知의 條件으로부터 終端點狀態의 目的函數 또는 制御區間의 積分値가 最大 또는 最小가 되기위한 最適制御量을 決定하는 것이다. 그러나 始端點과 終端點이 確然히 구별되지 않고 回路의 電壓과 電流를 狀態變

*正會員：서울工大電氣工學科敎授

數로 취할 때 그 端點狀態가 未知이므로 最大原理를 그대로 適用시킬수 없다.

따라서 本論文에서는 回路의 各接續點(node)에 키르히호프의 電流則 및 電壓則이 항상성립하는 回路特性에 着眼하여 각 接續點을 終端點으로 취하고 또 枝路(branch)內의 任意點 또는 特定點을 始端點으로 취하여 最大原理를 適用하였으며 여기에는 尺度法(scaling factor technique) 및 變數置換法(variable change technique)의 概念을 도입하였다. 이렇게 표시되는 系統微分方程式은 終端點이 1개 이상의 橫斷性條件에 의하여 拘束되며 그 最適解를 얻는 것은 原則的으로 가능하지만, 解를 얻는 과정이 매우 복잡하다. 이와같은 복잡성을 피하기 위하여 變數置換法에 의하여 橫斷性條件을 消去함으로써 終端點狀態變數의 一部 指定 및 一部 不指定의 간단한 問題로 變換할 수 있음을 立證하였다.

2. 本 論

2-1. 最大原理[10]

本論文에서 適用하는 Pontryagin의 最大原理를 간단히 說明하면 다음과 같다.

本論文에서 취급하는 系統은 分布定數를 갖는 電力系統의 回路이므로 길이를 獨立變數로 취할 때 길이가 모두 固定되므로 終端點 時間固定問題로 된다. 여기서는 autonomous系統으로서 終端狀態로의 도달시간(또는 거리) T가 固定인 系統에 대한 最大原理의 定理를 소개하기로 한다.

狀態方程式 및 目的函數 J가

$$\dot{x}=f[x(t),\ u(t)] \qquad (1)$$

$$\forall\ t\in[t_0,\ T]$$

$$J=K[x(T)]+\int_0^T L[x(t),\ u(t)]dt \qquad (2)$$

로 표시되는 n階 動的系統을 생각하자. 여기서 $x(t)$는 n次 Euclid空間 R^n의 狀態變數벡터이다. 許容制御벡터 $u(t)$는

$$u(t)\in\Omega,\quad \forall\ t\in[t_0,\ T]$$

및

$$u(t-)=u(t),\quad \forall\ t\in[t_0,\ T]$$

但 Ω는 r次元 Euclid空間인 R^n의 部分集合이고, 許容制御集合 U는 區間 $[t_0,\ T]$상에서 區分的으로 連續인 函數 $u(t)$의 集合이다. $K[x(T)]$ 및 $L[x(t),\ u(t)]$는 R^n에서 정의된 實變數函數이고, $K[x(T)]$는 終端點費用函數(terminal cost function)이다. 變數 t는 實數이고 一般的으로 時間이지만 定常狀態의 連續的인 電力系統에서는 空間的인 거리를 표시한다고 생각할 수 있다. $f[x(t),\ u(t)]$의 n個成分 $f_i[x(t),\ u(t)]$와 $\frac{\partial f_i}{\partial x}[x(t),\ u(t)]$는 $R^n\times\bar{\Omega}\times[t_0,\ T]$에서 連續이라 가정한다. 但 $\bar{\Omega}$는 Ω의 閉包(closure)이다.

이 系統에 있어서 最適制御問題는 區間$[t_0,\ T]$中 식(1)의 系統에서 식(2)의 目的函數 J를 最小(또는 最大)로 하는 $u(t)$를 決定하는 것이다. 그런데, 本研究에서 취급하는 分布定數回路인 電力系統에 있어서는 獨立變數 t는 距離가 되고 全體길이가 固定되므로 終端時間 T는 指定(fixed)된다. 따라서 아래에서는 이러한 系統에 국한해서 Pontryagin의 最大原理를 간단히 記述코저 한다.

初期狀態變數 指定인 경우, 즉 $x(t_0)=x_0$(但 x_0는 定數)일때 標的集合(target set) S는 다음의 4가지 경우가 있다.

케이스1 : $S=\{x(T)\}\times\{T\}$

케이스2 : $S=S_1\times\{T\}$

케이스3 : $S=R^n\times\{T\}$

케이스4 : S가 위의(1)(2)(3)의 一部 또는 全部의 組合

初期狀態一部未定인 경우, 즉

$x_i(t_0)$는 未定

$x_j(t_0)=\alpha_j$

但 $i=1,\ 2,\cdots\cdots\cdots\cdots m-1.$

$j=m,\ m+1,\ \cdots\cdots\cdots n,$

이러한 경우에도 標的集合 S는 위의 각 케이스가 있을 수 있다.

새로 狀態變數 $x_0(t)$를 가정하여 식(2)의 目的函數 J를

$$J=x_0(T)$$

라 놓면

$$\dot{x}_0=\frac{dK}{dt}[x(t)]+L[x(t),\ u(t)] \qquad (3)$$

但 $K[x(0)]=0$이면 $x_0(0)=0$

가 된다. 여기서 식(3)의 微分方程式을 식(1)의 系統에 包含시켜 $(n+1)$ 次元系統으로 擴張시킨다.

그러면 식(1) 및 (2)는 다음 식으로 표시된다.

$$\dot{x}=f[x(t),\ u(t)] \qquad (4)$$

但 $x(t)$는 $(n+1)$ 次元벡터

$$J=\sum_{i=0}^{n} C_i x_i(T) \qquad (5)$$

但 $C_i=0$ $(i=1,\ 2,\ 3,\cdots\cdots\cdots\cdots n)$

$C_i=1$ $(i=0)$

여기에 $(n+1)$ 次元 補助벡터(adjoint vector) $p(t)$와 Hamiltonian H를 도입하면 다음과 같다.

Hamiltonian H는

$$H\ [p(t),\ x(t),\ u(t)]=\sum_{i=0}^{n} p_i f_i[x(t),\ u(t)]$$

$$=\langle p(t),\ f[x(t),\ u(t)]\rangle$$

그리고 canonical system은 다음과 같다.

$$\dot{x}=\frac{\partial H}{\partial p}[x(t),\ p(t),\ u(t)] \qquad (6)$$

$$\dot{p}=-\frac{\partial H}{\partial x}[x(t),\ p(t),\ u(t)]$$

$$=-\Big(\frac{\partial f[x(t),\ u(t)]}{\partial x}\Big)' p(t) \qquad (7)$$

最適制御벡터 $\hat{u}(t)$가 이에 相應하는 最適狀態벡터의 軌跡 $\hat{x}(t)$에 對해 許容制御가 되려면, 식(6) 및 (7)로 표시되는 系統의 解 $\hat{p}(t)$는 $\hat{u}(t)$와 $\hat{x}(t)$에 對應한다. 여기서 最適補助벡터 $\hat{p}(t)$는 各 標的集合 S에 따라서 다음 必要條件을 만족시켜야 한다.

(必要條件 1).

函數 $H[\hat{x}(t),\ \hat{p}(t),\ u(t)]$는 區間$[t_0,\ T]$內의 모든 t에 관해서 $u(t)=\hat{u}(t)$ 點에서 集合 Ω위에 u의 函數로서 絕大最小가 된다. 즉

$$\min_{u\in\Omega} H[\hat{x}(t),\ \hat{p}(t),\ u(t)]=H[\hat{x}(t),\ \hat{p}(t),\ \hat{u}(t)]$$

또는

$$H[\hat{x}(t),\ \hat{p}(t),\ \hat{u}(t)]\leqq H[\hat{x}(t),\ \hat{p}(t),\ u(t)]$$
$$\forall\ u\in\Omega$$

(必要條件 2).

Hamiltonian $H[\hat{x}(t),\ \hat{p}(t),\ \hat{u}(t)]$는 區間$[t_0,\ T]$에서 모든 t에 대해서 항상 一定하다. 즉,

$$H[\hat{x}(t),\ \hat{p}(t),\ \hat{u}(t)]=\text{一定}$$

(必要條件 3)

$p_0(T)=1$이다.

(必要條件 4A)

初期狀態變數 指定인 경우에 補助벡터 $\hat{p}(T)$($\hat{p}_0(T)$는 제외)는 各 케이스에 따라 다음과 같다.

케이스 1. $\hat{p}(T)$에 대한 條件을 결정할 수 없음.

케이스 2. $\hat{p}(T)$는 $\hat{x}(T)$($x_0(T)$는 제외)點에서 S_1을 橫斷한다(transversal). 즉,

$$\langle\hat{p}(T),\ x(t)-\hat{x}(T)\rangle=0$$
$$\forall\ x(t)\in M[\hat{x}(T)]$$

但 $M[x(T)]$은 $\hat{x}(T)$點에서 S_1에 接平面(tangent plane)이다. 따라서

$$M[\hat{x}(T)]=\{x(t):\langle\frac{\partial g_i}{\partial x}[\hat{x}(T)],\ x(t)-\hat{x}(t)\rangle=0\}$$

但 $i=1,\ 2,\cdots\cdots n-k$.

여기서 $g_1[x(t)]=0$, $g_2[x(t)]=0,\cdots\cdots$ $g_{n-k}[x(t)]=0$은 S_1의 方程式들이다.

케이스 3. $\hat{p}(T)$ ($\hat{p}_0(T)$는 제외)는 零벡이다. 즉,

$\hat{p}(T)=0$

케이스 4. 標的函數의 케이스 1, 2, 3에 따라, (必要條件 4A)의 해당하는 $\hat{p}(T)$의 값을 취한다.

(必要條件 4B)

初期狀態變數 一部未定인 경우에는 標的集合 S에 대해서는 (必要條件 4A)를 따르고 동시에 初期値가 未定인 狀態變數에 대하여 $p(0)$는 다음 條件을 만족시켜야 한다. 즉 $x(t_0)$의 成分中 m個未定인 경우

$x_i(t_0)$는 未定, $i=1,\ 2,\cdots\cdots m$

$x_j(t_0)=x_{0j},\quad j=m+1,\cdots\cdots n$

일때 $p_i(0)$는

(가) $\hat{u}(t)$가 U內部에 존재할 때

$p_i(0)=0,\quad i=1,\ 2,\cdots\cdots m$

$$\frac{\partial H}{\partial u_j}=0,\quad j=1,\ 2,\cdots\cdots r.$$

(나) $\hat{u}(t)$가 U境界上에 있을때는

H=最小

및

$$\sum_{i=0}^{m} x_i(0)p_i(0)=\text{最小}$$

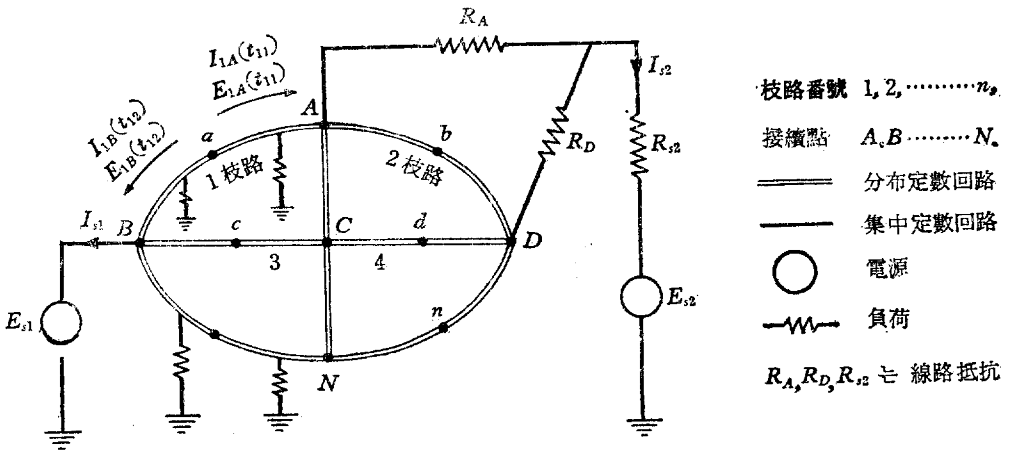

그림 1. 分布定數를 갖는 電力系統
Fig. 1. Distributive Electrical Power Network.

가 된다.

2-2. 電力回路문제의 特性과 問題點.

本論文에서는 그림 1과 같이 一般的인 電力系統의 分布定數回路系統에서 銅量 및 損失을 最小로하는 抵抗分布를 구하는 문제 등과 같이 여러가지 形의 目的函數를 最小로 하는 制御量을 구하기 위하여 最大原理를 適用하려고 한다. 이때 回路內에 電源이나 集中定數가 포함되어 있으면 外部로 꺼내어 취급하고 相互퍼래미터는 무시하고 各 枝路의 길이를 各各 T_1, T_3, ……T_i라 하고 거리를 獨立變數 t로 잡는다.

最大原理를 適用시키는 立場에서 볼 때 電力回路의 特性으로서는 다음과 같은 관계가 있다.

各 枝路마다 電壓, 電流를 狀態變數로 취하고, 거리를 獨立變數로 취하면 微分方程式이 成立되나 어느 一端을 始點으로 他端을 終點으로 取할 때

(1) 전부 또는 大部分의 상태변수의 初期値를 알 수 없다.

(2) 狀態變數의 初期値에는 키르히호프의 電流則 및 電壓則에 의하여 相互關係가 맺어진다. 이것은 橫斷性條件이다.

(3) 어떤 경우에는 狀態變數의 未定의 初期値와 終端値間에 等式拘束條件(equality constraint) 또는 初期値가 終端値의 함수로 된다.

그러므로 最大原理를 그대로 適用할 수 없다.

그러나 各 枝路 어느 中間에 始點을 假定하고 모든 接續點을 終端點으로 取하기 위한 方法으로 尺度法(scaling factor technique)을 導入하면 最大原理의 適用이 可能하게 된다.

2-3. 電力回路에 대한 最大原理의 適用法

2-3-1. 微分方程式의 構成.

그림 1과 같은 分布定數 電力回路에서 성립하는 微分方程式은 點 a에서부터 接續點 A까지의 거리는 T_{1A}', 거리의 變數를 t_{11}이라 할 때 枝路 1의 點 a의 右側에 대해서는

$$\frac{dE_{1A}(t_{11})}{dt_{11}}=R_{1A}(t_{11})I_{1A}(t_{11}) \tag{8}$$

但 $E_{1A}(0)$ 및 $E_{1A}(T_{1A}')$는 未定

$$\frac{dI_{1A}(t_{11})}{dt_{11}}=g_{1A}(t_{11})E_{1A}(t_{11}) \tag{9}$$

但 $I_{1A}(0)$ 및 $I_{1A}(T_{1A}')$는 未定

이고, 目的函數는

$$S_{1A}=G_{1R}[E_{1A}(T_{1A}'),\ R_{1A}(T_{1A}'),\ I_{1A}(T_{1A}')] \tag{10}$$

이다. 點 a에서 부터 接續點 B까지의 거리를 T_{1B}', 거리의 變數를 t_{12}라 할 때, 點 a의 左側에 대해서는

$$\frac{dE_{1B}(t_{12})}{dt_{12}}=R_{1B}(t_{12})I_{1B}(t_{12}) \tag{11}$$

但 $E_{1B}(0)$ 및 $E_{1B}(T_{1B}')$는 未定

$$\frac{dI_{1B}(t_{12})}{dt_{12}}=g_{1B}(t_{12})E_{1B}(t_{12}) \tag{12}$$

但 $I_{1B}(0)$ 및 $I_{1B}(T_{1B}')$는 未定

이고 目的 函數는

$$S_{1B}=G_{1L}[E_{1B}(T_{1B}'),\ I_{1B}(T_{1B}'),\ R_{1B}(T_{1B}')] \tag{13}$$

로서 表示할 수 있다. 또 其他의 모든 枝路에 대해서도 같은 形式의 微分方程式이 成立할 것이다.

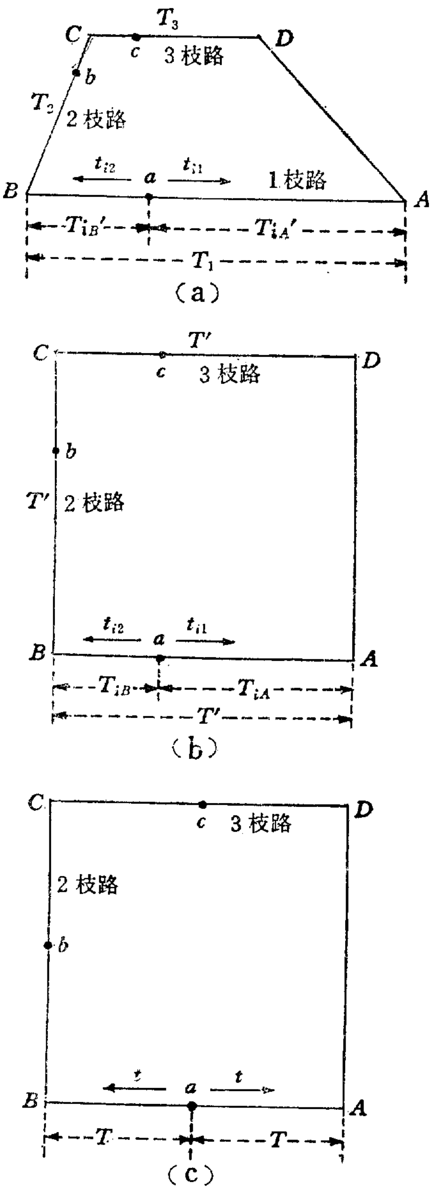

그림 2. 尺度法에 의해서 變換된 回路.

Fig. 2. A Changed Circuit by Scaling Factor Technique.

2-3-2. 尺度法(Scaling Factor Technique).

(가) 尺度率(scaling factor) K_i 및 k_i의 導入.

그림 2(a)와 같은 一般 電氣回路에서 各 枝路 AB, BC, CD……等의 길이 $T_i(i=1,2\cdots\cdots n)$가 모두 틀리므로 우선 이것들의 거리를 같은 尺度로 표시하기 위하여 尺度率(scaling factor) K_i $(i=1,2\cdots\cdots n)$를 새로 導入한다. 즉 각각의 길이에 K_i를 곱함으로써 모든 枝路의 길이가 T'가 되도록 한다. 지금 i枝路의 兩端點을 AB라 하면

$$(T_{iA}'+T_{iB}')=T_iK_i=T'$$

또는 $K_i=\dfrac{T'}{T_i}$ 但 $i=1,\ 2\cdots\cdots n$

이다. 여기서 K_i는 순수한 常數이다. 그러면 그림 2(a)의 回路는 그림 2(b)와 같이 된다.

다음에 枝路中의 任意의 點 a를 原點으로 취하고 原點 a에서부터 右側과 左側의 接續點 A 및 B까지의 거리의 變數를 각각 t_{i1}, t_{i2}라 하자. 그리고 $k_i(i=1,\ 2\cdots\cdots n)$라는 第2의 尺度率을 導入하여 t_{i1}, t_{i2}를

$$\left.\begin{aligned} t_{i1}&=k_it \\ t_{i2}&=(1-k_i)t \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

로 變換하면

$t_{i1}=0$ 일때 $t=0$

$t_{i1}=T_{iA}$ 일때 $t=\dfrac{T_{iA}}{k_i}=T$

이고

$t_{i2}=0$ 일때 $t=0$

$t_{i2}=T_{iB}=T-T_{iA}$ 일때 $t=\dfrac{T_{iB}}{1-k_i}=T$

가 된다.

이러한 k_i를 各 枝路마다 곱하여 尺度化(scaling)하면 各 枝路의 길이가 全部 $2T$가 된다. 그러면 그림 2(c)와 같이 各 枝路의 길이가 $2T$이고 原點 a, b, c……等이 各 枝路의 中點이 된다.

이와같은 變換을 하면 原微分方程式은 任意의 枝路 i에 대해서 兩端의 接續點을 A,B라 할 때 다음 諸式이 成立한다.

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{dE_{iA}(k_it)}{k_idt}&=R_{iA}(k_it)I_{iA}(k_it) \\
\frac{dI_{iA}(k_it)}{k_idt}&=g_{iA}(k_it)E_{iA}(k_it) \\
\frac{dE_{iB}[(1-k_i)t]}{(1-k_i)dt}&=R_{iB}[(1-k_i)t]I_{iB}[(1-k_i)t] \\
\frac{dI_{iB}[(1-k_i)t]}{(1-k_i)dt}&=g_{iB}[(1-k_i)t]E_{iB}[(1-k_i)t]
\end{aligned}\right.$$

위 諸式을 정리하면

$$\frac{dE_{iA}}{dt}=k_iR_{iA}I_{iA} \tag{16}$$

$$\frac{dI_{iA}}{dt}=k_ig_{iA}E_{iA} \tag{17}$$

$$\frac{dE_{iB}}{dt}=(1-k_i)R_{iB}I_{iB} \tag{18}$$

$$\frac{dI_{iB}}{dt}=(1-k_i)g_{iB}E_{iB} \tag{19}$$

이것을 行列形으로 쓰면

$$\begin{pmatrix} \dot{E}_{iB} \\ \dot{I}_{iA} \\ \dot{E}_{iB} \\ \dot{I}_{iB} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & k_iR_{iA} & 0 & 0 \\ k_ig_{iA} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-k_i)R_{iB} \\ 0 & 0 & (1-k_i)g_{iB} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{iA} \\ I_{iA} \\ E_{iB} \\ I_{iB} \end{pmatrix} \tag{20}$$

目的函數는

$$\begin{aligned} S=&G_{iR}[E_{iA}(k_iT),\ I_{iA}(k_iT),\ R_{iA}(k_iT)] \\ &+G_{iL}\{E_{iB}[(1-k_i)T],\ I_{iB}[(1-k_i)T], \\ &R_{iB}[(1-k_i)T]\} \end{aligned} \tag{21}$$

(나) 變數置換

各 枝路마다 다음과 같이 새 變數를 導入한다.

例를 들어 i枝路에 대하여

$$E_{ix}(t)=E_{iA}(t)-E_{iB}(t) \tag{22}$$

$$I_{ix}(t)=I_{iA}(t)+I_{iB}(t) \tag{23}$$

와 같이 놓면 電壓 電流의 特性에 의하여

$$E_{ix}(0)=0,\quad I_{ix}(0)=0$$

가 된다.

식(22), (23)을 식(20)에 대입하면

$$\begin{pmatrix} \dot{E}_{ix} \\ \dot{I}_{ix} \\ \dot{E}_{iB} \\ \dot{I}_{iB} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & k_iR_{iA} & 0 & -(1-k_i)R_{iB} \\ k_ig_{iA} & 0 & (1-k_i)g_{iB} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (1-k_i)R_{iB} \\ 0 & 0 & (1-k_i)g_{iB} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} E_{ix}+E_{iB} \\ I_{ix}-I_{iB} \\ E_{iB} \\ I_{iB} \end{pmatrix} \tag{24}$$

$$\left.\begin{aligned} \text{但}\quad & E_{ix}(0)=0 \\ & I_{ix}(0)=0 \\ & E_{iB}(0)\ \text{및}\ I_{iB}(0)\text{는 未定} \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

즉 $E_{iA}(t)$ 및 $I_{iA}(t)$를 消去하는 대신 새로운 變數 $E_{ix}(t)$ 및 $I_{ix}(t)$를 취한다. 이 경우에 消去되는 變數로서는 모든 變數가 指定인 경우는 任意의 것을 擇하여도 좋으나 一部指定, 一部未定인 경우에는 반드시 未定인 것을 擇하여야 한다. 終端點에 관해서는 接續點의 形에 따라 아래와 같은 境界條件이 成立된다.

그림 1의 一般的인 電力回路圖에서 보는 바와 같이 接續點에는 다음과 같은 3種類가 있다.

(1) A型 : 接續點 C와 같이 分布定數回路의 枝路만의 結合點

(2) B型 : 接續點 B와 같이 電源에 直接 連結된 接續點

(3) C型 : 接續點 A와 같이 接續點間에 電源이나 集中回路가 삽입된 枝路가 연결된 接續點

이런 各 形의 接續點은 다음에 기술하는 바와같이 키르히호프의 法則에 의하여 橫斷性條件이 성립한다.

(1) A 型

$$\sum I_{ic}(T)=0 \tag{26}$$

$$E_{ic}(T)=E_{jc}(T) \tag{27}$$

但 j: 接續點 C에 관계된 i 以外의 任意의 枝路

(2) B 型

$$\sum I_{iB}(T)-I_{s1}=0 \tag{28}$$

$$E_{iB}(T)=E_{jB}(T)=E_{s1} \tag{29}$$

但 E_{s1}: 電壓電源

(3) C 型

$$\sum I_{iA}(T)+\sum I_{jD}(T)-I_{s2}=0 \tag{30}$$

$$E_{iA}(T)=E_{jA}(T),\ E_{iD}(T)=E_{jD}(T) \tag{31}$$

$$E_{hD}(T)-\sum I_{jD}(T)R_D=E_{iA}(T) -\sum I_{iA}(T)R_A=E_{s2}+I_{s2}R_{s2} \tag{32}$$

위에서 보는 바와 같이 狀態變數의 初期値는 一部指定, 一部未定이고, 終端値는 橫斷性條件으로 주어지고 未定 퍼래미터 $k_1, k_2, \cdots\cdots k_n$은 後述하는 算法에 의하여 一部의 初期상태가 終端상태의 函數로 주어지는 문제로 取扱되어 그 解를 求할 수 있다. 그러나 橫斷性條件이 너무 많으면 풀기가 매우 복잡하므로 可能한 限 이 條件을 減小시키기 위하여 다음과 같이 狀態變數變換을 다시 行한다.

2-3-3. 新變數 導入

各 接續點의 種類에 따라 다음과 같이 新變數를 導入하면 식 (26)～(32)의 橫斷性條件을 감소시키거나 모두 없엘 수 있다.

(1) A 型

$$\sum I_{ic}(t)=I_K(t)$$

$$E_{ic}(t)-E_{jc}(t)=E_j(t)$$

로 置換하면

$$I_K(T)=0,\ E_j(T)=0 \tag{33}$$

의 관계가 成立되고 電流에 대해서는 $I_{ic}(t)$ 中 하나를 소거하고 $I_K(T)$와 나머지로 표시한다. 電壓에 대해서는 $E_{ic}(t)$ 대신에 $E_j(t)+E_{jc}(t)$를 代入하면 된다.

(2) B 型

$$\sum I_{iB}(t)-I_{s1}=I_{is}(t)$$

$$E_{iB}(t)-E_{jB}(t)=E_B(t)$$

로 置換하면

$$I_{is}(T)=0,\ E_B(T)=0 \tag{34}$$

로 된다.

(3) C 型

$$\sum I_{iA}(t)+\sum I_{jD}(t)=I_{AD}(t)$$

$$E_{iA}(t)-E_{jA}(t)=E_{ij}(t)$$

$$\{E_{hD}(t)-\sum I_{jD}(t)R_D\}-\{E_{iA}(t)-\sum I_{iA}(t)R_A\} =E_C(t)$$

로 置換하면

$$\left.\begin{aligned} I_{AD}(T)&=I_{s2}\\ E_{ij}(T)&=0\\ E_C(T)&=0 \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

로 變形된다.

이와 같이 2-3-2節까지의 過程을 밟으면 分布定數 電力回路에서

1. 狀態變數가 終端點에서 指定 또는 不指定되는 경우에는 2-1節의 게이스 1 또는 3의 문제로 귀착된다.

2. 狀態變數가 終端點에서 橫斷性條件에 의하여 拘束을 받은 경우에는 2-1節의 케이스 2의 條件으로 풀거나 또는 上述한 新變數導入으로 케이스 1 또는 2의 문제로 變換한다.

特히 注意하여야 할 점은 新變數를 導入해서 原式中 1개의 變數를 消去하고 新變數의 式으로 대치하게 되는데 消去할려는 變數로서는 終端點이 未定인것 中의 하나를 취해야 한다. 原式中 모든 變數의 終端點이 指定일 때에는 計算에 편리한 任意의 變數 하나를 消去시켜야 함은 이미 이 節의 (나)項에서 記述한 바와 原理的으로 같다. 2-3-2節의 尺度率이 系統 微分方程式에 포함되면, 이것은 方程式 內에서 퍼래미터로서 役割을 行하며, 問題에 따라서는 未定이될 수도 있다.

2-3-4. 未定퍼래미터 k_i의 決定.

電力系統의 分布定數回路 문제에 있어서 各 枝路의 任意點에서 狀態變數에 拘束을 받지 않는 경우에는 k_i를 任意의 값으로 놓고 풀면 된다. 그러나 만일 拘束일 경우에는 狀態變數의 始端位置가 未知이므로 未定퍼래미터 k_i의 값을 求해야 된다. 지금 未定퍼래미터[11]가 1개 만 있다고 假定하면 이것을 決定하기 위하여 다음과 같이 새로운 狀態變數 $x_{n+1}(t)$를 導入한다.

$$x_{n+1}(t)=k,\quad \forall\ t\in[t_0,\ T]$$

$$\frac{dx_{n+1}(t)}{dt}=0,\quad \forall\ t\in[t_0,\ T]$$

따라서 未定퍼래미터가 m개이면 系統의 狀態變數는 x에 관하여 $(n+m+1)$ 次元벡터가 되고, $(n+m+1)$개의 狀態方程式으로 표시되는 系統으로 擴張된다.

系統內에서 未定퍼래미터가 1개만 있는 경우, 그 最適 $x_{n+1}(t)$의 값 즉 $\hat{x}_{n+1}(t)=k$의 값을 定하기 위한 方法을 다음 2-4節에서 論하였다. 未定퍼래미터가 複數個 있는 경우에도 마찬가지의 理論展開가 可能함은 勿論이다. 즉 $x_{n+1}(0)=x_{n+1}(T)=k$인 관계로 인하여 補助變數 間에는 식(39)의 관계가 성립함을 證明하였다. 다음에 이 結果를 이용하여 x와 p에 관한 微分方程式을 풀면 k의 最適値가 決定된다.

2-4. 始端點 狀態變數의 一部가 終端點 狀態變數의 函數로 될 경우 最大原理의 適用.

2-4-1. 最適化 算法

狀態方程式

$$\dot{x}=f[x(t),\ u(t)] \qquad (36)$$
$$\forall\ t\in[0,\ T]$$

의 系統에서 始端點 狀態가

$x_i(0)=\alpha_i$　但 α_i는 定數

$i=0,\ 1,\ 2,\cdots\cdots n$

$i\neq l,\ m$

$$x_j(0)=g_j[x_j(T)] \qquad (37)$$

$j=l,\ m$

와 같은 函數關係가 주어지고 目的函數

$$J=\sum_{\substack{i=0\\ i\neq l,\ m}}^{n}C_i x_i(T)$$

에 極値(最大 또는 最小)를 주는 補助벡터 $\hat{p}(t)$는 다음 必要條件을 만족시킨다.

$$(1)\ p_j(T)=\sum_{i=l,m}\frac{\partial g_i[\hat{x}_i(T)]}{\partial\hat{x}_j(T)}p_i(0) \qquad (38)$$

$$(2)\ p_i(T)=C_i \qquad (39)$$

但　$i=0,\ 1,\ 2\cdots\cdots n$

$i\neq l,\ m$

그런데 尺度率 k_j는 未定파래미터이므로 $k_j=x_j$로 놓을 때 식(37)로부터

$x_j(0)=x_j(T)$

이므로 식(38)에 의하여

$$p_j(0)=p_j(T) \qquad (40)$$

의 關係가 성립한다. 이 條件을 尺度法의 計算에 利用하였다.

2-4-2. 算法(2-4-1)의 證明.

最適入力벡터, 最適狀態벡터를 각각 $\hat{u}(t)$, $\hat{x}(t)$라 하면 다음 微分方程式을 만족한다.

$$\frac{d\hat{x}}{dt}=f(\hat{x},\ \hat{u}) \qquad (41)$$

系統의 各 時點에 있어서 各 入力量에 微小한 偏移가 가해졌다면

$$u(t,\ \epsilon)=\hat{u}(t)+\epsilon\varphi(t)+0(\epsilon^2) \qquad (42)$$

인 近接函數를 생각하면 이에 대응하여 攝動(perturbation)을 받은 狀態벡터는

$$x(t,\ \epsilon)=\hat{x}(t)+\epsilon y(t)+0(\epsilon^2) \qquad (43)$$

로 표시할 수 있다. 여기서 $\varphi(t)$ 및 $y(t)$는 t의 函數이고, 각각 u 및 x와 같은 次元을 갖는다. 또 ϵ는 微小數, $0(\epsilon^2)$은 ϵ^2位 및 그것보다 高位의 項을 표시한다.

식(43)에서부터

$$\epsilon y(t)=x(t)-\hat{x}(t)+0(\epsilon^2)$$

上式을 t에 관해서 微分한 것에 식(36) 및 (41)을 代入하면 狀態벡터의 각 要素마다 次式이 얻어진다.

$$\epsilon\frac{dy_i(t)}{dt}=\frac{dx_i(t)}{dt}-\frac{d\hat{x}_i(t)}{dt}+0(\epsilon^2)$$

$$=[f_i(x,u)-f_i(\hat{x},\hat{u})]+0(\epsilon^2)$$

右邊을 Taylor 展開하여

$$\epsilon\frac{dy_i}{dt}=\sum_{j=0}^{n}\epsilon y_j\frac{\partial f_i(\hat{x},\ \hat{u})}{\partial\hat{x}_j}+\sum_{j=1}^{r}\epsilon\varphi_j\frac{\partial f_i(\hat{x},\ \hat{u})}{\partial\hat{u}_j}+0(\epsilon^2) \qquad (44)$$

最適條件下에서 식(37)은

$\hat{x}_i(0)=g_i[\hat{x}_i(T)]$

但　$i=l,\ m$

入力變數에 적은 偏移가 가해질때 狀態變數는 次式과 같이 變化한다.

$$x_i(0)=\hat{x}_i(0)+\epsilon y_i(0)+0(\epsilon^2)$$

이것을 Taylor 展開하면 다음 式이 얻어진다.

$$\epsilon y_i(0)=x_i(0)-\hat{x}_i(0)+0(\epsilon^2)=\hat{x}_i(0)+\sum_{j=l,m}\epsilon y_j(T)\frac{\partial g_i[\hat{x}_i(T)]}{\partial\hat{x}_j}-\hat{x}_i(0)+0(\epsilon^2)$$

$$=\sum_{j=l,m}\epsilon y_j(T)\frac{\partial g_i[x_i(T)]}{\partial\hat{x}_j}+0(\epsilon^2) \qquad (45)$$

다음에

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=0}^{n}\epsilon y_i p_i=\sum_{i=0}^{n}\epsilon p_i\frac{dy_i}{dt}+\sum_{i=0}^{n}\epsilon y_i\frac{dp_i}{dt}$$

의 관계가 성립하므로 上式에

$$\frac{dp_i}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_i}=-\sum_{j=0}^{n}p_j\frac{\partial f_i(x,\ u)}{\partial x_j}$$

및 식(44)의 $\frac{dy_i}{dt}$를 대입하면

$$\frac{d}{dt}\sum_{i=0}^{n}\epsilon y_i p_i=\sum_{i=0}^{n}p_i\Big[\sum_{j=0}^{n}\epsilon y_j\frac{\partial f_i(\hat{x},\ \hat{u})}{\partial\hat{x}_j}+\sum_{j=1}^{r}\epsilon\varphi_j\frac{\partial f_i(\hat{x},\ \hat{u})}{\partial\hat{u}_j}+0(\epsilon^2)\Big]+\sum_{i=0}^{n}\epsilon y_i\Big[-\sum_{j=0}^{n}p_j\frac{\partial f_i(x,\ u)}{\partial x_j}\Big]=\sum_{i=0}^{n}p_i(t)\sum_{j=1}^{r}\epsilon\varphi_j\frac{\partial f_i(\hat{x},\ \hat{u})}{\partial\hat{u}_j}+0(\epsilon^2)$$

上式을 $t=0$에서 $t=T$까지 積分하면

$$\sum_{i=0}^{n}\epsilon[y_i(T)p_i(T)-y_i(0)p_i(0)]$$

$$=\int_0^T\sum_{i=0}^{n}p_i\Big[\sum_{j=1}^{r}\epsilon\varphi_j\frac{\partial f_i(\hat{x},\ \hat{u})}{\partial\hat{u}_j}\Big]dt+0(\epsilon^2) \qquad (46)$$

初期狀態 $x_i(0)$中에서 $i=l,\ m$以外의 값은 α_i로 指定되어 있으므로

$y_i(0)=0$

그러므로

$\epsilon y_i(0)p_i(0)=0$

但　$i=0,\ 1,\ 2\cdots\cdots\cdots\cdots n$

$i\neq l,\ m$

그러므로 식(38) 및 (45)를 이용하면

$$\sum_{i=0}^{n}\epsilon y_i(0)p_i(0)=\sum_{i=l,m}\epsilon y_i(0)p_i(0)$$

$$=\sum_{i=l,m}\left[\sum_{j=l,m}\epsilon y_j(T)\frac{\partial g_i[x_i(T)]}{\partial \hat{x}_j}+0(\epsilon^2)\right]p_i(0)$$

$$=\sum_{j=l,m}\epsilon y_j(T)\left[\sum_{i=l,m}\frac{g_i[x_i(T)]}{\partial \hat{x}_j}p_i(0)\right]$$

$$=\sum_{j=l,m}\epsilon y_j(T)p_j(T) \tag{47}$$

여기서 다시 Hamiltonian의 定義를쓰면 식(46)은 다음과 같이 표시된다.

$$\sum_{i=0}^{n}\epsilon[y_i(T)p_i(T)-y_i(0)p_i(0)]$$

$$=\sum_{i=0}^{n}\epsilon y_i(T)p_i(T)-\sum_{j=l,m}\epsilon y_j(T)p_j(T)$$

$$=\sum_{\substack{i=0\\ i\neq l,\ m}}^{n}\epsilon y_i(T)p_i(T)$$

$$=\int_0^T\left[\sum_{j=1}^{r}\frac{\partial H}{\partial \hat{u}_j}\epsilon\varphi_j\right]dt+0(\epsilon^2) \tag{48}$$

여기서 $\hat{u}(t)$는 目的函數 $\sum_{\substack{i=0\\ i\neq l,\ m}}^{n}c_ix_i(T)$를 最小로 하는 入力量이므로 식(42)로 주어지는 偏移에 의한 結果는 언제나

$$\sum_{\substack{i=0\\ i\neq l,\ m}}^{n}\epsilon C_iy_i(T)\geq 0 \tag{49}$$

이다. 따라서 식(39), (48) 및 (49)에 의하여

$$\int_0^T\left[\sum_{j=1}^{r}\frac{\partial H}{\partial \hat{u}_j}\epsilon\varphi_j\right]dt+0(\epsilon^2)\geq 0 \tag{50}$$

식(50)이 成立하기 위해서는

$$\sum_{j=1}^{r}\frac{\partial H}{\partial \hat{u}_j}\epsilon\varphi_j\geq 0$$

이다. 上式은 $\hat{u}(t)$가 U內部에 存在할 때는

$$\frac{\partial H}{\partial u_j}=0$$

但 $j=1,\ 2,\cdots\cdots\cdots r$

$\hat{u}(t)$가 U境界上에 存在할 때는

H=最小

但 $j=1,\ 2,\cdots\cdots\cdots r$

라는 것을 의미한다.

(例題 1)

單純枝路內의 어떤 한點에서 狀態變數拘束을 받는 電力回路에 대한 最大原理適用.

(1) 그림 3과 같은 分布定數回路가 있을때 配電電壓을 E_i라 하고 負荷가 한결같이 걸려있다고 하자. 電流가 零인 點 0에서 電壓을 一定値 E_0로 유지하면서 配電線의 銅量을 最小로 하기 위한 抵抗의 分布를 求하는 問題를 本論文의 方法으로 最大原理를 適用하여 求해본다.

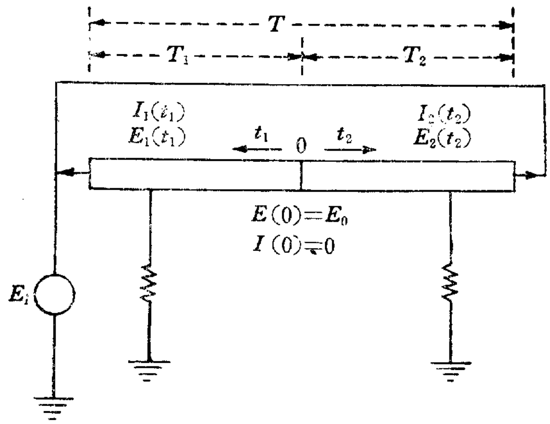

그림 3. 同一한 電源이 兩端에 걸려있는 分布定數回路.
Fig. 3. Distributive network with the same source voltage connected to both ends.

우선 狀態變數 拘束을 받는 點을 原點으로하고 兩쪽으로 거리의 變數를 t_1, t_2로 잡고 이 枝路의 全長을 T라고 하면 電力回路의 微分方程式은 다음과 같다.

$$\frac{dE_1(t_1)}{dt_1}=R_1(t_1)I_1(t_1) \tag{51}$$

$E_1(0)=E_0,\quad E_1(T_1)=E_i$

$$\frac{dI_1(t_1)}{dt_1}=g \tag{52}$$

$I_1(0)=0\quad I_1(T_1)$은 未定

$$\frac{dE_2(t_2)}{dt_2}=R_2(t_2)I_2(t_2) \tag{53}$$

$E_2(0)=E_0,\quad E_2(T_2)=E_i$

$$\frac{dI_2(t_2)}{dt_2}=g, \tag{54}$$

$I_2(0)=0,\quad I_2(T_2)$는 未定

지금 電線의 體積銅量을 V, 斷面積을 A, 全長을 T, 原點으로부터의 거리를 t라 하면

$dV=Adt$

單位 길이 當의 抵抗을 R이라 하면

$$R=\rho\frac{1}{A}$$

但 ρ는 固有抵抗이다. 그러므로

$$dV=\frac{\rho}{R}dt.$$

이고. 電線의 銅量은

$$V=\int_0^T\frac{\rho}{R}dt.$$

그러므로 目的函數는

$$J=\int_0^{T_1}\frac{\rho}{R_1(t_1)}dt_1+\int_0^{T_2}\frac{\rho}{R_2(t_2)}dt_2$$

이다.

尺度法에 의해서 k를 導入한다.

$$\begin{cases}t_1=kt\\ t_2=(1-k)t\end{cases}$$

여기서 $k=\frac{T_1}{T}$, $T_1+T_2=T$

또 $I_1(t_1)+I_2(t_2)=I_3(t)$

로 變數置換하면

$$I_1(kt)+I_2[(1-k)t]=I_3(t),\quad I_3(0)=0$$

$$I_3(T)=I_1(kT)+I_2[(1-k)T]=-I_i$$

그러면 原微分方程式은

$$\frac{dE_1}{dt}=kR_1I_1 \tag{51a}$$

$$\frac{dI_1}{dt}=kg \tag{52a}$$

$$\frac{dE_2}{dt}=(1-k)R_2I_2 \tag{53a}$$

$$\frac{dI_2}{dt}=(1-k)g \tag{54a}$$

또

$$\frac{d\{I_1(kt)+I_2[(1-k)t]\}}{dt}=g$$

그러므로

$$\frac{dI_3}{dt}=g \tag{55}$$

지금

$$J=\int_0^{T_1}\frac{\rho}{R_1(t_1)}dt_1+\int_0^{T_2}\frac{\rho}{R_2(t_2)}dt_2$$

에 있어서

$kt=t_1$, $kdt=dt_1$

但 $t_1=0$ 일때 $t=0$

$t_1=T_1$ 일때 $t=\frac{T_1}{k}=T$

$(1-k)t=t_2$, $(1-k)dt=dt_2$

但 $t_2=0$ 일때 $t=0$

$t_2=T_2$ 일때 $t=\frac{T_2}{1-k}=T$

로 變換하면

$$J=\int_0^T\rho\left\{\frac{k}{R_1(kt)}+\frac{1-k}{R_2[(1-k)t]}\right\}dt \tag{56}$$

로 된다. 지금

$$j(t)=\int_0^t\rho\left\{\frac{k}{R_1}+\frac{1-k}{R_2}\right\}dt$$

로 놓아 目的函數를 狀態變數化하고 k를 未定 퍼래미터로 보고 식(51a)~(54a) 中에서 I_2를 소거하면

$$\frac{dE_1}{dt}=kR_1I_1 \qquad \begin{cases}E_1(0)=E_0\\ E_1(T)=E_i\end{cases} \tag{57}$$

$$\frac{dI_1}{dt}=kg \qquad \begin{cases}I_1(0)=0\\ I_1(T)\text{는 不指定}\end{cases} \tag{58}$$

$$\frac{dE_2}{dt}=(1-k)R_2I_2 \qquad \begin{cases}E_2(0)=E_0\\ E_2(T)=E_i\end{cases} \tag{59}$$

$$\frac{dI_3}{dt}=g \qquad \begin{cases}I_3(0)=0\ \ I_3(T)=-I_i\\ \text{但}\ \ gT=I_i\end{cases} \tag{60}$$

$$\frac{dj}{dt}=\frac{k\rho}{R_1}+\frac{(1-k)\rho}{R_2} \qquad \begin{cases}j(0)=0\\ j(T)=J\end{cases} \tag{61}$$

$$\frac{dk}{dt}=0 \qquad k=c \tag{62}$$

식(57)~(62)에서 $E_1=x_1$, $I_1=x_2$, $E_2=x_3$, $I_3=x_4$ $R_1=u_1$, $R_2=u_2$, $k=x_5$, $j(t)=x_6$로 놓으면

$$\frac{dx_1}{dt}=x_5x_2u_1, \qquad \begin{cases}x_1(0)=E_0,\\ x_1(T)=E_i\end{cases} \tag{63}$$

$$\frac{dx_2}{dt}=x_5g \qquad \begin{cases}x_2(0)=0\\ x_2(T)\text{는 不指定}\end{cases} \tag{64}$$

$$\frac{dx_3}{dt}=(1-x_5)u_2(x_4-x_2), \begin{cases}x_3(0)=E_0\\ x_3(T)=E_i\end{cases} \tag{65}$$

$$\frac{dx_4}{dt}=g \qquad \begin{cases}x_4(0)=0\\ x_4(T)=-I_i\end{cases} \tag{66}$$

$$\frac{dx_5}{dt}=0 \qquad \begin{cases}x_5(t)=c\\ x_5(0)=x_5(T)\end{cases} \tag{67}$$

$$\frac{dx_6}{dt}=\frac{x_5\rho}{u_1}+\frac{(1-x_5)\rho}{u_2} \qquad \begin{cases}x_6(0)=0\\ x_6(T)=J\end{cases} \tag{68}$$

Hamiltonian H는

$$\begin{aligned}H=\sum p_if_i&=p_1x_5u_1x_2+p_2x_5g\\ &+p_3[(1-x_5)u_2(x_4-x_2)]+p_4g\\ &+p_6\left[\frac{x_5\rho}{u_1}+\frac{(1-x_5)\rho}{u_2}\right]\end{aligned} \tag{69}$$

$$J=x_6(T)=C_6x_6(T),\quad C_6=p_6(T)=1 \tag{70}$$

Hamiltonian의 canonical system에서

$$\frac{dp_1}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_1}=0,\quad p_1(t)=\text{常數} \tag{71}$$

$$\frac{dp_2}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_2}=-x_5p_1u_1+p_3(1-x_5)u_2,$$

$$p_2(T)=0 \tag{72}$$

$$\frac{dp_3}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_3}=0,\quad p_3(t)=\text{常數} \tag{73}$$

$$\frac{dp_4}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_4}=-p_3(1-x_5)u_2 \tag{74}$$

$$\begin{aligned}\frac{dp_5}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_5}&=-p_1u_1x_2-p_2g\\ &+p_3u_2(x_4-x_2)-\frac{\rho}{u_1}+\frac{\rho}{u_2}\end{aligned} \tag{75}$$

$$\frac{dp_6}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_6}=0,\quad p_6(t)=\text{常數} \tag{76}$$

식(70) 및 (76)에 의하여 $p_6(t)=1$

最適入力量 $\hat{u}_1$, $\hat{u}_2$는 $\frac{\partial H}{\partial u_1}=0$, $\frac{\partial H}{\partial u_2}=0$를 만족시키므로 이 條件으로부터

$$\hat{u}_1=\sqrt{\frac{\rho}{p_1x_2}} \tag{77}$$

$$\hat{u}_2=\sqrt{\frac{\rho}{p_3(x_4-x_2)}} \tag{78}$$

다음에 最適入力量과 最適狀態變數를 求한다.

먼저 식 (63)～(68)에 식 (77) 및 (78)을 代入하면

$$\frac{dx_1}{dt}=c\sqrt{\frac{\rho x_2}{p_1}} \qquad \begin{cases} x_1(0)=E_0 \\ x_1(T)=E_i \end{cases} \tag{79}$$

$$\frac{dx_2}{dt}=cg \qquad \begin{cases} x_2(0)=0 \\ x_2(T)\text{는 不指定} \end{cases} \tag{80}$$

$$\frac{dx_3}{dt}=(1-c)\sqrt{\frac{\rho}{p_3(x_4-x_2)}}(x_4-x_2)$$

$$\begin{cases} x_3(0)=E_0 \\ x_3(T)=E_i \end{cases} \tag{81}$$

$$\frac{dx_4}{dt}=g, \qquad \begin{cases} x_4(0)=0 \\ x_4(T)=-I_i \end{cases} \tag{82}$$

$$\frac{dx_5}{dt}=0, \qquad \begin{cases} x_5(t)=c \\ x_5(0)=x_5(T) \end{cases} \tag{83}$$

$$\frac{dx_6}{dt}=\sqrt{\frac{p_1x_2}{\rho}}c\rho+\sqrt{\frac{p_3(x_4-x_2)}{\rho}}(1-c)\rho,$$

$$\begin{cases} x_6(0)=0 \\ x_6(T)=J \end{cases} \tag{84}$$

식 (80)에서부터 $x_2(t)=cgt$ (85)

식 (82)에서부터 $x_4(t)=gt$ (86)

식 (71)에 의하여

$$p_1(t)=A \tag{71a}$$

식 (73)에 의하여

$$p_3(t)=B \tag{73a}$$

이므로 식 (79)는

$$\frac{dx_1}{dt}=c\sqrt{\frac{\rho cgt}{A}} \qquad \begin{cases} x_1(0)=E_0 \\ x_1(T)=E_i \end{cases}$$

이것을 풀면

$$\sqrt{A}=\frac{2}{3}\,\frac{c\sqrt{c\rho g}}{E_i-E_0,}\cdot T^{\frac{3}{2}}$$

$$x_1(t)=(E_i-E_0)T^{-\frac{3}{2}}t^{\frac{3}{2}}+E_0 \tag{87}$$

또, 식 (81)은

$$\frac{dx_3}{dt}=\sqrt{\frac{\rho}{B(x_4-x_2)}}(1-c)(x_4-x_2)$$

$$=\sqrt{\frac{\rho gt(1-c)}{B}}(1-c), \qquad \begin{cases} x_3(0)=E_0 \\ x_3(T)=E_i \end{cases}$$

이것을 풀면

$$x_3(t)=(E_i-E_0)T^{-\frac{3}{2}}t^{\frac{3}{2}}+E_0 \tag{88}$$

$$\text{但}\quad \sqrt{B}=\frac{2}{3}\,\frac{\sqrt{\rho g(1-c)}}{E_i-E_0}(1-c)T^{\frac{3}{2}}$$

식 (77), (78)에서부터 最適入力量 $\hat{u}_1(t)$, $\hat{u}_2(t)$는

$$\hat{u}_1=\sqrt{\frac{\rho}{p_1x_2}}=\sqrt{\frac{\rho}{Acgt}}$$

$$=\frac{3}{2}\,\frac{E_i-E_0}{c^2g}T^{-\frac{3}{2}}\,\frac{1}{\sqrt{t}} \tag{89}$$

$$\hat{u}_2=\sqrt{\frac{\rho}{p_3(x_4-x_2)}}=\sqrt{\frac{\rho}{Bgt(1-c)}}$$

$$=\frac{3}{2}\,\frac{E_i-E_0}{(1-c)^2g}\cdot T^{-\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{t}} \tag{90}$$

만일 u_1, u_2를 求하기 전에 c의 값을 求할 必要가 있을 경우나 檢討値로서 c의 값을 求할 必要가 있으면 나머지 $p_i(t)$의 微方式을 모두 풀 必要가 있다. 그런데 여기서 特記해둘 事項은 식 (63)～(68)을 보면 x의 모든 初期値가 指定되어 있는데 $x_5(0)$만이 未定으로서 $x_5(T)=x_5(0)$의 관계를 가지고 있으므로 이 문제는 本論文의 2-4節의 문제에 해당된다.

식 (72)에 식 (77) (78)을 代入하면

$$\frac{dp_2}{dt}=-x_5p_1\hat{u}_1+p_3(1-x_5)\hat{u}_2$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{(1-2c)\rho T^{\frac{3}{2}}}{E_i-E_0}\cdot\frac{1}{\sqrt{t}}$$

$$\text{但}\quad p_2(T)=0$$

이것을 풀면

$$p_2(t)=\frac{4}{3}(1-2c)\frac{\rho T^{\frac{3}{2}}}{E_i-E_0}\cdot(t^{\frac{1}{2}}-T^{\frac{1}{2}}) \tag{91}$$

다음에 식 (75)에서부터

$$p_5(t)=\frac{4}{3}\,\frac{(1-2c)\rho gT^2}{E_i-E_0}t+p_5(0)$$

식 (40)에 의하여 $p_5(T)=p_5(0)$ 이므로

$$c=0.5 \tag{92}$$

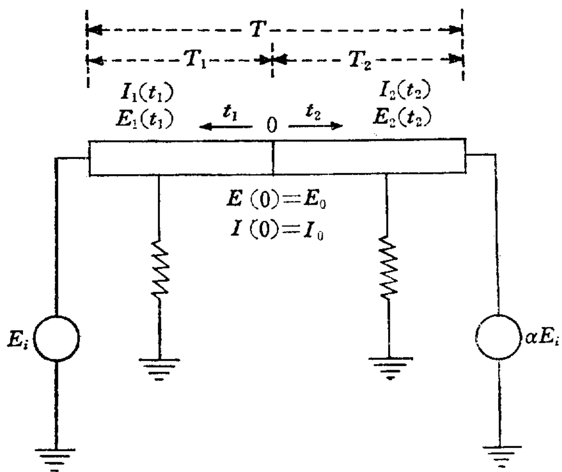

그림 4. 相異한 電源이 兩端에 걸려있는 分布定數回路

Fig. 4. Distributive network with the different source voltages connected to both ends.

(2) 相異한 電源이 兩端에 걸려있는 分布定數回路.

그림 4와 같이 分布定數回路의 兩端에 다른 電壓 E_i 및 αE_i(α는 定數)가 걸려있는 경우에는 식 (59)에서 $E_2(T)=\alpha E_i$로 놓고 前과 같은 過程을 밟음으로서 다음 結果를 얻는다.

$$x_1(t)=(E_i-E_0)T^{-\frac{3}{2}}t^{\frac{3}{2}}+E_0$$

$$x_3(t)=(\alpha E_i-E_0)T^{-\frac{3}{2}}t^{\frac{3}{2}}+E_0$$

$$\hat{u}_1(t)=\frac{3}{2}\,\frac{E_i-E_0}{c^2g}T^{-\frac{3}{2}}\frac{1}{\sqrt{t}} \tag{93}$$

$$\hat{u}_2(t)=\frac{3}{2}\ \frac{\alpha E_i-E_0}{(1-c)^2 g}\cdot T^{-\frac{1}{2}}\frac{1}{\sqrt{t}} \tag{94}$$

$$p_2(t)=\frac{4}{3}T^{\frac{1}{2}}\rho\left[\frac{-c^2}{E_i-E_0}+\frac{(1-c)^2}{\alpha E_i-E_0}\right](t^{\frac{1}{2}}-T^{\frac{1}{2}}) \tag{95}$$

$$p_5(t)=\frac{4}{3}\rho g T^2\left[\frac{-c^2}{E_i-E_0}+\frac{(1-c)^2}{\alpha E_i-E_0}\right]t+p_5(0) \tag{96}$$

上式에서 $p_5(T)=p_5(0)$의 관계를 이용하면

$$E_i(\alpha-1)c^2+2(E_i-E_0)c+(E_0-E_i)=0 \tag{97}$$

α가 附與되면 식 (97)에서 c를 구할 수 있다. 이것을 식 (86)에 代入하면 $p_5(t)$가 완전히 풀리고 식 (93) (94)에 이 c의 값을 代入하면 最適抵抗値가 求해진다.

(例題 2).

例題 1과같은 送電系統 문제에서 送電線의 銅損을 最小로 하는 抵抗分布를 決定하는 問題.

먼저 系統의 微分方程式을 세우면

$$\frac{dE_1(t_1)}{dt_1}=R_1(t_1)I_1(t_1)\quad \begin{cases}E_1(0)\text{는 不指定}\\ E_1(T_1)=E_i\end{cases}$$

$$\frac{dI_1(t_1)}{dt_1}=g,\quad \begin{cases}I_1(0)=0\\ I_1(T)\text{는 不指定}\end{cases}$$

$$\frac{dE_2(t_2)}{dt_2}=R_2(t_2)I_2(t_2)\quad \begin{cases}E_2(0)\text{는 不指定}\\ E_2(T_2)=E_i\end{cases}$$

$$\frac{dI_2(t_2)}{dt_2}=g\quad \begin{cases}I_2(0)=0\\ I_2(T_2)\text{는 不指定}\end{cases}$$

이고, 拘束條件(銅量이 제한되어 있음)

$$\int_0^{T_1}\frac{\rho}{R_1}dt_1+\int_0^{T_2}\frac{\rho}{R_2}dt_2=V \tag{98}$$

下에서 目的函數(銅損)

$$J=\int_0^{T_1}I_1^2(t_1)R_1(t_1)dt_1+\int_0^{T_2}I_2^2(t_2)R_2(t_2)dt_2$$

를 最小로하는 $R_1(t)$, $R_2(t)$를 決定하는 문제가 된다.

例題 1에서와 똑같이 尺度法에 의해서

$$\left.\begin{array}{l}t_1=kt,\ t_2=(1-k)t\\ I_1(t_1)+I_2(t_2)=I_3(t)\end{array}\right]$$

로 置換하면 原微分方程式은

$$\frac{dE_1}{dt}=kR_1I_1,\quad \begin{cases}E_1(0)\text{는 不指定}\\ E_1(T)=E_i\end{cases}$$

$$\frac{dI_1}{dt}=kg,\quad \begin{cases}I_1(0)=0\\ I_1(T)\text{는 不指定}\end{cases}$$

$$\frac{dE_2}{dt}=(1-k)R_2I_2,\quad \begin{cases}E_2(0)\text{는 不指定}\\ E_2(T)=E_i\end{cases}$$

$$\frac{dI_3}{dt}=g,\quad \begin{cases}I_3(0)=0\\ I_3(T)=-I_i\end{cases}$$

로 되고 拘束條件은

$$\int_0^T\rho\left(\frac{k}{R_1(t)}+\frac{1-k}{R_2(t)}\right)dt=V$$

目的函數는

$$J=\int_0^T[kI_1^2R_1+(1-k)I_2^2R_2]dt$$

로 된다. 지금 新目的函數 J_1를

$$J_1=\int_0^T\{[kI_1^2R_1+(1-k)I_2^2R_2]+\lambda\left[\rho\left(\frac{k}{R_1}+\frac{1-k}{R_2}\right)\right]dt$$

로 定義하고

$$j_1(t)=\int_0^t\{[kI_1^2R_1+(1-k)I_2^2R_2]+\lambda\left[\rho\left(\frac{k}{R_1}+\frac{(1-k)}{R_2}\right)\right]\}dt$$

라 놓면 $j_1(0)=0$, $j_1(T)=J_1$이된다.

여기서 $E_1=x_1$, $I_2=x_2$, $E_2=x_3$, $I_3=x_4$ $R_1=u_1$, $R_2=u_2$, $k=x_5$, $j_1(t)=x_6$, 로 置換한다.

系統微分方程式은

$$\frac{dx_1}{dt}=x_5x_2u_1\quad \begin{cases}x_1(0)\text{는 不指定}\\ x_1(T)=E_i\end{cases} \tag{99}$$

$$\frac{dx_2}{dt}=x_5g\quad \begin{cases}x_2(0)=0\\ x_2(T)\text{는 不指定}\end{cases} \tag{100}$$

$$\frac{dx_3}{dt}=(1-x_5)u_2(x_4-x_2)\quad \begin{cases}x_3(0)\text{는 不指定}\\ x_3(T)=E_i\end{cases} \tag{101}$$

$$\frac{dx_4}{dt}=g,\quad \begin{cases}x_4(0)=0\\ x_4(T)=-I_i\end{cases} \tag{102}$$

$$\frac{dx_5}{dt}=0,\quad \begin{cases}x_5(t)=c\\ x_5(0)=x_5(T)=c\end{cases} \tag{103}$$

$$\frac{dx_6}{dt}=x_5x_2^2u_1+(1-x_5)(x_4-x_2)^2u_2+\lambda\rho\left(\frac{x_5}{u_1}+\frac{(1-x_5)}{u_2}\right),\ \begin{cases}x_6(0)=0\\ x_6(T)=J_1\end{cases} \tag{104}$$

가 되고 Hamiltonian 은

$$\begin{aligned}H&=\langle p,f\rangle\\ &=x_5x_2^2u_1+(1-x_5)(x_4-x_2)^2u_2\\ &\quad+\lambda\rho\left[\frac{x_5}{u_1}+\frac{(1-x_5)}{u_2}\right]+p_1x_5x_2u_1\\ &\quad+p_2x_5g+p_3[(1-x_5)u_2(x_4-x_2)]+p_4g\end{aligned} \tag{105}$$

가 된다. 여기서

$$J_1=x_6(T)=C_6x_6(T),\quad C_6=1=p_6(T) \tag{106}$$

$$\frac{dp_1}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_1}=0\quad \begin{cases}p_1(t)=\text{常數}=A\\ p_1(0)=0\end{cases} \tag{107}$$

$$\begin{aligned}\frac{dp_2}{dt}&=-\frac{\partial H}{\partial x_2}=-p_1x_5u_1+p_3(1-x_5)u_2\\ &\quad-2x_2x_5u_1+2(x_4-x_2)(1-x_5)u_2,\end{aligned} \tag{108}$$

$$p_2(T)=0$$

$$\frac{dp_3}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_3}=0\quad \begin{cases}p_3(t)=B\\ p_3(0)=0\end{cases} \tag{109}$$

$$\begin{aligned}\frac{dp_4}{dt}&=-\frac{\partial H}{\partial x_4}=-p_3(1-x_5)u_2\\ &\quad-2(1-x_5)(x_4-x_2)u_2\end{aligned} \tag{110}$$

$$\begin{aligned}\frac{dp_5}{dt}&=-\frac{\partial H}{\partial x_5}=-x_2^2u_1+(x_4-x_2)^2u_2\\ &\quad-\lambda\rho\left(\frac{1}{u_1}-\frac{1}{u_2}\right)-p_1x_2u_1-p_2g+p_3u_2(x_4-x_2)\end{aligned} \tag{111}$$

$$\frac{dp_6}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_6}=0,\quad p_6(t)=\text{常數}=1 \tag{112}$$

$$J_1=\int_0^T\Big[kI_1{}^2u_1+(1-k)I_2{}^2u_2 +\lambda\rho\Big(\frac{k}{u_1}+\frac{(1-k)}{u_2}\Big)\Big]dt$$

最小條件 $\frac{\partial H}{\partial u_1}=0$, $\frac{\partial H}{\partial u_2}=0$ 으로 부터

$$\hat{u}_1=\frac{\sqrt{\lambda\rho}}{x_2} \tag{113}$$

$$\hat{u}_2=\frac{\sqrt{\lambda\rho}}{(x_4-x_2)} \tag{114}$$

다음에 $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, $x_4(t)$ 등을 구하면

$$x_2(t)=cgt \tag{115}$$

$$x_1(t)=c\sqrt{\lambda\rho}(t-T)+E_i \tag{116}$$

$$x_4(t)=gt \tag{117}$$

$$x_3(t)=(1-c)\sqrt{\lambda\rho}(t-T)+E_i \tag{118}$$

$p_2(t)$ 및 $p_5(t)$를 구하면

$$p_2(t)=2(1-2c)\sqrt{\lambda\rho}(t-T) \tag{119}$$

$$p_5(t)=2(1-2c)g\sqrt{\lambda\rho}Tt+p_5(0) \tag{120}$$

$p_5(T)=p_5(0)$의 條件에 의해서

$c=0.5$

그러므로

$$\hat{u}_1=\frac{\sqrt{\lambda\rho}}{0.5gt} \tag{113a}$$

$$\hat{u}_2=\frac{\sqrt{\lambda\rho}}{0.5gt} \tag{114a}$$

λ의 결정은

$$\int_0^T\rho\Big(\frac{0.5}{\hat{u}_1}+\frac{0.5}{\hat{u}_2}\Big)dt=V$$

이므로, 이것으로부터

$$\lambda=\frac{0.25^2\rho g^2T^4}{V^2}$$

$$\hat{u}_1=\hat{u}_2=\frac{\rho T^2}{2V}\cdot\frac{1}{t} \tag{121}$$

즉 銅量(V) 一定인 拘束條件下에 銅損을 最小로하는 抵抗分布는 距離(t)에 反比例함을 알수있다.

(例題 3)

例題 1의 配電系統 문제에서 配電線의 電壓降下를 最小로 하는 抵抗分布를 決定하는 문제.

例題 2에서와 같이 銅量一定이라는 식 (98)과 같은 拘束條件 下에 目的函數(電壓降下)

$$J=\int_0^{T_1}I_1(t_1)R_1(t_1)dt_1+\int_0^{T_2}I_2(t_2)R_2(t_2)dt_2$$

를 最小로 하는 $R_1(t)$, $R_2(t)$를 決定하는 문제로 된다.

例題 2에서와 꼭 같은 過程을 밟음으로서 다음 結果를 얻는다.

$$H=x_5x_2u_1+(1-x_5)(x_4-x_2)u_2+\lambda\rho\Big[\frac{x_5}{u_1}+\frac{(1-x_5)}{u_2}\Big]+p_1x_5x_2u_1+p_2x_5g +p_3[(1-x_5)u_2(x_4-x_2)]+p_4g \tag{122}$$

$$\hat{u}_1=\sqrt{\frac{\lambda\rho}{x_2}} \tag{123}$$

$$\hat{u}_2=\sqrt{\frac{\lambda\rho}{x_4-x_2}} \tag{124}$$

다음에 λ를 決定하면

$$\lambda=\frac{2}{9}\,\frac{g\rho}{V^2}\cdot T^3 \tag{125}$$

그러면 구하는 最適抵抗分布는

$$\hat{u}_1=\hat{u}_2=\frac{2\rho T^{\frac{3}{2}}}{3V}\cdot\frac{1}{\sqrt{t}} \tag{126}$$

이다.

(例題 4)

例題 1의 電流變化率이 電壓에 비례하는 경우.

電力回路는 그림 3과 같고, 이에 대한 微分方程式을 세우면

$$\frac{dE_1(t_1)}{dt_1}=R_1(t_1)I_1(t_1)\quad\begin{cases}E_1(0)=E_0\\E_1(T_1)=E_i\end{cases}$$

$$\frac{dI_1(t_1)}{dt_1}=gE_1(t_1)\quad\begin{cases}I_1(0)=0\\I_1(T_1)\text{는 不指定}\end{cases}$$

$$\frac{dE_2(t_2)}{dt_2}=R_2(t_2)I_2(t_2)\quad\begin{cases}E_2(0)=E_0\\E_2(T_2)=E_i\end{cases}$$

$$\frac{dI_2(t_2)}{dt_2}=gE_2(t_2)\quad\begin{cases}I_2(0)=0\\I_2(T_2)\text{는 不指定}\end{cases}$$

目的函數는

$$J=\int_0^{T_1}\frac{\rho}{R_1(t_1)}dt_1+\int_0^{T_2}\frac{\rho}{R_2(t_2)}dt_2$$

이다. 尺度法에 의해서 $\frac{T}{T_1}=k$라 놓고

$t_1=kt$, $t_2=(1-k)t$,

또, $I_1(t_1)+I_2(t_2)=I_3(t)$로 置換하면

$$I_1(kt)+I_2[(1-k)t]=I_3(t)\quad\begin{cases}I_3(0)=0\\I_3(T)\text{는 不指定}\end{cases}$$

그러면 이 系統의 微分方程式은 다음과 같이 된다.

$$\frac{dE_1}{dt}=kR_1I_1,\quad\begin{cases}E_1(0)=E_0\\E_1(T)=E_i\end{cases} \tag{127}$$

$$\frac{dI_1}{dt}=kgE_1,\quad\begin{cases}I_1(0)=0\\I_1(T)\text{는 不指定}\end{cases} \tag{128}$$

$$\frac{dE_2}{dt}=(1-k)R_2I_2\quad\begin{cases}E_2(0)=E_0\\E_2(T)=E_i\end{cases} \tag{129}$$

$$\frac{dI_3}{dt}=kgE_1+(1-k)gE_2\begin{cases}I_3(0)=0\\I_3(T)\text{는 不指定}\end{cases} \tag{130}$$

$$\frac{dj}{dt}=\frac{k\rho}{R_1}+\frac{(1-k)\rho}{R_2}\quad\begin{cases}j(0)=0\\j(T)=J\end{cases} \tag{131}$$

$$\frac{dk}{dt}=0\quad k(0)=c=k(T) \tag{132}$$

식 (127)~(132)에서

$E_1=x_1$, $I_1=x_2$, $E_2=x_3$, $I_3=x_4$, $R_1=u_1$, $R_2=u_2$, $k=$

x_5, $j(t)=x_6$ 로 置換하면

식 (127)~(132)는 다음과 같이 된다.

$$\frac{dx_1}{dt}=x_5u_1x_2 \quad \begin{cases} x_1(0)=E_0 \\ x_1(T)=E_i \end{cases} \tag{133}$$

$$\frac{dx_2}{dt}=x_5gx_1 \quad \begin{cases} x_2(0)=0 \\ x_2(T)\text{는 不指定} \end{cases} \tag{134}$$

$$\frac{dx_3}{dt}=(1-x_5)u_2(x_4-x_2) \quad \begin{cases} x_3(0)=E_0 \\ x_3(T)=E_i \end{cases} \tag{135}$$

$$\frac{dx_4}{dt}=x_5gx_1+(1-x_5)gx_3 \begin{cases} x_4(0)=0 \\ x_4(T)\text{는 不指定} \end{cases} \tag{136}$$

$$\frac{dx_5}{dt}=0, \quad x_5(0)=x_5(T)=c \tag{137}$$

$$\frac{dx_6}{dt}=\frac{x_5\rho}{u_1}+\frac{(1-x_5)\rho}{u_2} \quad \begin{cases} x_6(0)=0 \\ x_6(T)=J \end{cases} \tag{138}$$

Hamiltonian H는 다음과 같다

$$H=p_1x_5u_1x_2+p_2x_5gx_1+p_3[(1-x_5)u_2(x_4-x_2)]+p_4[x_5gx_1+(1-x_5)gx_3]+p_6\left[\frac{x_5\rho}{u_1}+\frac{(1-x_5)\rho}{u_2}\right] \tag{139}$$

Hamiltonian의 cannonical system에서

$$\frac{dp_1}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_1}=-p_2x_5g-p_4x_5g \tag{140}$$

$$\frac{dp_2}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_2}=-p_1x_5u_1+p_3(1-x_5)u_2, \tag{141}$$

$p_2(T)=0$

$$\frac{dp_3}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_3}=-p_4(1-x_5)g \tag{142}$$

$$\frac{dp_4}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_4}=-p_3(1-x_5)u_2.\ p_4(T)=0 \tag{143}$$

$$\frac{dp_5}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_5}=-p_1u_1x_2-p_2gx_1+p_3u_2(x_4-x_2)-gx_1p_4+gx_3p_4-\frac{p_6\rho}{u_1}+\frac{\rho p_6}{u_2}, \tag{144}$$

$p_5(0)=p_5(T)$

$$\frac{dp_6}{dt}=-\frac{\partial H}{\partial x_6}=0, \quad p_6(t)=\text{常數} \tag{145}$$

$$J=x_5(T)=C_6x_6(T)=p_6(T)x_6(T) \tag{146}$$

$\therefore\ p_6(T)=1$

식 (145) 및 (146)에 의하여

$$p_6(t)=1 \tag{147}$$

이다. 最適入力量은 $\frac{\partial H}{\partial u_i}=0$의 조건에 의하여

$$\hat{u}_1=\sqrt{\frac{\rho}{p_1x_2}} \tag{148}$$

$$\hat{u}_2=\sqrt{\frac{\rho}{p_3(x_4-x_2)}} \tag{149}$$

이고, 이 $\hat{u}_1$, $\hat{u}_2$를 식 (133)~(138)과 식 (140)~(145)에 代入하면 다음과 같이 된다.

$$\frac{dx_1}{dt}=c\sqrt{\frac{x_2\rho}{p_1}} \quad \begin{cases} x_1(0)=E_0 \\ x_1(T)=E_i \end{cases} \tag{150}$$

$$\frac{dx_2}{dt}=x_5gx_1 \quad \begin{cases} x_2(0)=0 \\ x_2(T)\text{는 不指定} \end{cases} \tag{151}$$

$$\frac{dx_3}{dt}=(1-c)\sqrt{\frac{(x_4-x_2)\rho}{p_3}} \quad \begin{cases} x_3(0)=E_0 \\ x_3(T)=E_i \end{cases} \tag{152}$$

$$\frac{dx_4}{dt}=cgx_1+(1-c)gx_3 \quad \begin{cases} x_4(0)=0 \\ x_4(T)\text{는 不指定} \end{cases} \tag{153}$$

$$\frac{dx_5}{dt}=0 \quad \begin{cases} x_5(t)=c \\ x_5(0)=x_5(T) \end{cases} \tag{154}$$

$$\frac{dx_6}{dt}=c\sqrt{p_1x_2\rho}+(1-c)\sqrt{p_3(x_4-x_2)\rho} \quad \begin{cases} x_6(0)=0 \\ x_6(T)=J \end{cases} \tag{155}$$

$$\frac{dp_1}{dt}=-p_2x_5\rho-cgp_4 \tag{156}$$

$$\frac{dp_2}{dt}=-p_1c\sqrt{\frac{\rho}{p_1x_2}}+p_3(1-c)\sqrt{\frac{\rho}{p_3(x_4-x_2)}}, \qquad p_2(T)=0 \tag{157}$$

$$\frac{dp_3}{dt}=-p_4(1-c)g \tag{158}$$

$$\frac{dp_4}{dt}=-p_3(1-c)\sqrt{\frac{\rho}{p_3(x_4-x_2)}}, \quad p_4(T)=0 \tag{159}$$

$$\frac{dp_5}{dt}=-2\sqrt{\rho p_1x_2}-p_2gx_1+2\sqrt{\rho p_3(x_4-x_2)}-gx_1p_4+gx_3p_4 \tag{160}$$

$p_5(0)=p_5(T)$

$$\frac{dp_6}{dt}=0, \quad p_6(t)=1 \tag{161}$$

식 (150)~(161)을 보면 2點境界値문제로 되었다.

3. 檢討

1. 例題들에서 보는 바와 같이 單一回線으로 되어 있어도, 2개소 이상의 接續點에 電源이 있거나 多回線의 경우에는 本論文의 算法이 有力한 解法이 된다. 例題 1은 初期指定, 퍼래미터決定 및 終端狀態의 橫斷性條件의 消去方法을 썼고, 例題 2는 初期一部未定, 퍼래미터決定, 終端狀態의 橫斷性條件消去 및 等式拘束條件을 갖는 문제로 풀었다. 그리고 모든 例題는 尺度法을 적용하였다.

2. 本例題들은 autonomous 系統에 局限하였으나 non-autonomous 系統에도 $x_{n+1}=t$로 놓으므로써 次元을 증가시켜 같은 方法으로 풀수있다.

3. 本論文에 제시된 理論과 算法은 交流回路에 相互퍼래미터를 무시하면 그대로 適用시킬수 있다. 단, 交流인 경우에는 系統方程式은 複素微分方程式으로 세워지는데 이를 實數分과 虛數分으로 분해하여 等式을 다시 세우면 次元은 2배가 되고, 端點에 있어서의 橫斷性條件이 한동히 증가하는 점 만이 다르다.

4. 分布負荷內의 어느 區間에 不連續이 있을 경우, 이를테면 어느 한 地點에 大量의 負荷가 걸릴 경우에는 이 點을 接續點으로 취급하여 이點을 境界點으로 취하여 區間을 分割하면, 이 分割點에서 橫斷性條件이 만족

될것이므로 本論文의 算法이 그대로 適用된다.

5. 相互 퍼래미터를 고려하면 尺度法을 적용하는데 있어서 本論文에서 제시한 方法으로는 難點이 있으므로 이 問題는 앞으로 더 연구할 課題라고 생각한다.

4. 結論

1. 一般的인 分布定數回路의 電力系統問題의 最適解는 從前의 最大原理를 그대로 適用하여 求할수 없다.

2. 따라서 接續點을 終端點으로 하고 枝路의 任意點 또는 特定點을 始點으로 하는 系統方程式으로 變換시키기 위하여 尺度法과 變數置換法을 적용하므로써 終端點의 橫斷性條件을 만족하는 問題로 되어 最大原理의 適用이 가능하게 되었다. 여기서 키르히호프의 電流則 및 電壓則에 의하여 橫斷性條件式이 線型의 간단한 式이 된다.

3. 終端點에서 橫斷性條件이 너무 많으면 解를 구하기가 복잡하므로 新變數置換法을 적용하여 橫斷性條件의 消去가 가능하다.

4. 尺度法의 適用時 나타나는 因數 k_i는 문제에 따라서 未定인 경우가 있다. 이것은 未定퍼래미터 最適問題가 되는데 이것의 解를 구하기 위한 算法도 導入하였다.

5. 本 論文의 算法의 妥當性을 立證하기 위하여 具體的인 例로써 配電線의 銅量最小, 銅損最小 및 電壓降下最小를 위한 抵抗分布問題를 들었다. 銅量最小 및 電壓降下最小의 경우에는 配電線의 굵기가 거리의 平方根에 반비례하고, 銅損最小의 경우에는 거리에 반비례한다는 事實이 究明되었다.

參 考 文 獻

(1) Pontryagin L.S., et al., "The Mathematical Theory of Optimal Processes", John Wiley and Sons, 1962.

(2) Gamkrelidze, R.V., "On the General Theory of Optimum Processes", Automation Express, 1, 37—39, 1959.

(3) Rozonoer, L.I., "The Maximum Principle of L. S. Pontryagin in Optimal-System Theory", Automat. Telemech. 20, 1960.

(4) Chang, S.S.L., "Digitized Maximum Principle," Proc. IRE, 48. 2030—2031, 1960.

(5) Katz, S., "A Discrete Version of Pontryagin's Maximum Principle," J. Electron. Control, 13, 179, 1962.

(6) Denn, M.M., "The Optimization of Complex Systems," Ph. D. Thesis, Univ. of Minnesota, 1964.

(7) Denn, M.M and Aris, R., "Second Order Variational Equations and the Strong Maximum Principle," Chem. Eng. Sci. 20. 373, 1965.

(8) Onyshko, S, and Noges, E., "Optimization of Pulse Frequency Modulated Control Systems Via Modified Maximum Principle," IEEE Trans. Ac-13, No. 2, 144—149, 1966.

(9) Fan, L.T., "The Continuous Maximum Principle", John Wiley and Sons, 1966.

(10) Athans, M. and Falb, P.L., "Optimal Control", McGraw-Hill, 284—308, 1966.

(11) Leitmann, G., "An Introduction to Optimal Control", McGraw-Hill, 98—101, 1966.