<연재 Ⅲ>

「初步者를 爲한 Operations Research講義」

漢陽大工大 講師
學會. 經營指導部長 田 萬 述

3. 交換理論

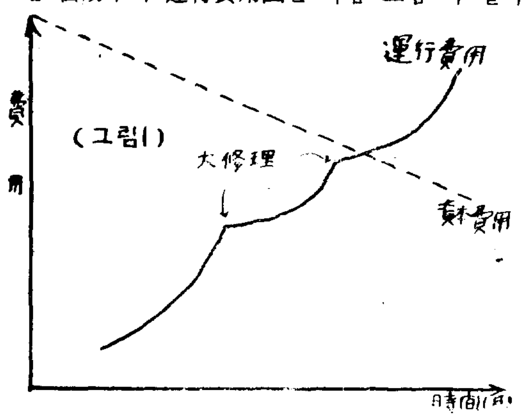
交換理論은 時間의 흐름과 더불어 效率이 低下되는 資本設備를 원래의 效率로 回復하기 爲한 方法이다. 이 問題는 經濟的으로, 資本的으로 資本設備의 效率低下를 是正하는 時期를 決定하는데 있는 것이다.

(1) 時間과 더불어 效率이 떨어지는 資本設備의 交換

資本設備의 交換을 要하는 典型的인 例로써 企業體에서 自動車를 使用하는데 있어서 交換하는 問題를 例로써 들어 보겠다.

企業體에서 運營되고 있는 自動車는 時間이 흐름에 따라 當初 車體의 效率로 原狀復歸시키기 위하여 새車로 交換하는 時期를 設定하는 것이다. 아마도 企業體에서는 經費를 절약하기 위하여 값싸게 運營함으로써 間接費의 절감과 나아가서는 利潤極大化를 고려 할것이며 또한 새 車를 가지므로 效率을 높이고 위신과 名聲을 維持함을 考慮 할것이다. 만일 運送價格의 저렴함을 고려 한다면 自動車 時間의 흐름과 더불어 어떻게 運送費用을 變化를 가져 올수 있을까를 살펴볼 必要가 있는 것이다.

每月 一定한 運行거리를 維持한다고 가정하면 自動車의 運行費用圖는 다음 그림1과 같다



(그림 1) 月間運行費用

運行費用 外에 交換을 위한 自動車購入을 考慮한다면 새 自動車 購入을 늦게 할수록 資本金에 對한 月平均費用은 적게 分配 될 것이다. 그러나 둘을 합친 全體의 月 平均 費用은 어느 時點에 가서 運行費用의 增加가 資本費用의 減少를 뒤 짐는 點이 있게 된다.

이때에 交換理論의 正當化가 成立 될것이다

(例 1)

한 企業體에서 過去의 記錄으로 부터 1台當 600,000원 價格의 승용차 1年 運行費用이 다음과 같다.

年	1	2	3	4
運 行 費 用	100,000	120,000	140,000	180,000
使用車賣渡格價	300,000	150,000	75,000	38,500

5	6	7	8
230,000	280,000	340,000	400,000
20,000	20,000	20,000	20,000

승용차를 몇년째 交換하면 좋겠는가?

解 : 먼저 승용차 年令에 따라 승용차의 月間 運行費用의 그림1과 같이 年間平均 運行費用을 計算한다.

승용차 購買價格과 年末의 賣渡價格의 關係가 다음 表1과 같다.

(表 1)

交換年令	運行費用累計	資本金累計	費用合計	年間平均費用
1	100,000	300,000	400,000	400,000
2	220,000	450,000	670,000	335,000
3	360,000	525,000	885,000	295,000
4	540,000	562,500	1,102,500	275,625
5	770,000	580,000	1,350,000	270,000
6	1,050,000	580,000	1,630,000	271,667
7	1,390,000	580,000	1,970,000	281,429

그러므로 第 5年이 지나면 平均費用이 上昇하므로 第 5년이 最適交換年令이라 하겠다.

(例 2) 앞의 例題에서 企業體에서 3台의 승용차를 運營하고 있는데 2台를 2年이 經過했고 1台는 1年이 지났다. 그는 現在 승용차 보다 50%더 容量을 가진 승용차를 800,000원씩 주고 사서 現在 승용차와 交換할것을 考慮하고 있다. 그런데 새 車의 運營費用과 賣渡價格을 아래와 같이 推算하고 있다.

年	1	2	3	4
運行費用	120,000	150,000	180,000	240,000
賣渡價格	400,000	200,000	100,000	50,000

5	6	7	8
310,000	400,000	500,000	610,000
20,000	20,000	20,000	20,000

승용차의 減少로 인한 융통성에 別로 支障은 없고 舊車 3台分의 業務量도 계속 된다고 하면 어떠한 政策을 使用할 것인가?

解 : 例1의 方法과 마찬가지도 年 平均 費用을 내보면 表 2와 같다.

(表 2)

交換年令	運行費用累計	資本費用累計	費用合計	年平均費用
1	120,000	400,000	520,000	520,000
2	270,000	600,000	870,000	435,000
3	450,000	700,000	1,150,000	383,000
4	690,000	750,000	1,440,000	360,000
5	1,000,000	770,000	1,770,000	354,000
6	1,400,000	770,000	2,170,000	361,667
7	1,900,000	770,000	2,670,000	381,143

즉 5年 後에 交換함이 가장 經濟的이다. 이때의 年平均費用은 354,000원 이며 舊 승용차에 換算한다면 236,000원에 該當한다.

이 費用은 舊車의 年平均費用(例1의 第5年째 最少費用이 270,000원)보다 적음으로 새 승용차로 交換함이 經濟的인 政策이다. 새 車로 交換할 政策이 섰으면 다음은 交換時期를 언제 할 것인가? 이다. 모두 平均하여 한꺼번에 交換할 것을 假定하여 새車 2台와 舊車 3台를 함께 交換할 것을 고려 해보자.

舊車 3台의 運行費用 合計가 새車 2台의 年平均 運行費用을 초과할때 새車를 購入하는 것이 좋을 것이다.

前表1을 살펴보면 舊車의 年間運行 費用은 다음과 같다.

1	2	3	4	5	6
400,000	335,000	295,000	275,625	270,000	271,667

따라서 3台를 一時에 交換할때 例를 들어 2年이 지난 車 2台와 1年 지난 車 1台의 運行費用은,

第3年來에는 2×295,000+335,000=925,000원

第 4年來에는 $2\times275,625+295,000=$ 846,250원

第 5年來에는 $2\times270,000+275,625$ $=815,625$원

第 6年來에는 $2\times271,667+270,000$ $=813,334$원

第 7年來에는 $2\times281,429+271,667$ $=834,525$원이다.

새車 2台의 年平均 運行費用은 第 5年度의 最少費用이 $354,000\times2=708,000$원이다. 舊車의 年間運行費用은 第6年末에 가서 最少가 된다. 따라서 지금부터 4年 後 交換함이 좋다.

위 두 例는 費用만을 介入시킨 單純한 경우이다. 미래의 價値를 現在價値로 換算하여 比較한 다면 좀더 잡복한 計算으로 되나 보다 合理的인 硏究가 된다.

(2) 壽命이 갑자기 完全히 끊어지는 品目의 交換

이번에는 어느 時期에 가서 갑자기 壽命이 完全히 끊어져 못쓰게 되는 品目에 關하여 考察하기로 한다.

設置후 壽命이 끊어지는 期間은 一定하지 않지만 어떤 度數分布에 따르며 이러한 品目의 壽命에 대한 確率分布를 알고 있다고 가정하면 어느 적은 期間 t에서 $t+\triangle t$까지의 壽命의 條件付確率 (Conditional Probability)를 알아낼수 있다. 이 條件付確率은 時間 t_1의 境遇에 따라 減少, 一定 또는 增加한다. 減少하는 條件付確率은 幼兒의 生命을 들수있으며 一定한 條件付確率은 年令에 關係없이 어떤 衝擊을 받아서 絕命되는 品目으로써 Radio의 진공관 같은 것 이라 하겠다.

여기서는 年令과 絕命度數가 增加하는 條件付確率에 關하여 論하기로 한다.

實際로 絕命된 裝備를 交換하는 것은 別로 問題가 되지 않으나 이런 경우는 普通 資本投資 또는 生產性의 比較問題가 된다고 본다.

例를들어 精油工場에서 펌프(Pump)의 絕命과 같은 것은 펌프 自體의 交換費用은 문것이 못되지만 工場全體의 運用을 中斷시키게 되는 費用은 큰 것이다.

따라서 아직 壽命이 끊어지기 前에 交換함이 絕命된 뒤에오는 費用보다 經濟的인 境遇와 새 品目으로 交換함으로써 絕命의 確率을 훨씬 減少시키는데 이 問題의 正當性을 찾아볼수 있을 것이다. 그러므로 交換政策은 裝備의 絕命確率에 달려 있다고 봄으로 絕命確率을 推算하는 것은 대단히 重要하다.

물론 確率分布를 아는것도 중요하지만 긴박된 絕命을 探知하는 것은 더욱 이것을 補充하는 方法이다.

가. 壽命曲線(Mortality Curves)

電球의 壽命性格에 關한 첫 情報는 壽命曲線에 依해서 알수있다.

N個의 電球群을 設置하고 同一한 期間 t의 末期마다 電球의 生存數는 時間 t의 함수 즉 S(t)로 表示 할수있다.

最初設置한 電球의 生存比率은

$$D(t)=\frac{S(t)}{N}$$

(例 3) 100,000個의 電球群이 一定한 期間을 두고 生存하는 數에 對한 典型的 壽命表는 다음과 같다.

期間 (t)	(1) 生存數 S(t)	(2) 絶 命 數 S(t-1)-s(t)	(3) 絶命確率 P(t)	(4) 條件付給命確率 Vt, o
1	100,000	0	0	0
2	99,000	1,000	0.01	0.0100
3	98,000	1,000	0.01	0.0101
4	97,000	1,000	0.01	0.0102
5	96,000	1,000	0.01	0.0103
6	93,000	3,000	0.03	0.0312
7	87,000	6,000	0.06	0.0645
8	77,000	10,000	0.10	0.1149
9	63,000	14,000	0.14	0.1818
10	48,000	15,000	0.15	0.2381
11	32,000	16,000	0.16	0.3333
12	18,000	14,000	0.14	0.4375
13	10,000	8,000	0.08	0.4444
14	6,000	4,000	0.04	0.4000
15	3,000	3,000	0.03	0.5000
16	2,000	1,000	0.01	0.3333
17	1,000	1,000	0.01	0.5000
18	0	1,000	0.01	1.0000

〔例〕(1) 經過한單位期間 t

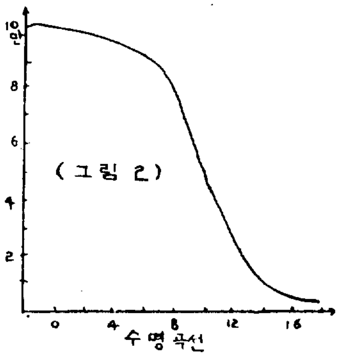
〃 (2) 生存數 S(t)……電球製作者로부터 資料提供

〃 (3) (2)列의 變化率

〃 (4) (3)列÷N

〃 (5) (3)列÷(2)列의 前期間의 값

時間 t의 經過와 더불어 生存數를 追跡한 壽命曲線 S(t)이다.



(그림 2)

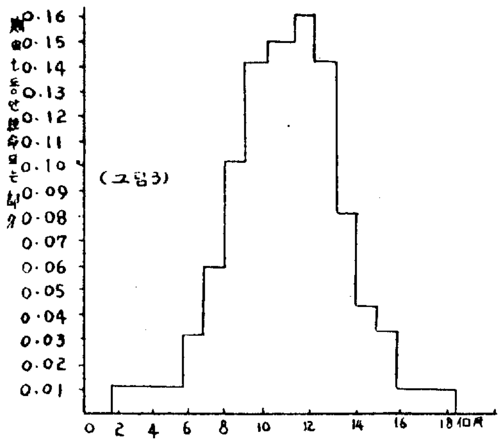
수명곡선

위의 그림2와 같이 時間의 흐름에 따라 電球의 壽命曲線은 急降下 된다는 것을 알수있다.

나. 壽命幅(Life Span)

壽命의 性格은 壽命幅의 確率分布의 Form에서보다 쉽게 理解할 수 있다. 이 確率分布는

$$P(t)=\frac{S(t-1)-S(t)}{N} \qquad P(t):\text{絶命確率}$$



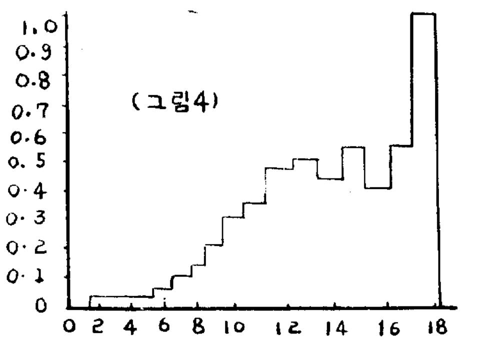
(그림3)

상기의 그림3에서는 8個月에서 交換함이 絶命의 確率을 훨씬 감소시킨다는 것을 볼수있다.

다. 絶命의 條件付 確率

또 하나의 壽命性格은 條件付確率에 依해서 알수있다.

이것은 期間 t에 生存한 品目이 期間 $t+1$



(그림4)

에 生存할 수 있는 確率이다.

條件付絶命確率 $Vt,o=\dfrac{S(t-1)-S(t)}{S(t-1)}$

$=1-\dfrac{S(t)}{S(t-1)}$

(例 4)

1,000個의 電球를 使用하고 있는 會社에서 그 壽命을 調査한 結果 絶命率은 다음과 같다

週	1	2	3	4	5
週末絶命率	10	25	50	80	100

絶命電球 한個씩 交換하는 데는 100원씩 이다. 한꺼번에 交換하면 個當 25원씩 所要되며 電球가 모두 壽命이 끊어 졌던 안 끊어 졌던 간에 一定한 期間을 두고 定期的으로 한꺼번에 交換하고자 한다.

어느 期間동안에 모든 電球를 交換함이 좋겠는가?

解: 每週間에 電球가 끊어지는 率을 먼저 推算하자 Pi를 새것으로 設置한 電球가 i週初에 살아있는 電球數와 i週末에 살아있는 電球數와의 差라고 하자. 따라서 表을 作成할수 있

週(i)	1	2	3	4	5
(Pi)	0.10	0.15	0.25	0.30	0.20

Pi:새 電球를 設置한 것이 i 週間에 絶命하는 率다. 5週以上 壽命을 가진 電球는 없는 것으로된다. 즉 第 4 週까지 살아있는 電球는 第5 週內에 모두 絶命되는 것으로 본다.

물론 第 5 週에 모두 絶命 된다는 條件은 아니지만 第 5 週間의 絶命率을 0.2로 본다.

모든 電球를 한꺼번에 交換하는 것이 아니고 絶命하는 電球를 每週에 한번씩 交換한다고 보며 다음과 같이 假定하고,

(a) 그 期間에 絶命되는 電球는 그 週末에 交換한다.

(b) 部分人口(Sub population)의 같은 時間을 經過한 壽命率은 全體人口의 그 期間의 壽命率과 同一 하다고 본다.

1,000個의 電球를 새로이 設置하였을때 n를 i週末에 交換한 電球數라 하면

$$n_0=n_0 \qquad =1,000$$

$$n_1=n_0\ P_1 \qquad =100$$

$$n_2=n_0\ P_2+n_1\ p_1=150+10 \qquad =160$$

$$n_3=n_0\ p_3+n_1\ p_2+n_2\ p_1=250+15+16 \qquad =281$$

$$n_4=n_0\ p_4+n_1\ p_3+n_2\ p_2+n_3p_1=300+25+24+28=377$$

$$n_5=n_0\ p_5+n_1\ p_4+n_2\ p_3+n_3p_2+n_4p_1$$

$$=200+30+40+42+38 \qquad =350$$

$$n_6=n_1p_5+n_2p_4+n_3p_3+n_4p_2+n_5p_1$$

$$=20+48+70+57+35 \qquad =230$$

$$n_7=n_2p_5+n_3p_4+n_4p_3+n_5p_2+n_1p_1$$

$$=32+84+94+53+23 \qquad =286$$

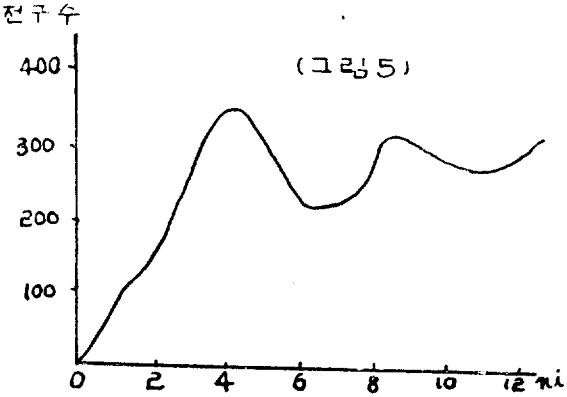
$n_8 = n_3p_5 + n_4p_4 + n_5p_3 + n_7p_1 = 56 + 113 + 88 + 35 + 29 = 321$

$n_9 = n_4n_5 + n_5p_4 + n_6p_3 + n_7p_2 + n_8p_1 = 75 + 105 + 58 + 43 + 32 = 313$

$n_{10} = n_5p_5 + n_6p_4 + n_7p_3 + n_8p_2 + n_9p_1 = 70 + 69 + 72 + 48 + 31 = 290$

$n_{11} = n_6p_5 + n_7p_4 + n_8p_3 + n_9p_2 + n_{10}p_1 = 46 + 86 + 80 + 47 + 29 = 288$

$n_{12} = n_7p_5 + n_8p_4 + n_9p_3 + n_{10}p_2 + n_{11}p_1 = 57 + 96 + 78 + 44 + 29 = 304$



위의 그림 5와 같이 4週째가 가장 많이 交換하고 다시 減少되였다가 다시 차츰 上下로 조금씩 波動치며 一定數量에 接近해 간다. 一定 數量은 平均壽命數量으로써 平均壽命은.

$1\times0.1+2\times0.15+3\times0.25+4\times0.3+5\times0.2$

$=3.35$(週)이며 $1000\div3.35=299$(個/週)가 된다.

結局에는 一週에 299個 平均 交換하면 좋다 끊어질 때마다 交換하면 1個 100원씩 들으므로 一週 平均 29,900원이 들게 된다. 만약 한꺼번에 交換할때 一週마다 交換하면 1,000×25(원)=25,000과 그 週間內 絕命電球의 交換 1,000(個)×0.1×100(원)=10,000(원)을 合한 것즉 35,000원이 所要된다.

2週마다 한꺼번에 모든 電球를 交換한다면

25원×1,000個=25,000원
100원×100 個=10,000원
+ 100원×160 個=16,000원
51,000원

으로써 週當 51,000÷2=25,000이든다.

3週마다 交換한다면

25원×1,000個=25,000원
100원×100個=10,000원
100원×160個=16,000원
100원×281個=28,100원
79,100원

週當原價는 79,100÷3=26,367(원) 이므로 2週마다 모든 交換하는 것이 가장 經濟的이다.