不良管理圖에 있어서의 標準偏差 와Control Limit

漢陽大學校 工經科敎授
本學會 常 務 理 事
黃 義 徹

1. 序 言

一般的으로 製造生産業에서는 $\bar{x}$-R管理圖를 많이 使用하고 있으나 不良에 대한 P.n 管理圖나 缺點게 대한 C. U管理圖는 널리 使用되지 않고있는 傾向이 있다. 또한 現在 國内에서 發表된 文獻에서도 이러한 不良管理圖의 標準偏差와 管理圖에 對한 正確한 解析을 한것이 드물기 때문에 이 機會에 그 根據를 數學的 統計學에 의하여 규명하므로써 초보자나 實務者에게 조금이나마 도움이 되게하려 한다.

2. 確率分布로 使用되는 二項式

어떤 事象의 出現하는 確率이 一定한 것에 對한 確率問題는 二項定理의 公式을 使用해서 풀수가 있다.

$$(a+b)^n=a^n+na^{n-1}b+\frac{n(n-1)}{(2)\ (1)}a^{n-2}b^2+\frac{n(n-1)\ (n-2)}{(3)\ (2)\ (1)}a^{n-3}b^3+\frac{n(n-1)\ (n-2)\ (n-3)}{(4)\ (3)\ (2)\ (1)}a^{n-4}b^4+\cdots\cdots$$

로써 이 式은 統計的 品質管理에서 가장 重要한 確率分布의 基礎가 된다.

가령 p'를 어떤 特殊한 事象이 일어나는 一定한 確率에 對한 記號로 생각하자. 統計的品質管理에 있어서 이것을 一般的으로 不良品이 나타나는 確率로 취급하고 q'는 위와 같은 事象이 일어나지 않는 確率에 對한 記號로 생각하는데 이것은 一般的으로 良品이 나타나는 確率이라 한다.

그러므로 $p'+q'=1$ $\therefore q'=1-p'$한 例로써 p'는 한 무더기의 製品안에 들어있는 不良品의 全體에 對한 率로써 0.06이라 하면 良品의 率 $q'=0.94$가 된다. 이때 이 무더기로 부터 샘플 5個를 取한다고 하면 이 샘플안에 包含될 수 있는 여러가지 可能한 不良品의 數에 對한 確率을 생각해보자, multiplication theorem에 依해 5個의 Sample안에 Zero個의 不良品이 있게 될 確率은;

$$Po=(0.94)\ (0.94)\ (0.94)\ (0.94)\ (0.94)=(0.94)^5$$

같은 理論으로써 5個의 不良品에 對한 確率은

$$P_5=(0.06)\ (0.06)\ (0.06)\ (0.06)\ (0.06)=(0.06)^5$$ 로써 表示된다.

다음은 5個中에 1個의 不良品이 있게될 確率을 보면 이 不良品은 5個의 샘플中 어느것이나하나가 될것이다. 만일 첫번째 것이 不良品이 고 남어지 4個가 良品이라면

$(0.06)\ (0.94)\ (0.94)\ (0.94)\ (0.94)=(0.94)^4\ (0.06)$으로 表示되며 不良品이 세째번

이나 넷째번에 있어서도 위와같은 結果로 表示될 것이다.

Addition Theorem에 依해서 5個中에 어느 順序에나 하나가 不良品이 나타날수 있는 確率은 5個의 分離된 確率의 合이다.

$P_1=5(0.94)^4(0.06)\cdots\cdots\cdots$

또 처음 2個가 不良品이고 나중 3個가 良品이 될 確率은

$P_2=(0.06)(0.06)\ (0.94)(0.94)\ (0.94)=(0.94)^3(0.06)^2$이다.

그런데 이때 꼭 2個가 不良品이고 다른 3個가 良品이 될 여러가지 結合方式을 羅列하면 다음과 같다.

D D G G G	G D G D G	D:不良品
D G D G G	G D G G D	G:良品
D G G D G	G G D D G	
D G G G D	G G D G D	
G D D G G	G G G D D	

여기서 본바와 같이 5個의 샘플 중 2個의 不良品이 나타날수 있는 組合은 전부 10가지가 된다. 따라서 羅列方式(順列)如何를 莫論하고 2個의 不良品이 나타나는 確率은 $P_2=10(0.94)^3(0.06)^2$ 임을 알수있다. 여기 10은 組合의 總數이므로 組合(Combination)의 式으로 부터 간단히 計算 할수있다.

一般的으로 一定한 r번의 出現度數가 나타나는 확률은

$$C^n_r\, q'^{n-r}\, P'^r=\frac{n!}{r!(n-r)!}\, q'^{n-r}\, p'^r$$

이 式은 Binomial의 모든 項에 適用되는 二項展開의 一般化한 項이다.

統計的 品質管理에서 一般的으로

p':不合格率

q':合格確率

n:試驗度數 샘플링個數

r:不良個數

또 위의 二項分布式에 依해 5個中 各各 不良個數가 出現 할수있는 確率은 다음 表와 같다.

注意 : 統計에서 確率分布로 使用되는 2項式을 "Point Binomial"혹은 "Bernoulli Distribution"이라 부른다.

確率公式으써의 二項分布의 說明

(n個 가운데 r出現度數에 對한 確率)

r	General expression	Value when $p'=0.06$ and $n=5$
0	$C^n_0 q'^{n-0}p'^0 = q'^n$	$(0.94)^5 = 0.7339040224$
1	$C^n_1 q'^{n-1}p'^1 = nq'^{n-1}p'$	$5(0.94)^4(0.06) = 0.2342246880$
2	$C^n_2 q'^{n-2}p'^2 = \frac{n!}{2!(n-2)!} q'^{n-2}p'^2$	$10(0.94)^3(0.06)^2 = 0.0299010240$
3	$C^n_3 q'^{n-3}p'^3 = \frac{n!}{3!(n-3)!} q'^{n-3}p'^3$	$10(0.94)^2(0.06)^3 = 0.0019085760$
4	$C^n_4 q'^{n-4}p'^4 = \frac{n!}{4!(n-4)!} q'^{n-4}p'^4$	$5(0.94)(0.06)^4 = 0.0000609120$
5	$C^n_5 q'^{n-5}p'^5 = \frac{n!}{5!(n-5)!} q'^{n-5}p'^5$	$(0.06)^5 = 0.0000007776$
Total	....	$= 1.0000000000$

3. 二項式의 平均値와 標準偏差

例를 들어 不良率이 6%인 lot로 부터 5個의 Sample를 無數히 取했을 때의 샘플當平均期待値 (Expected average number) 는 (5) (0.06) = 0.3 이 될것이다.

이때 한 샘플의 數를 n, 不良率를 P'로 대치 하면 위의 關係는 np'로 表示

된다 .

이것을 統計的 品質管理의 term으로써 解析하면 不良率이 P'인 lot로 부터 크기 n인 샘플를 랜덤으로 無數히 取했을때 "平均期待不良個數는 np'이다"라고 말한다.

Binomial에 立脚한 度數分布의 標準偏差는 數學的 統計學의 證明에 依해 다음과 같이 表示 수 있다.

$$\delta=\sqrt{np'q'}=\sqrt{np'(1-p')} \text{ (註1)}$$

그런데 n個 시험에서 事象 出現의 平均數 np'와 出現의 상관비례 또는 出現된 確率 p'와를 區分해야 한다는 것이다. 또 SQC에 있어서 샘플中 不良品의 平均數와 平均不良個數를 구분하는 것을 필요로 한다. 어떤 샘플에서 不良率이라 함은 不良個數를 샘플의 크기 n으로 나눈것을 말한다.

그러므로 不良率에 關한 標準偏差 δp는 $\sqrt{np'q'}$를 샘플링의 크기 n으로 나눈 것이 된다. 즉

$$\delta p= \sqrt{\frac{np'q'}{n}}=\sqrt{\frac{p'q'}{n}}=\sqrt{\frac{p'(1-p')}{n}}$$

$$=\sqrt{\frac{p'(1-p')}{\sqrt{n}}}$$

따라서 不良率 管理圖 (p-chart)의 3-sigma Limit는

$$UCLp=\overline{P}+3\delta p=\overline{P}+3\sqrt{\frac{\overline{P}(1-\overline{P})}{n}}$$

$$LCLp=\overline{P}-3\delta p=\overline{P}-3\sqrt{\frac{(\overline{P}1-\overline{P})}{n}}$$

或은 標準値를 알때는,

$$UCLp=P'+3\sqrt{\frac{P'(1-P')}{n}}$$

$$LCLp=P'-3\sqrt{\frac{P'(1-P')}{n}}\text{이다}$$

(註 1)

一般的으로 標準偏差 S(혹은 δ)

$=\sqrt{\frac{\sum X^2}{N}-\left(\frac{\sum X}{N}\right)^2}$ 이며 이때 X는 不連續量이다.

한 例로써 고무공을 檢査할때 合格品을 0으로, 不各格品을 1로 表示하면 100個의 공을 檢査해서 不合格品이 25個 나타날 때는

$X_1, X_2, \cdots\cdots X_{25}$로 記號 될것 이며 各 變量 X는 1 뿐이다.

따라서 1을 제곱하여도 1이므로 X^2을 25個 合한$\sum X^2=25$밖에 되지 않을 것이다. 그러므로 $\frac{\sum X}{N}$나 $\frac{\sum X^2}{N}$은 같은 값이 된다.

그러나 $\frac{\sum X^2}{N}$과 $\left(\frac{\sum X}{N}\right)^2$은 같지가 않다.

위의 例로써 $\frac{\sum X^2}{N}=\frac{25}{100}$이지만 $\left(\frac{\sum X}{N}\right)^2=\left(\frac{25}{100}\right)^2=\frac{625}{10,000}$가 된다. 이러한 內容을 위 式에 代入하면

$$\delta=\sqrt{\frac{\sum X^2}{N}-\left(\frac{\sum X}{N}\right)^2}=\sqrt{\frac{25}{100}-\left(\frac{25}{100}\right)^2}$$

$$=\sqrt{\frac{25}{100}\left(1-\frac{25}{100}\right)}=\sqrt{\left(\frac{25}{100}\right)\left(\frac{75}{100}\right)}$$

$$=\sqrt{(0.25)\ (0.75)}$$

여기에 $p'=0.25$ $\therefore p'=1-p'=1-0.25=0.75$를 代入하면$\delta=\sqrt{p'q'}$ p' 代身에 期待値 np'를 쓰면 $\delta=\sqrt{np'q'}$ 가 된다.